Exercice 1 (∗) Déterminer (lorsqu'elles existent) les bornes inférieures et supérieures ainsi que les maxima et minima de chacun des ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbf{R} \ : \ x^2 < 2\} \quad ; \quad B = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N}^*\right\} \quad ; \quad C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \ : \ n, p \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

Majorant d'un ensemble D?

Un majorant M de l'ensemble D est un élément qui est plus grand que l'ensemble des éléments de cet ensemble D.

$\forall d \in D, \ d \leq M$

· Exemple : $D = [0,1]$, $M = 2$ ou $M = 3$ ou $M = 1$

Borne supérieure d'un ensemble D?
La borne supérieure est le plus petit des majorants.

· $D = [0,1]$, $\sup D = 1$.

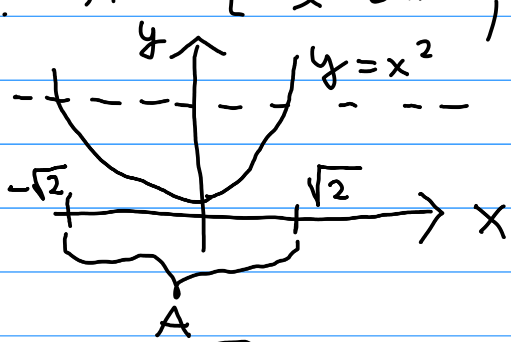
$E = [0,1[$, on a $\sup D \geq 1$, car $\sup D$ est un maj.

1 est aussi un maj, dc $\sup D = 1$.

⚠ $1 \in D$, mais $1 \notin E$.

Le maximum d'un ensemble D est le plus grand élément de D, s'il existe.
Propriété : -Si le maximum de D existe, alors il est égal à la borne supérieure.
-Si la borne supérieure de D est un élément de D, alors c'est son max.

1. $A = \{x \in \mathbb{R}, \ x^2 < 2\}$



$A =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

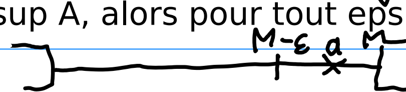
→ On a envie de dire q $\sup A = \sqrt{2}$

1. Mq $\sqrt{2}$ est un maj de A.

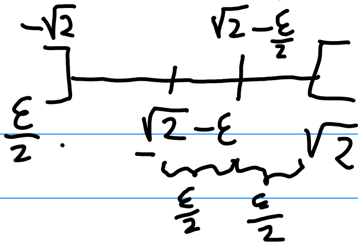
On prend $a \in A$. On a $a \leq \sqrt{2}$.

Donc $\sqrt{2}$ est un maj de A.

2. Propriété : Si M = sup A, alors pour tout epsilon>0, il existe a dans A, tel que a>M-epsilon.



Soit $\varepsilon > 0$, on veut mq il existe $a \in A$ tq $a > \sqrt{2} - \varepsilon$.



Par ex on prend $a := \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2}$.

$\to$ j'ai $a > \sqrt{2} - \varepsilon$

$\to$ $a < \sqrt{2}$

(Donc $a \in A$. et $a > \sqrt{2} - \varepsilon$.) arnaq

Par conséquent $\sup A = \sqrt{2}$.

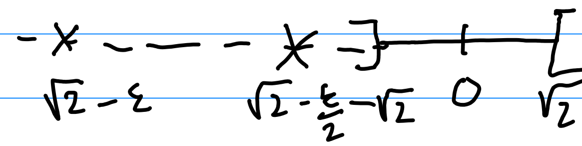
$\to$ Il faut mq $a > -\sqrt{2}$.

Pb: Si ε est trop grand

$a = \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2} > -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{2} > \frac{\varepsilon}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 4\sqrt{2} > \varepsilon$



$\to$ Que fait-on si $\varepsilon > 4\sqrt{2}$.

Si $\varepsilon > 4\sqrt{2}$, $\sqrt{2} - \varepsilon < \sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$.
Il suffit de trouver un élément de A qui est plus grand q $-3\sqrt{2}$.
Prenons 0.
On a $0 \in A$ et $0 > -3\sqrt{2} > \sqrt{2} - \varepsilon$.

Donc $\sup A = \sqrt{2}$.

De même $\inf A = -\sqrt{2}$.

Maintenant $\max A$, $\min A$?

$\to$ $\sqrt{2} \notin A$, donc A n'admet pas de maximum.
$\to$ De même A n'admet pas de minimum

2. $B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$\rightarrow$ sup B ?

$$B = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots \right\}$$

Montrons que sup $B = 1$

1. 1 est un majorant de B.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on veut mq $\frac{1}{n} \leq 1$.

