Groupes définissables dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Q}_p$ et dans les corps pseudo-finis

Benjamin DRUART

10 septembre 2012

Sommaire

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux groupes définissables dans certains types de corps. Si F est un corps et si G est un groupe algébrique abstrait défini sur F, alors $G(F)$ l'ensemble des points de G qui sont dans F est un exemple de groupe définissable dans F.

Inversement si G est un groupe définissable dans F, quel lien existe-t-il entre G et un groupe algébrique ?

En ce qui concerne les corps algébriquement clos, une réponse a été apportée par le théorème de Weil qui affirme que tout groupe définissable dans un corps algébriquement clos est définissablement isomorphe à un groupe algébrique.

L'article de A. Pillay et E. Hrushovski de 1994 *Groups definable in local fields and pseudo-finite fields* [3] cherche à répondre à cette question dans le corps des réels, des p-adiques et dans les corps pseudo-finis.

Pillay a démontré en 1988 et 1989([4] et [5]) que les groupes définissables dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$ sont définissablement isomorphes à un groupe de Nash. Le premier résultat de l'article est le théorème suivant :

Théorème. *F désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Soit G un groupe de Nash sur F.*

Alors il y a un groupe algébrique H défini sur F et un isomorphisme entre un voisinage de l'élément neutre de G et un voisinage de celui de H(F).

Pour les corps pseudo-finis, le résultat principal est :

Théorème. Soit G un groupe définissable dans un corps pseudo-fini. Alors il existe un groupe algébrique H défini sur F et une isogénie définissable entre un sous-groupe d'indice fini de G et $H(F)$.

L'article admet beaucoup de propriétés de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ et des corps pseudo-finis et s'attache à la construction des isomorphismes et des isogénies.

On défini dans un premier chapitre la notion de structures géométriques qui servira de cadre générale. On prouve alors un premier théorème sur les groupes définissables qui sera à la base des autres démonstrations.

Dans un second chapitre, on s'intéresse au cas de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Q}_p$. Après en avoir rappeler quelques propriétés, on défini la notion de groupes de Nash. On démontre enfin le théorème.

Le cas des corps pseudo-finis est traité dans le dernier chapitre. On a alors besoin de résultats de stabilité locale pour démontrer le théorème sur les corps pseudo-finis.

Préliminaires et notations

Notation

Si $\mathcal{L}$ est un langage du premier ordre. On notera $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots$ les $\mathcal{L}$-structures, et $M, N, \ldots$ les ensembles sous-jacents.

On note $lg(\bar{x}) = n$ si $\bar{x} \in M^n$.

Si $\mathfrak{M}$ est une $\mathcal{L}$-structure, $A \subseteq M$ et $a \in M$:

- on note $\mathcal{L}_A$ le langage $\mathcal{L}$ enrichi d'un symbole de constante pour chaque élément de A.
- on note $a \in \mathrm{dcl}^{\mathfrak{M}}(A)$ (resp. $a \in \mathrm{acl}^{\mathfrak{M}}(A)$), s'il existe ψ une $\mathcal{L}_A$-formule telle que $\mathfrak{M} \models \psi(a)$ et $\mathfrak{M} \models \exists! x\psi(x)$ (resp. il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{M} \models \exists^{=n}\psi(x)$). Remarquons que si $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$, on a $\mathrm{dcl}^{\mathfrak{M}} = \mathrm{dcl}^{\mathfrak{N}}$ et $\mathrm{acl}^{\mathfrak{M}} = \mathrm{acl}^{\mathfrak{N}}$.
- on notera $a \in \mathrm{qfdcl}^{\mathfrak{M}}(A)$ (resp. $a \in \mathrm{qfacl}^{\mathfrak{M}}(A)$) si ψ est sans quantificateur.
- de même, $\mathrm{qftp}(a)$ est le type sans quantificateur de a.

Si $\mathfrak{M}$ est une sous-structure de $\mathfrak{N}$, et G est un groupe définissable (éventuellement à paramètre) dans $\mathfrak{N}$, on note $G(\mathfrak{M})$ l'ensemble des éléments de G qui sont dans M.

Si k est un corps, on note $\tilde{k}$ sa clôture algébrique au sens de la théorie des corps.

Dimension

Si acl est une prégéométrie , on peut définir la notion de famille libre, génératrice et de base.

Si $A \subseteq M$ tel que $\mathrm{acl}(A) = A$, toutes les bases de A ont le même cardinal. On peut donc définir la dimension de A, noté $\dim(A)$, comme le cardinal d'une base de A, c'est également le cardinal maximal d'une famille libre de A.

On pose $\dim(\bar{a}) = \dim(\mathrm{acl}(\bar{a}))$.
Si X est un ensemble définissable, $\dim X = \max\{\dim(\bar{a}) | \bar{a} \in X\}$.

Si $\bar{a} \in X$, on dit que $\bar{a}$ est générique si $\dim(\bar{a}) = \dim X$.

Indépendance

Lemme 0.1. *$\mathfrak{M}$ est une structure $|A|^+$-saturée avec $A \subseteq M$ et $a, b, c, d \in M$. On suppose que tp(a/A) est stationnaire.*

Si $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(c/A)$, $\mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(d/A)$ et $a \downarrow_A b$, $c \downarrow_A d$,
alors $\mathrm{tp}(a; b/A) = \mathrm{tp}(c; d/A)$.

Bases canoniques

Soit T une $\mathcal{L}$-théorie stable et $\mathfrak{M}$ un modèle de la théorie, $A \subseteq M$ et $p \in S(A)$.

Proposition 0.2. Si p est un type stationnaire, alors il est définissable, i.e. pour toute formule $\psi(\bar{x}; \bar{y}) \in \mathcal{L}$ il existe $d\psi(\bar{y})$ à paramètre dans $\mathrm{acl}(A)$ telle que pour tout $\bar{b}$, on ait : $\models d\psi(\bar{b})$ ssi $\psi(\bar{x}; \bar{b}) \in p$.

Définition 0.3. Si p est un type stationnaire, on définit $Cb(p)$ la base canonique de p comme :

$$Cb(p) = \mathrm{dcl}(\{c \in M^{eq} \mid c \text{ est le paramètre canonique de } d\psi \text{ pour } \psi \in \mathcal{L}\})$$

Remarque.
- $Cb(p)$ est le plus petit ensemble sur lequel p est définissable.
- Si p est stationnaire et si q est une extension non déviante de p alors q est stationnaire et q a la même base canonique de p.

Proposition 0.4. Soit $p(x) \in S(A)$ un type stationnaire. Alors :
(i) $Cb(p) \subseteq \mathrm{dcl}(A)$;
(ii) $\forall B \subseteq A$, p ne dévie pas sur B ssi $Cb(p) \subseteq \mathrm{acl}(B)$;
(iii) $\forall B \subseteq A$, p ne dévie pas sur B et $p \upharpoonright B$ est stationnaire ssi $Cb(p) \subseteq \mathrm{dcl}(B)$;
(iv) Soit $\mathfrak{M}$ un modèle $|T|^+$-saturé et fortement $|T|^+$-homogène. On suppose $p(x) \in S(M)$. Soit f un automorphisme de $\mathfrak{M}$. Alors $f(p) = p$ ssi$f$ fixe $Cb(p)$ point par point ;
(v) $Cb(tp(a/\mathrm{acl}(A))) \subseteq \mathrm{dcl}(A, a)$.

Remarque. Si T est une théorie ω-stable, la base canonique d'un type stationnaire est un uple fini de M (c'est le paramètre canonique d'une formule $\psi(\bar{x})$ de p telle que $RM(\psi) = RM(p)$).

La base canonique est unique à interdéfinissabilité près, en prenant$Cb(p)$ le paramètre dans M^{eq} de la classe des paramètres canoniques des différentes formules ψ qui conviennent, $Cb(p)$ est unique.

Groupes définissables dans le contexte stable

Théorème 0.5 (Weil-Hrushovski)**.** *Soit $\mathfrak{M}$ une structure fortement minimale saturée. Soit A un sous-ensemble de M.*

On considère $p(\bar{x}), q(\bar{x}) \in S(A)$ stationnaires et $f(\bar{x}_1; \bar{x}_2)$ et $g(\bar{x}; \bar{y})$ des fonctions partielles A-définissables telles que :
(i) Pour $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \vDash p$, A-indépendants, alors $f(\bar{a}_1; \bar{a}_2)$ est défini et si $\bar{a}_3 = f(\bar{a}_1; \bar{a}_2)$ alors $\bar{a}_3 \vDash p$ et de plus $\bar{a}_3 \downarrow_A \bar{a}_1$ et $\bar{a}_3 \downarrow_A \bar{a}_2$.
(ii) Si $\bar{a} \vDash p$, et $\bar{b} \vDash q$ avec $\bar{a} \downarrow \bar{b}$ alors $g(\bar{a}; \bar{b})$ est défini et $g(\bar{a}; \bar{b}) \vDash q$ et $g(\bar{a}; \bar{b}) \downarrow_A \bar{a}$.
(iii) Si $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \vDash p$ indépendants, alors $f(\bar{a}_1; f(\bar{a}_2; \bar{a}_3)) = f(f(\bar{a}_1; \bar{a}_2); \bar{a}_3)$
(iv) Si $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \vDash p$, $\bar{b} \vDash q$ et $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}\}$ sont A-indépendants, alors $g(f(\bar{a}_1; \bar{a}_2); \bar{b}) = g(\bar{a}_1; g(\bar{a}_2; \bar{b}))$.

Alors, on peut interpréter dans $\mathfrak{M}$ un groupe connexe G, un ensemble X, et une action transitive de G sur X (à paramètre dans A), et des fonctions partielles, inversibles, A-définissables h_1 et h_2 telles que :
(a) si $a \vDash p$, alors $h_1(a)$ réalise le type générique de G ;
si $b \vDash q$, alors $h_2(b)$ réalise le type générique de X ;
(b) si $a_1, a_2 \vDash p$ et $a_1 \downarrow a_2$, alors $h_1(f(a_1; a_2)) = f(a_1) \cdot f(a_2)$;
(c) si $a \vDash p$, $b \vDash q$ et $a \downarrow b$, alors $h_2(g(a; b)) = h_1(a) \cdot h_2(b)$.

Théorème 0.6. Soit F un corps algébriquement clos. Soit G un groupe connexe définissable dans F. Alors il existe un groupe algébrique H et un isomorphisme f définissables à paramètres dans F entre G et H.

De plus, si F est de caractéristique nulle, et G est définissable à paramètres dans un sous-corps k de F, alors H et f peuvent être choisis k-définissables.

Chapitre 1

Les structures géométriques

1.1 Structures géométriques, sous-structures et corps

Définition 1.1. Une structure infinie $\mathfrak{M}$ est une structure géométrique si :
(i) Dans tout modèle $\mathfrak{N}$ de $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, $\mathrm{acl}^{\mathfrak{N}}$ définit une prégéométrie.
(ii) Pour toute formule $\varphi(x;\overline{y})$ de $\mathcal{L}_M$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \overline{b} \in M$ $\varphi(\mathfrak{M};\overline{b})$ est fini ssi $|\varphi(\mathfrak{M};\overline{b})| \leqslant n$.

Remarque. :

- Du fait que acl est une prégéométrie, on peut définir une notion de dimension avec la propriété d'additivité :

$$\dim(\overline{a},\overline{b}/A) = \dim(\overline{a}/A,\overline{b}) + \dim(\overline{b}/A)$$

- On peut définir une bonne notion d'indépendance :

$$\overline{a} \downarrow_A B \text{ ssi } \dim(a/A \cup B) = \dim(a/A)$$

Lemme 1.2. *Soit $\mathfrak{M}$ une structure géométrique saturée.*
(i) Si $A \subset B \subset M$ et p un type partiel sur A alors $\dim_A(p) = \dim_B(p)$.
(ii) Soit $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ une formule. Soit $m \leqslant \lg(x)$. Il existe une formule $\delta(\bar{y})$ telle que pour tout $\bar{b}$ $\dim(\varphi(\bar{x};\bar{b})) = m$ ssi $\mathfrak{M} \vDash \delta(\bar{b})$
(iii) Soit $X_1, ..., X_k$ des sous-ensembles définissables de M^n.
$\dim(X_1 \cup ... \cup X_k) = \max(\dim X_i; i = 1, ..., n)$

Démonstration. (ii)/ On construit par récurrence la formule $\dim(\varphi(\bar{x};\bar{b})) \geq m$.
On note N_i le nombre tel que pour tout $\bar{b}$ l'ensemble

$$\exists x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \varphi(x_1; ...; x_{i-1}; \mathfrak{M}; x_{i+1}; ...; x_n; \bar{b})$$

est fini ssi son cardinal est plus petit que N_i.