Or c'est équivalent à $n \geqslant 1$.

Donc 1 est un majorant de B.

2. $\rightarrow$ On montre que tout maj de B, noté M est $M \geqslant 1$.

On a que M est un majorant de B.

Or $1 \in B$. Donc $M \geqslant 1$.

Donc sup $B = 1$

$\rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, on veut trouver $b \in B$ et tel que $b > 1 - \varepsilon$.

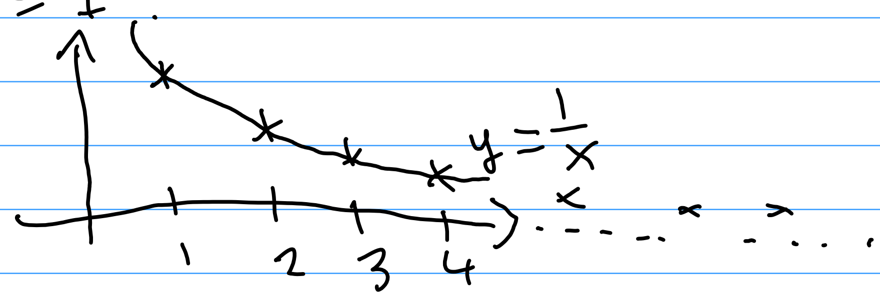
On prend $b = 1$.

Donc sup $B = 1$

Par ailleurs $1 \in B$, donc max B existe et max $B = 1$.

Borne inf ?

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$



1. Mq 0 est un minorant de B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \geqslant 0$.

Donc 0 est un minorant.

2. $\rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. on veut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tq $0 \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$

Soit n un nombre entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$

Si $n > \frac{1}{\varepsilon} \iff 0 \le \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Donc $\inf B = 0$.

→ Mq 0 est le plus grand des minorants.

Soit m un minorant de B

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \geq m$.

Posons la suite $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = m$.

On a $u_n \geq v_n$.

Par le théorème des gendarmes

$$0 = \lim_{n \to +\infty} u_n \geq \lim_{n \to +\infty} v_n = m$$

Donc $0 \geq m$ et 0 est plus grand que tous les autres minorants.

Minimum de B? $0 \notin B$, donc B n'admet pas de minimum.

VRAI OU FAUX : Quiz

Contre-exemple

$F = [0,1[$

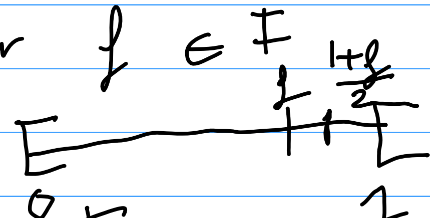
$\sup F = 1$

Or F n'admet pas de plus grand élé^{n}

Par l'absurde s'il admet un + grand élément f.

Alors $0 \le f < 1$, car $f \in F$

Or $\tilde{f} = \frac{1+f}{2}$



$\tilde{f} > f$ et $\tilde{f} \in F$.

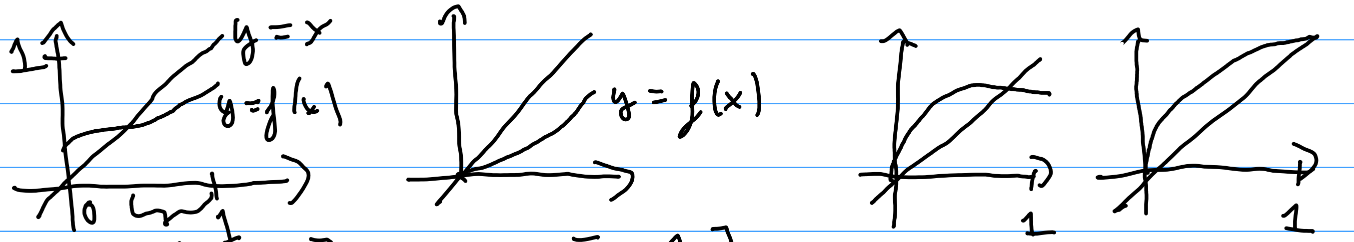
Contradiction.

3. $C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ n \in \mathbb{N}^*,\ p \in \mathbb{N}^* \right\}$

A la maison ! ⟹ Voir correction en bas du doc.

Exercice 4 (∗) Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ une application croissante.

1. Montrer que l'ensemble $E = \{x \in [0; 1] \mid f(x) \leqslant x\}$ admet une borne inférieure b.
2. Montrer que $f(b) = b$.



$E = [b, 1]$ $\quad E = [0, 1]$ $\quad E = \{0\} \cup [b, 1]$ $\quad E = \{0, 1\}$

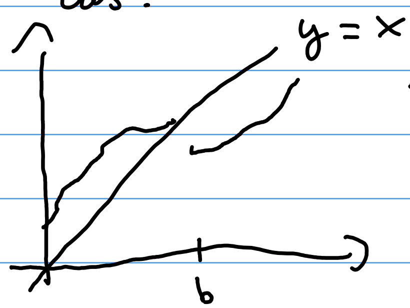
1. Il faut mq inf E existe.

Propriété de la borne supérieure: Soit un ensemble A, qui est majorée. Alors cet ensemble A admet une borne supérieure.
Soit un ensemble A, qui est minorée. Alors cet ensemble A admet une borne inf.

Il suffit de mq E est minoré.
0 est un minorant de E, car $E \subset [0, 1]$.
Donc E est minoré
Par la pté de la borne sup, E admet une borne inf, que l'on note b.

2. Mq $f(b) = b$.

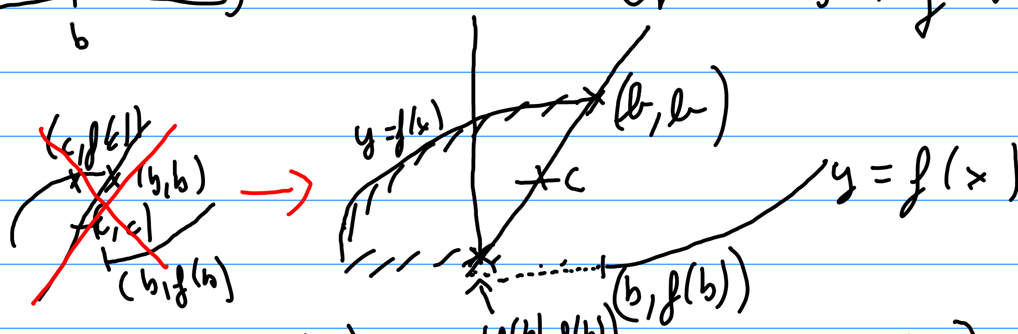
Par l'absurde supposons q $f(b) \neq b$.
1er cas: $f(b) < b$ $\quad$ 2e cas $f(b) > b$.
1er cas:



$b \in]0, 1[$
$E = [b, 1]$

Soit $x < b$.
On a que $x \notin E$
Donc $f(x) > x$
Or $b > f(b)$

Zoom:



$c < b$. $\quad f(c) > c$ $\quad$ On a aussi $f(b) < f(c)$

Par ex: $c = \dfrac{b + f(b)}{2}$

$\to$ Mq $c < b$.

$\Leftrightarrow \frac{b + f(b)}{2} < b$.

$\Leftrightarrow \frac{f(b)}{2} < \frac{b}{2}$

$\Leftrightarrow f(b) < b$.

Donc $c < b$.

$\to$ De plus $c \notin E$, $f(c) > c$

$\to$ Par croissance, $c < b \Rightarrow f(c) \leq f(b)$. $\circledast$

On sait que $c = \frac{f(b) + b}{2} \geq \frac{f(b) + c}{2}$

Or

$\Leftrightarrow 2c \geq f(b) + c$

$\Leftrightarrow \boxed{c \geq f(b)} \geq f(c)$ $\circledast$

Donc $c \in E$. Or $c \notin E$. Contradiction.

2^e cas : à faire à la maison.

Exo 5 : à faire à la maison.

Correction de la question C de l'Exercice 1 de la feuille de TD 1 - Révision

$$C = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p}, n, p \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Nous pouvons d'abord remarquer que l'ensemble C est composé de sommes d'un nombre réel positif compris entre 0 et 1 et d'un nombre réel négatif compris entre -1 et 0. On voit donc assez facilement que $C \subset [-1, 1]$, ce qui nous donne déjà un bon indice.