- On a $\dim(\varphi(\bar{x};\bar{b})) \geq 1$ ssi $\bigvee_{1\leq i\leq n} \exists^{\geq N_i} x_i^{(l)} \bigwedge_{1\leq l\leq N_i+1} \exists x_1^{(l)} ... \exists x_{i-1}^{(l)} \exists x_{i+1}^{(l)} .... \exists x_n^{(l)} \varphi(\bar{x};\bar{b})$:

En effet, cette formule affirme qu'il y a un i tel que l'ensemble $\exists \bar{x} \varphi(x_1; ...; x_{i-1}; \mathfrak{M}; x_{i-1}; ...; x_n; \bar{b})$ est infini. Par compacité, il existe $\mathfrak{N} \geq \mathfrak{M}$ avec $(a_i^j)_{j<\aleph_1}$

dans $\mathfrak{N}$ telle que $\models \exists \bar{x}\varphi(x_1;...;x_{i-1};a_i^j;x_{i-1};...;x_n;\bar{b})$ pour tout $j < \aleph_1$. Or, le nombre de formules algébriques est dénombrable, ainsi il n'y a qu'un nombre dénombrable d'éléments algébriques. Donc il y a un a_i^j non algébrique sur $\varnothing$. Comme $\mathfrak{M}$ est saturée, le type de a_i^j est réalisé dans $\mathfrak{M}$ par a_i'. Ainsi on a bien $\bar{a}' \in M^n$ tels que $a_i' \notin \mathrm{acl}(\varnothing)$ et $\varphi(\bar{a}';\bar{b})$.

- $\dim(\varphi(\bar{x};\bar{b})) \geq m$ ssi

$$\bigvee_{1 \leq i_1,...,i_m \leq n i_k \neq i_l} \exists^{\geq N_{i_1}} x_{i_1} ... \exists^{\geq N_{i_m}} x_{i_m} \bigwedge_{1 \leq l_m \leq N_{i_1}+1} ... \bigwedge_{1 \leq l_m \leq N_{i_m}+1} \exists x_{j_1} ... \exists x_{j_{n-m}} \varphi(\bar{x};\bar{b})$$

L'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer qu'il existe (en simplifiant les notations) $a_1, ..., a_{m_1} \in M$ tels que $\dim(a_1;...;a_{m-1}) = m-1$ et
$\models \exists^{\geq N_m} x_m \bigwedge_{1 \leq l \leq N_m+1} \exists x_{m+1} ... \exists x_n \varphi(\bar{a}; x_m; ...; x_n; \bar{b})$.

Par le même raisonnement qu'à l'étape 1, il existe $a_m \notin \mathrm{acl}(a_1;....;a_{m-1})$ et $a_{m+1}, ..., a_n$ tels que $\models \varphi(\bar{a};\bar{b})$ et $\dim(\bar{a}) \geq \dim(a_1;...;a_m) = m$.

$\square$

Exemples. Les ensembles fortement minimaux et les structures o-minimales sont des structures géométriques.

Définition 1.3. *Soit $\mathfrak{M}$ une structure géométrique saturée.*
(i) On dit que $\mathfrak{M}$ a la propriété (E) si : dès que $X \subseteq M^n$ est définissable et $\dim X = m$ alors il n'existe pas de relation d'équivalence définissable E sur X avec une infinité de classes de dimension m.
(ii)On dit que $\mathfrak{M}$ a la propriété (S_1) si : dès que $X \subseteq M^n$ est définissable et $\dim X = m$ et $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ une formule, alors il n'existe pas de de suite $(\bar{b}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $\dim(X \cap \varphi(\bar{x};\bar{b}_i)) = m$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\dim(\varphi(\bar{x};\bar{b}_i) \wedge \varphi(\bar{x};\bar{b}_j)) < m$ pour $i \neq j$.

Si $\mathfrak{M}$ n'est pas saturé, il suffit qu'un modèle saturé élémentairement équivalent ait la propriété (E) ou (S_1) pour le dire de $\mathfrak{M}$.

Définition 1.4. *Soit D un ensemble fortement minimal avec l'élimination des quantificateurs dans $\mathcal{L}$. Soit F une sous-structure infinie de D.*
On dit que F est une sous-structure géométrique de D si :
(i) F est une structure géométrique.
(ii) $\mathrm{dcl}(F) = F$.
(iii) Pour toutes structures $(D_1;F_1)$ modèles de $Th(D;F)$ avec $A \subseteq F_1$ et $a \in F_1$, si $a \in \mathrm{acl}(A)$ il existe ψ définie sur A telle que $F_1 \models \psi(a)$ et $\psi(D)$ est fini.

Remarque. Cette définition permet d'avoir facilement :
- $\mathrm{acl}^{F_1}(A) = F_1 \cap \mathrm{acl}^{D_1}(A)$
- Si $X \subseteq D^n$ est un ensemble définissable à paramètres dans F, alors $X(F) = X \cap F^n$ est également définissable dans F.

Lemme 1.5. *Soit F une sous-structure géométrique de D. On suppose que D a l'élimination faible des imaginaires. Soit $A \subseteq F$ tel que $acl(A) \cap F = A$ et $\bar{a} \in F$.*

Alors $\mathrm{qftp}(\bar{a}/A)$ est stationnaire. (Il existe $A_0 \subseteq A$ fini tel que $\mathrm{qftp}(\bar{a}/A_0)$ est stationnaire et $\bar{a} \downarrow_{A_0} A$)

Démonstration. Soit V la variété affine définie sur A et dont $\bar{a}$ est un point générique. On a $A[V] \simeq A[\bar{a}] \simeq A[X]/I_V$, donc V est une variété irréductible sur A car $A[\bar{a}]$ est intègre. A est parfait, on a $A(\bar{a} \cap \mathrm{acl}(A)) = A$, donc V est une variété absolument irréductible et ainsi $\mathrm{qftp}(\bar{a}/A)$ est stationnaire. □

Définition 1.6. *Soit F un corps* ($\mathcal{L} = \{0; 1; +; \cdot; -\}$).

On dit que F est un corps géometrique si F est une sous-structure géométrique de $\tilde{F}$ où $\tilde{F}$ est la clôture algébrique de F (au sens de la théorie des corps).

Remarque. 1. $\mathrm{dcl}(F) = F$ donc F est parfait.

2. $\mathrm{acl}^F(A) = \mathrm{acl}(A) \cap F = \widetilde{k(A)} \cap F$.

Proposition 1.7 (admis)**.** Les corps suivants sont des corps géométriques :

1. Le corps des nombres réels $\mathbb{R}$;
2. Le corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$;
3. Les corps pseudo-finis.

1.2 Un théorème de configuration de groupe

Théorème 1.8. *Soit F une sous-structure géométrique d'un ensemble fortement minimal D avec l'élimination des quantificateurs.*

On suppose de plus :
(i) D a l'élimination des imaginaires.
(ii) Pour tout sous-ensemble A fini de F, et tout sous-ensemble X A-définissable de F^n, X a un point générique.
(iii) G est un groupe définissable dans F.

Alors il existe un sous-ensemble fini A de F sur lequel G est définissable, un groupe connexe H A-définissable sans quantificateur dans D et des points a, b et c dans G et a', b' et c' dans $H(F)$ tels que :
(a) $a \cdot b = c$ (dans G) et $a' \cdot b' = c'$ (dans H) ;
(b) $\mathrm{acl}(aA) = \mathrm{acl}(a'A)$, $\mathrm{acl}(b'A) = \mathrm{acl}(bA)$ et $\mathrm{acl}(c'A) = \mathrm{acl}(cA)$;
(c) a et b sont des points A-génériques de G et $a \downarrow_A b$;
(d) de même a' et b' sont des points A-générique de H et $a' \downarrow_A b'$.

Corollaire 1.9 (Applications aux corps)**.** *F désigne $\mathbb{R}, \mathbb{Q}_p$ ou un corps peudo-fini ω-saturé. Soit G un groupe définissable dans F sur A_0 fini.*

Alors il y a un sous-ensemble fini $A \supseteq A_0$ et un groupe connexe algébrique H défini sur $F(A)$ tel que il existe $a, b, c \in$G et $a', b', c' \in$H vérifiant (a), (b), (c) et (d) du théorème précédent.

Notation. On pose $\mathrm{acl}(A) = \mathrm{acl}^D(A)$ et $\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{dcl}^D(A)$.

Comme F est une sous-structure géométrique de D, on a $\mathrm{acl}^F(A) = F \cap \mathrm{acl}^D(A)$.

De plus, comme D a l'élimination des quantificateurs, $\mathrm{acl}^D(A) = \mathrm{qfacl}^D(A)$ et $\mathrm{dcl}^D(A) = \mathrm{qfdcl}^D(A) = \mathrm{qfdcl}^F(A)$.

Démonstration du théorème 1.8. Soit $A_0 \subseteq F$ fini tel que G soit défini (en tant que groupe) sur A_0, $\dim G = n$. Soit a, b A_0-indépendant et A_0- générique dans G. On pose $c = a \cdot b$. On a $\dim(a/A_0) = \dim(b/A_0) = n$ et par additivité $\dim(a, b/A_0) = 2n$ et $\dim(a, b, c/A_0) = 2n$. Dans F, on a $c \in \mathrm{dcl}^F(a, b, A_0)$ et $b \in \mathrm{dcl}^F(a, c, A_0)$

• Passage de dcl^F à dcl^D

Lemme 1.10. Il existe $A_2 \subseteq F$ fini, $A_0 \subseteq A_2$ avec $ab \downarrow_{A_0} A_2$ et il existe $a_1, b_1, c_1 \in F$ tels que $\mathrm{acl}(aA_2) = \mathrm{acl}(a_1A_2)$, $\mathrm{acl}(bA_2) = \mathrm{acl}(b_1A_2)$ et $\mathrm{acl}(cA_2) = \mathrm{acl}(c_1A_2)$ et de plus $b_1 \in \mathrm{qfdcl}(A_2a_1c_1)$ et $c_1 \in \mathrm{qfdcl}(A_2a_1b_1)$.

Démonstration. Soit $x' \in G$ générique sur $A_0 \bigcup \{a; b\}$. On pose $y' = x' \cdot b$ et $z' = x' \cdot a^{-1}$ (on a $z' \cdot c = y'$). Puisque x', y', z' sont deux à deux interdéfinissable sur $A_0 \bigcup \{a, b, c\}$, on a $\dim(y', z'/A_0, a, b, c) = \dim(z'/A_0, a, b, c) = \dim(x'/A_0, a, b, c) = \dim(x'/A_0, a, b) = n$ Donc $\dim(a, b, c, y', z'/A_0) = \dim(y', z'/A_0, a, b, c) + \dim(a, b, c/A_0) = 3n$. Comme $c \downarrow_{A_0} y'$ et $z' \in \mathrm{acl}(c, y')$, on a $\dim(a, b, c/A_0) = \dim(z', c, y'/A_0) = 2n$ $(\star)$.

Affirmation : Soit $c' \in D$ tel que $\mathrm{qftp}(c'/a, b, y', z', A_0) = \mathrm{qftp}(c/a, b, y', z', A_0)$, alors $c' \in \mathrm{acl}(c, A_0)$.

En effet : Sinon on a $\dim(c, c'/A_0) \geq n + 1$ On a $c \in \mathrm{acl}^F(A_0, a, b)$ donc $c \in \mathrm{acl}^D(A_0, a, b)$ donc $c \in \mathrm{qfacl}^D(A_0, a, b)$ donc $c' \in \mathrm{qfdcl}^D(A_0, a, b)$, donc $c' \in \mathrm{acl}^D(A_0, a, b)$. Donc $\dim(a, b, c, c'/A_0) = \dim(a, b, c/A_0) = 2n$.

$$\dim(a, b/c, c'cA_0) = \dim(a, b, c, c'/A_0) - \dim(c, c'/A_0) \leq 2n - n - 1 \leq n - 1$$

De $(\star)$, on déduit que $a, b \downarrow_{A_0,c} z', y'$, donc $y'z' \downarrow_{A_0,c} \mathrm{acl}(a, b, c, A_0)$ donc $y'z' \downarrow_{A_0,c} a, b, c'$ et $y'z' \downarrow_{A_0,c,c'} ab$.

$$\begin{aligned}\dim(a, b, z', y', c, c'/A_0) &= \dim(a, b/z', y', c, c', A_0) + \dim(z', y', c, c'/A_0)\\ &= \dim(a, b/c, c', A_0) + 2n \text{ car } ab \downarrow_{A_0,c,c'} z'y'\\ &\leq n - 1 + 2n \leq 3n - 1 \quad \text{Contradiction !}\end{aligned}$$

On a $c \in \mathrm{dcl}^F(A_0, a, b) \bigcap \mathrm{dcl}^F(A_0, y', z')$ d'où $c \in \mathrm{acl}^D(A_0, a, b, y', z')$. Soit $X = \{\gamma_1 = c; \gamma_2; ...; \gamma_r\}$ l'ensemble des conjugués de c dans D au dessus de A_0, a, b, y', z'. Par l'affirmation et l'élimination des quantificateur dans D, $X \subseteq \mathrm{acl}(cA_0)$. Comme D a l'élimination des quantificateurs, soit c_1 le paramètre canonique de X, on a $c_1 \in \mathrm{dcl}^D(a, b, z', y', A_0)$, $c_1 \mathrm{qfdcl}(a, b, z', y', A_0)$, donc $c_1 \in \mathrm{dcl}^F(a, b, z', y', A_0)$ et $c_1 \in F$.