Nous allons montrer que $\sup C = 1$.
Montrons que 1 est un majorant de C. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$1 \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \frac{1}{p}$$

Donc 1 est un majorant de C.
Maintenant montrons que 1 est effectivement la borne supérieure de C. Soit $\varepsilon > 0$, nous voulons trouver un élément de C qui soit strictement plus grand que $1 - \varepsilon$.
Pour cela fixons $n_0 = 1$ et choisisons $p_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Alors :

$$\frac{1}{n_0} - \frac{1}{p_0} = 1 - \frac{1}{p_0} > 1 - \varepsilon$$

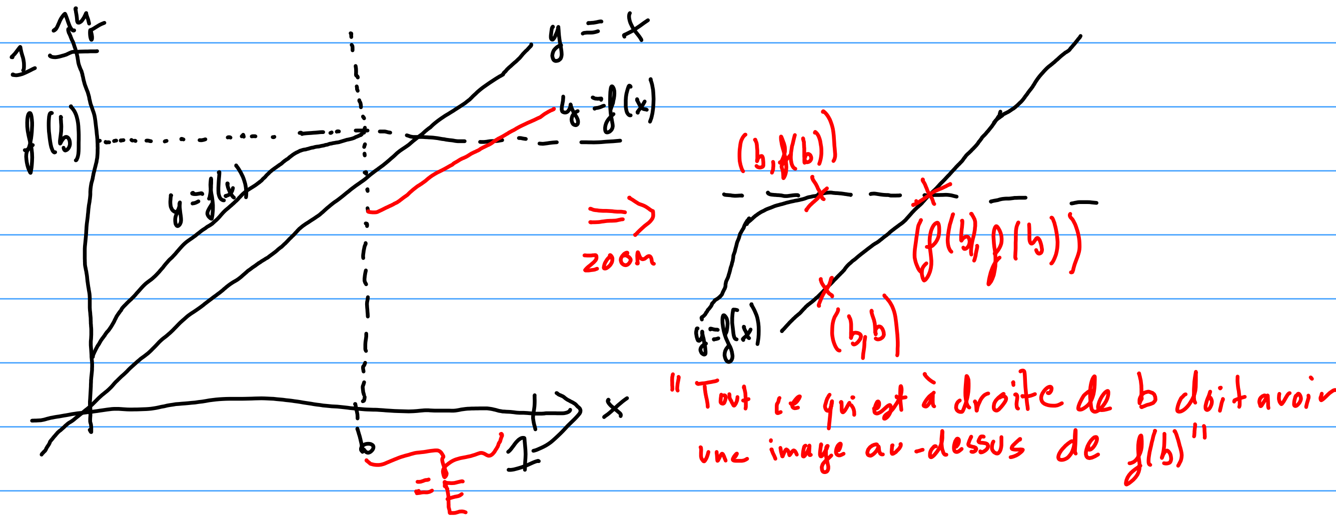
Or $\frac{1}{n_0} - \frac{1}{p_0} \in C$, donc nous pouvons conclure que $\sup C = 1$.
De plus, vu que $1 \geq \frac{1}{p}, \frac{1}{n} > 0$, nous avons que $\frac{1}{n} - \frac{1}{p} < 1$. Donc la borne supérieure n'est pas atteinte et C n'admet pas de maximum.

De même, nous montrons que $\inf C = -1$ et que C n'admet pas de minimum.

Correction de la fin de l'Exercice 4 de la feuille de TD 1 - Révision

Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $f(b) \neq b$. Nous avons déjà montrer que $f(b) < b$ conduit à une contradiction.

Supposons que $f(b) > b$.
La fonction f est croissante, donc pour $x > b$, nous avons $f(x) \geq f(b)$. Cela nous mène à penser que pour $x > b$ suffisamment proche de b, nous devrions également avoir $f(x) > x$, ce qui conduirait à une contradiction, car cela contredirait le fait que b soit la borne inférieure de l'ensemble $\{x, f(x) \leq x\}$ (voir le graphique). En effet, par définiton de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in [b, b+\varepsilon[$, tel que $c \in \{x, f(x) \leq x\}$.Nous obtenons, donc une contradiction en trouvant un $\varepsilon >$ tel que pour tout $c \in [b, b+\varepsilon[$, nous avons $c \notin \{x, f(x) \leq x\}$.



Note : regardez surtout le graphique de droite.

Par croissance de f, pour tout $c \geq b$, nous avons $f(c) \geq f(b)$. En particulier c'est vrai pour tout $c \in [b, f(b)[$.
D'une part : $f(c) \geq f(b)$.
D'autre part : $c < f(b)$.
Donc pour tout $c \in [b, f(b)[, c < f(c)$ et donc $c \notin \{x, f(x) \leq x\}$. Nous contredisons alors l'hypothèse ci-dessus en choisissant $\varepsilon := f(b) - b$, ce qui mène à $[b, b+\varepsilon[= [b, f(b)[$.
Nous avons donc obtenu une contradiction.

Nous pouvons donc conclure que $f(b) = b$.