On pose $a_1 = (a; z')$, $b_1 = (b; y')$ et $A_1 = A_0 \bigcup \{x'\}$. On a $c_1 \in \mathrm{dcl}(X)$ et $X \subseteq \mathrm{acl}(c, A_0)$ donc $c_1 \in \mathrm{acl}(c, A_1)$ et $c \in \mathrm{acl}(c_1A_1)$, d'où $\mathrm{acl}(c_1, A_1) = \mathrm{acl}(c, A_1)$. On a aussi $\mathrm{acl}(a_1A_1) = \mathrm{acl}(aA_1)$, $\mathrm{acl}(b_1A_1) = \mathrm{acl}(bA_1)$ et $c_1 \in \mathrm{qfdcl}(A_1, a_1, b_1)$ $(\star\star)$.

Soit $z_1 \in G$ générique au dessus de $A_1 \bigcup \{a; b\}$. Soit $x_1 = z_1 \cdot a$ $y_1 = z_1 \cdot c$, alors $x_1 \cdot b = y_1$. On a :

- $x_1 \downarrow_{A_0} b$, *car* : $z_1 \downarrow_{A_0} ab$ donc $z_1 \downarrow_{A_0,a} b$, $x_1 \downarrow_{A_0,a} b$ donc $x_1 \downarrow_{A_0} b$ car $b \downarrow_{A_0} a$;
- $\dim(x_1/A_1) = n$, *car* :x_1 et z_1 sont interdéfinissables sur $A_1 ab$ et $\dim(z_1/A_1 ab) = n$;
- $x_1 b \downarrow_{A_0} x'$, *car* : $b \downarrow_{A_0} x'$ et $\dim(x_1/A_1 b) = \dim(x_1/A_0)$ ce qui donne $x_1 \downarrow_{A_0,b} x'$.

En utilisant le même raisonnement, on peut trouver x_2, y_2 et b_2 dans F tels que $\mathrm{acl}(x_1, A_1) = \mathrm{acl}(x_2, A_1)$, $\mathrm{acl}(y_1 A_1) = \mathrm{acl}(y_2 A_1)$, $\mathrm{acl}(b A_1) = \mathrm{acl}(b_2 A_1)$ et $y_2 \in \mathrm{qfdcl}(x_2, b_2, A_1)$ $(\star\star\star)$. Comme $\mathrm{acl}(b, A_1) = \mathrm{acl}(b_1, A_1)$ on peut supposer que b_2 contient b_1. On a $\dim(a_1, b_2, c_1, x_2, y_2/A_1) = 3n$ et $\dim(x_2, y_2, b_2/A_1) = \dim(a_1, c_1, b_2/A_1) = 2n$.

Soit b_2' vérifiant le même type sans quantificateur de b_2 au dessus de $A_1 \bigcup \{a_1, c_1, x_2, y_2\}$, par le même raisonnement que dans l'affirmation, on trouve que $b_2' \in \mathrm{acl}(A_1, b_2)$. On pose $A_2 = A_1 \bigcup \{z_1\}$ donc b_2 et b_2' ont le même type sans quatificateurs au dessus de $A_2 \bigcup \{a_1, c_1, x_2, y_2\}$ et $b_2' \in \mathrm{acl}(A_2, b_2)$. Soit b_3 le paramètre canonique de l'ensemble fini des conjugés de b_2 dans D au dessus de $A_1 \bigcup \{a_1, c_1, x_2, y_2\}$ alors $b_3 \in \mathrm{qfdcl}(A_2 \bigcup \{a_1, c_1, x_2, y_2\}$ On a par $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$ $y_2, c_1 \in \mathrm{qfdcl}(A_2 \bigcup \{a_1, x_2, b_2\})$ Donc il existe f, g deux fonctions définissables sans quantificateur à paramètres dans $A_2 \cup \{a_1; x_2\}$ tel que $y_2 = f(b_2)$ et $c_1 = g(b_2)$. Comme b_2' satisfait le même type sans quantificateur que b_2 au dessus de $A_2 \cup \{a_1; x_2; y_2; c_1\}$ alors, on a aussi $y_2 = f(b_2')$ et $c_1 = g(b_2')$. On en déduit finalement $y_2, c_1 \in \mathrm{qfdcl}(A_2 \cup \{a_1; a_2; b_3\})$.

On renomme $(a_1; x_2)$ comme a_1, $(y_2; c_1)$ comme c_1 et b_3 en b_1, ce qui prouve le lemme. $\square$

On pose $A = \mathrm{acl}(A_2) \cap F$.

Lemme 1.11. Les types $\mathrm{qftp}(a_1; b_2; c_1/A)$ et $\mathrm{qftp}(b_1, c_1 : A, a_1)$ sont stationnaires.

Démonstration. Par le lemme 1.5, comme A est algébriquement clos dans F, $\mathrm{qftp}(a_1, b_1, c_1/A)$ est stationnaire, et $\mathrm{qftp}(b_1/A)$ est stationnaire. Comme $b_1 \downarrow_A a_1$ alors $\mathrm{qftp}(b_1/A, a_1)$ est également stationnaire (toute extension non déviante de $\mathrm{qftp}(b_1/A, a_1)$ est une extension non déviante de $\mathrm{qftp}(b_1/A)$). Enfin $\mathrm{qftp}(b_1, c_1/A, a_1)$ stationnaire car $c_1 \in \mathrm{qfdcl}(A, a_1, b_1)$. $\square$

• **Définitions de germes** On peut maintenant considérer σ dans D, la base canonique de $\mathrm{qftp}(b_1, c_1/A, a_1)$, on a $\sigma \in \mathrm{qfdcl}(A, a_1)$ donc $\sigma \in F$. On pose :

$$r = \mathrm{qftp}(\sigma/A) \quad q_1 = \mathrm{qftp}(b_1/A) \quad q_2 = \mathrm{qftp}(c_1/A)$$

On a $\dim q_1 = \dim q_2 = n$.

Lemme 1.12. Le type r est stationnaire et $\dim r = n$.

De plus, $\sigma \downarrow_A b_1$, $\sigma \downarrow_A c_1$ et $c_1 \in \mathrm{qfdcl}(A; \sigma; b_1)$, $b_1 \in \mathrm{qfdcl}(A; \sigma; c_1)$.

Démonstration. Par le lemme 1.5, r est stationnaire. a_1, b_1 et C_1 sont deux à deux A-indépendants. Comme $\sigma \in \mathrm{acl}(A, a_1)$, on a $\dim r \leq \dim(a_1/A) = n$. De plus σ est A-indépendant de b_1 et de c_1 car a_1 l'est. Du fait que $c_1 \in qfdcl(A; a_1; b_1)$ et

$b_1 \in \mathrm{qfdcl}(A; a_1; c_1)$, comme σ est une base canonique de $\mathrm{qftp}(b_1; c_1/A, a_1)$, alors $c_1 \in \mathrm{qfdcl}(A, \sigma, b_1)$ et $b_1 \in \mathrm{qfdcl}(A, \sigma, c_1)$. En particulier, $n = \dim(c_1/A, b_1) \leq \dim(\sigma/A, b_1) \leq \dim(\sigma/A)$, donc $\dim r = n$. □

r va être le type d'un germe inversible qui envoie génériquement q_1 sur q_2. C'est-à-dire il existe une fonction A-définissable partiel μ telle que $c_1 = \mu(\sigma; b_1)$, on note $c_1 = \sigma \cdot b_1$. De plus, si $\sigma' \models r$ et $b_1' \models q_1$ avec $\sigma' \downarrow_A b_1'$, alors $\mu(\sigma'; b_1') = \sigma' \cdot b_1'$ est bien définie, réalise q_2 et est indépendant de σ' et de b_1'. En effet : comme $\sigma' \equiv_A \sigma$, $b_1' \equiv_A b_1$ et $\sigma' \downarrow_A b_1'$ et $\sigma \downarrow_A b_1$, alors par le lemme 0.1 $\mathrm{tp}(\sigma'; b_1'/A) = \mathrm{tp}(\sigma; b_1/A)$.

De même, il existe une fonction partiel A-définissable ν telle que $\nu(\sigma; c_1) = b_1$ noté $\sigma^{-1} \cdot c_1$ et telle que pour σ' et c_1' des réalisations indépendantes de r et de q_2 respectivement et $(\sigma')^{-1} \cdot c_1'$ réalise q_1 et $\sigma \cdot ((\sigma')^{-1} \cdot c_1) = c_1$.

Lemme 1.13. Soit σ_1, σ_2 des réalisations de r et b' une réalisation de q_1 avec $b' \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$.

Si $\sigma_1 \cdot b' = \sigma_2 \cdot b'$ alors $\sigma_1 = \sigma_2$.

Démonstration. Montrons que σ_1 est la base canonique de $p = \mathrm{qftp}(b', c'/A\sigma_1, \sigma_2)$ Soit $s \in A$, et $\psi(x; y; s)$ une formule :

$$\begin{aligned} \psi(x; y; s) \in p \text{ ssi } &\models \psi(b', c'; s) \text{ ssi } \models \psi(b_1; c_1; s) \text{ ssi } \psi(x; y; s) \in \mathrm{qftp}(b_1; c_1/A) \\ &\text{ssi } \models d\psi(s; \sigma) \text{ ssi } \models d\psi(s; \sigma_1) \end{aligned}$$

donc $\mathrm{qftp}(b', c'/A, \sigma_1)$ est bien définissable sur σ_1, on a $b', c' \downarrow_{A,\sigma_1} \sigma_2$ aussi $\mathrm{qftp}(b', c'/A\sigma_1, \sigma_2)$ est également définissable sur σ_1. Il vient que σ_1 est une base canonique de $\mathrm{qftp}(b', c'/A, \sigma_1, \sigma_2)$, il en est de même pour σ_2. Donc $\sigma_1 = \sigma_2$. □

• **Construction d'un germe d'une fonction inversible de q_1 dans q_1** Soit σ_1, σ_2 des réalisations A-indépendantes de r. (On peut choisir σ_1, σ_2 dans F.) Soit b_2 une réalisation de q_1 indépendantes de σ_1,σ_2 au dessus de A. Ainsi $\sigma_1 \cdot b_2$ réalise q_2 et est indeépendante de σ_2 (car $b_2 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$, $b_2 \downarrow_{A,\sigma_1} \sigma_2$, d'où $\sigma_1 \cdot b_2 \downarrow_{A,\sigma_1} \sigma_2$ et $\sigma_1 \cdot b_2 \downarrow_A \sigma_2$ car $\sigma_2 \downarrow_A \sigma_1$). Aussi $\sigma_2^{-1} \cdot (\sigma_1 \cdot b_2) = b_3$ réalise q_1.

$\sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1$ est le germe d'une fonction inversible de q_1 dans q_2.

Lemme 1.14. $b_3 \in \mathrm{qfdcl}(A, \sigma_1, \sigma_2, b_2)$ et $b_3 \in \mathrm{qfdcl}(A, \sigma_1, \sigma_2, b_2)$. On a $b_2 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$ et $b_3 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$. De plus $\mathrm{qftp}(b_2, b_3/A, \sigma_1, \sigma_2)$ est stationnaire.

Démonstration. On a, par la construction des germes, $b_3 \in \mathrm{qfdcl}(A, \sigma_1, \sigma_2, b_2)$ et $b_2 : in\mathrm{qfdcl}(A, \sigma_1, \sigma_2, b_3)$. Comme $b_2 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$, on en déduit que $\sigma_1 \cdot b_2 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$, il vient alors que $\sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1 \cdot b_2 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$ i.e. $b_3 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$. En faisant la même démonstration pour le lemme 1.11, on obtient que le type $\mathrm{qftp}(b_2, b_3/A, \sigma_1, \sigma_2)$ est stationnaire. □

On appelle τ la base canonique de $\mathrm{qftp}(b_2, b_3/A, \sigma_1, \sigma_2)$ dans D, comme en 1.12 $b_3 \in \mathrm{qftp}(A; \tau; b_2)$ et $b_3 \in /qftp(A; \tau; b_3)$. On note $s = \mathrm{qftp}(\tau/A)$. s est stationnaire, et on peut voir τ comme le germe d'une fonction inversible de q_1 dans lui-même. On écrit $\tau \cdot b_2 = b_3$ et $\tau^{-1} \cdot b_3 = b_2$.

On a l'analogue du lemme 1.13 :

Lemme 1.15. Si $\tau \cdot b' = b''$ et $\tau' \cdot b' = b''$ avec $b' \downarrow_A \tau, \tau'$, alors $\tau = \tau'$.

On peut donc écrire $\tau = \sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1$. Ainsi, $\tau \in \mathrm{qfdcl}(\sigma_1, \sigma_2, A)$, $\sigma_1 \in \mathrm{qfdcl}(\tau, \sigma_2, A)$ et $\sigma_2 \in \mathrm{qfdcl}(\tau, \sigma_1, A)$. Il vient que τ est indépendant de b_2 et de b_3 au dessus de A. On note $\tau \cdot b_2 = b_3$ et $\tau^{-1} \cdot b_3 = b_2$.

Lemme 1.16. $\dim s = n$, et τ est indépendant de σ_1 et de σ_2 au dessus de A.

Démonstration. On pose $\sigma_1 \cdot b_2 = c_2$ et donc $\sigma_2 \cdot b_3 = c_2$. Comme $b_2 \downarrow_A \sigma_1, \sigma_2$, il vient que $b_2 \downarrow_A b_3$ et $c_2 \downarrow b_2, b_3$. On a aussi $\tau \downarrow_A b_2$. τ et b_3 sont inter-définissables au dessus de $A \cup \{b_2\}$, ainsi :

$$\dim(\tau/A) = \dim(\tau/A, b_2) = \dim(b_3/A, b_2) = \dim(b_3/A) = n$$

donc $\dim s = n$. On a aussi σ_1 et c sont inter-définissables au dessus de $A \cup \{b_2\}$, donc :

$$\dim(\sigma_1/A, b_2, b_3) = \dim(c/A, b_2, b_3) = \dim(c/A) = n$$

Donc $\sigma_1 \downarrow_A b_2, b_3$ et $\sigma_1 \downarrow_A \tau$. On a de même $\sigma_2 \downarrow_A \tau$. □

• Application du théorème 0.5 et conclusion

Lemme 1.17. Il existe une fonction f définissable (sans quantificateur) dans D à paramètres dans A, telle que :
(i) si τ_1 et τ_2 sont des réalisations indépendantes de s, alors $f(\tau_1; \tau_2)$ réalise s et est indépendante de τ_1 et de τ_2 au dessus de A ;
(ii) si, de plus, b' réalise q_1 et $b' \downarrow_A \tau_1, \tau_2$ alors $f(\tau_1; \tau_2) \cdot b' = \tau_1 \cdot (\tau_2 \cdot b')$.

Démonstration. Soit τ_1 et τ_2 des réalisations indépendantes de s et b' une réalisation de q_1 tel que $b' \downarrow_A \tau_1, \tau_2$. Soit maintenant σ_2' une réalisation de r telque $\sigma_2' \downarrow \tau_1, \tau_2, b'$. Alors par le lemme 0.1, on a $\mathrm{qftp}(\sigma_1; \tau/A) = \mathrm{qftp}(\sigma_2'; \tau_1/A)$ et $\mathrm{qftp}(\sigma_1; \tau/A) = \mathrm{qftp}(\sigma_2'; \tau_2/A)$. Ainsi il existe σ_1' et σ_3' des réalisations de r tels que $\tau_1 = (\sigma_1')^{-1} \cdot \sigma_2'$ et $\tau_2 = (\sigma_2')^{-1} \cdot \sigma_3$. On a que $\tau_2 \cdot b' \models q_1$ et $\tau_2 \cdot b' \downarrow_A \tau_1$, ainsi $c' = \tau_1 \cdot (\tau_2 \cdot b')$ est bien défini. Il vient que $\sigma_1 \downarrow_A \sigma_3$, on a aussi $b' \downarrow_A \sigma_1, \sigma_3$. Si on pose $\tau_3 = (\sigma_1')^{-1} \cdot \sigma_3'$, alors τ_3 réalise s et clairement τ_3 est la base canonique de $\mathrm{qftp}(b', c'/A_1, \tau_1, \tau_2)$. Aussi $\tau_3 \cdot b' = c'$ et il existe une fonction A-définissable (sans quantificateur) f tel que $f(\tau_1; \tau_2) = \tau_3$. Le lemme est ainsi prouvé. □

On va maintenant appliquer le théorème 0.5où f va être la fonction définie par le lemme 1.17 et la fonction g est donnée par $(\tau; b) \longrightarrow \tau \cdot b$. Il reste à vérifier l'hypothèse (iii).

Prenons τ_1, τ_2 et τ_3 des réalisations indépendantes de s et b une réalisation de q_1 vérifiant $b \downarrow_A \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Par 1.17, il est clair que $\tau_1 \cdot (\tau_2(\tau_3 \cdot b)) = f(\tau_1; f(\tau_2; \tau_3)) \cdot b = f(f(\tau_1; \tau_2); \tau_3) \cdot b$. Alors par 1.13

On peut maintenant appliquer le théorème 0.5. Soit h et X et h_1 et h_2 donnés. On peut supposer que h_1 et h_2 sont toutes deux l'identité. On a ainsi que s est le type générique de H et q_1 celui de X. Si τ_1 et τ_2 sont des réalisations indépendantes de s, alors $\tau_1 \cdot \tau_2$ dans le groupe H est donnée par $f(\tau_1;\tau_2)$, de plus pour $\tau \vDash s$ et $b \vDash q_1$ avec $\tau \downarrow_A b$ l'application $(\tau;b) \longrightarrow b$ définit bien l'action du groupe H sur X.

On considère les éléments σ, b_1 et c_1 introduit précédemment . Soit $\sigma_1 \in F$ tel que $\sigma_1 \vDash r$ et $\sigma_1 \downarrow_A \sigma, b_1, c_1$, on a $c_2 = \sigma_1^{-1} \cdot c_1$ est dans F, réalise q_1 et est indépendant de σ_1 au dessus de A. On a aussi $\tau = \sigma_1^{-1} \cdot \sigma$ est dans $H(F)$ et réalise s de plus, $\tau \downarrow_A \sigma_1$. On pose $A_1 = \mathrm{acl}(A;\sigma - 1) \cap F$, alors :

$$\dim(a,b,c/A_1) = 2n, \quad \mathrm{acl}(A_1;\tau) = \mathrm{acl}(A_1;a) \quad et \quad \mathrm{acl}(A_1;c_2) = \mathrm{acl}(A_1;c)$$

Soit maintenant $\tau_1 \in F$ tel que $\tau_1 \vDash s$ et $\tau_1 \downarrow_{A_1} \tau, b_1, c_2$. Posons $\tau_2 = \tau \cdot \tau_1$ et $b_2 = \tau_1^{-1} \cdot b_1$, alors $\tau_2 \cdot b_2 = c_2$, on peut voir que $b_2 \downarrow \tau, \tau_2, b_1$. On pose $A_2 = \mathrm{acl}(A_1;b_2) \cap F$, alors :

$$\begin{aligned}&\dim(a,b,c/A_2) = 2n, \quad \mathrm{acl}(A_2;a) = \mathrm{acl}(A_2;\tau), \quad \mathrm{acl}(A_2;b) = \mathrm{acl}(A_2;\tau_1),\\ &\mathrm{acl}(A_2,c) = \mathrm{acl}(A_2;\tau_2) \quad et \quad \tau \cdot \tau_1 = \tau_2\end{aligned}$$

On renome τ, τ_1 et τ_2 en a', b' et c' respectivement, ce qui termine la démonstration.

$\square$

Chapitre 2

Les groupes définissables dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{Q}_p$

2.1 Propriétés de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{Q}_p$

Fait 2.1. Dans le langage $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \cdot, <\}$, $\mathbb{R}$ admet l'élimination des quantificateurs.

Dans le langage $\mathcal{L}_{Mac} = \{0, 1, +, -, \cdot, div, P_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ (où $P_n(x) \longleftrightarrow \exists y\ y^n = x \wedge y \neq 0$), $\mathbb{Q}_p$ admet l'élimination des quantificateurs.

Fait 2.2. Dans $\mathbb{R}^n$ les ensembles définissables sont de la forme :

$$\{(x_1; ...; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x_1; ...; x_n) = 0 \wedge ... \wedge f_k(x_1; ...; x_n) = 0 \wedge g_1(x_1; ....; x_n) < 0 \wedge .... \wedge g_l(x_1; ...; x_n) < 0\}$$

où les fonctions $f_1, ..., f_k, g_1, ..., g_l$ sont des polynômes.

Les ensembles définissables dans les corps réel et p-adiques sont souvent appelé semi-algébriques.

Fait 2.3. *F désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$.*

(i) Soit X un ensemble définissable de F^n et soit $f : X \longrightarrow F$ une fonction définissable. Alors il existe un ouvert Y définissable dense dans X tel que $f \upharpoonright Y$ soit analytique.

(ii) Soit k un sous-corps de F, alors $\mathrm{acl}(k) = \mathrm{dcl}(k)$.

Fait 2.4.
1. $\mathbb{R}$ a la propriété (E) mais pas (S_1).
2. $\mathbb{Q}_p$ n'a pas la propriété (E).

Fait 2.5. *F désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Soit A un sous-ensemble dénombrable de F, soit X un sous-ensemble A-définissable de F^n.*

Alors X contient un point générique au dessus de A, c'est à dire il existe $\bar{a} \in X$ tel que $\dim(\bar{a}/A) = \dim(X)$.

Lemme 2.6. *F désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Soit X un sous-ensemble A-définissable de F^n et $\bar{a} \in X$ tel que* $\dim(a/A) = n$.

Si $\varphi(\bar{x})$ est une A-formule tel que $\vDash \varphi(\bar{a})$ alors il existe un voisinage ouvert définissable U de $\bar{a}$ dans X tel que $\varphi(\bar{x})$ est vérifiée pour tous les éléments de U.

Démonstration. • sur $\mathbb{R}$, par l'élimination des quantificateurs , le type $\bar{a}$ est déterminé par les formules atomiques qui sont de la forme :

$$f(\bar{a}) = 0 \quad \text{ou} \quad f(\bar{a}) < 0 \quad \text{ou} \quad f(\bar{a}) \neq 0$$

où f est polynomiale. Comme $\bar{a}$ est un uple de n éléments indépendants, on ne peut pas avoir $f(\bar{a}) = 0$ pour aucun polynôme.

Ainsi les seules formules atomiques vérifiées par $\bar{a}$ définissent des ouverts car f est continue. Ainsi toute formule $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ est impliquée par une combinaison booléenne positive de formules qui définissent des ouverts. Donc il existe un voisinage de $\bar{a}$ ouvert telle que $\psi(\bar{x})$ est vérifié dans ce voisinage.

• sur $\mathbb{Q}_p$, on procède de même : on a, en effet, par l'élimination des quantificateurs, que le type de $\bar{a}$ est déterminé par des formules atomiques de la forme :

$$f(\bar{x}) \neq 0 \;\; \text{ou} \;\; v(f(\bar{x})) = v(g(\bar{x})) \;\; \text{ou} \;\; v(f(\bar{x})) < v(g(\bar{x})) \;\; \text{ou} \;\; P_n(f(\bar{x}))$$

où f et g sont des fonctions polynomiales.

Ces formules définissent des ouverts (y compris $P_n(f(\bar{x}))$ par le lemme de Hensel). En utilisant le même raisonnement, on termine la preuve. □

2.2 Variétés et groupes de Nash

Définition 2.7. Une fonction de Nash est une fonction définissable dans le langage des corps, analytique d'un ouvert définissable X de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.8. .

1. Une variété réelle de Nash de dimension n est un objet $(X; V_1; V_2; ...; V_k; f_1; ...; f_k)$ vérifiant :

(i) X est un espace topologique séparé ;

(ii) Les V_i sont des ouverts de X, et $X = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$;

(iii) f_i est un homéomorphisme de V_i sur U_i de $\mathbb{R}^n$ ouvert définissable ;

(iv) Pour tout i, j, l'homéomorphisme induit par $f_i \circ f_j^{-1}$ de $f_j(V_i \cap V_j) \subseteq U_j$ vers $f_i(V_i \cap V_j) \subseteq U_i$ est une fonction de Nash (définissable et analytique).

2. Une application de Nash entre deux variétés de Nash $(X; V_1; ...; V_k; f_1; ...; f_k)$ et $(Y; W_1; ...; W_m; g_1; ...; g_m)$ est une application $h : X \longrightarrow Y$ continue telle que

(i) pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant m$ on a $U_{i,j} = f_i(f^{-1}(W_i) \cap V_j)$ est un ouvert définissable de U_i ;

(ii) $g_j \circ h \circ f_i^{-1} \restriction_{U_{i,j}}$ est une fonction de Nash.

3. Une variété de Nash est dite affine si il y a un plongement de Nash de X dans un certain $\mathbb{R}^m$.

Remarque.
- Si f est un plongement de Nash de X dans$Y$, on dit que $f(X)$ est une sous-variété de Nash.
- Si X et Y sont des variétés de Nash, alors $X \times Y$ a une structure de variété de Nash.

Définition 2.9. Une groupe de Nash réel est une variété de Nash équipée d'une structure de groupe tel que $\cdot$ et $^{-1}$ sont des applications de Nash.

Remarque. Toute variété de Nash est naturellement interprétable dans $\mathbb{R}$, donc définissable par l'élimination des imaginaires.

Pillay a démontré que tout groupe définissable dans $\mathbb{R}$ est définissablement isomorphe à un groupe de Nash.

Fait 2.10. Si G est groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, alors $G(\mathbb{R})$ est un groupe de Nash.

On peut également définir les mêmes objets et avoir les mêmes propriétés avec $\mathbb{Q}_p$.

2.3 Propriété des groupes définissables

Théorème 2.11. *F désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$. Soit G un groupe de Nash sur F.*

Alors il y a un groupe algébrique H défini sur F et un isomorphisme entre un voisinage de l'élément neutre de G et un voisinage de celui de H(F).

Démonstration. G est un groupe définissable sur F.

Par le Théorème 1.8, on a un groupe H connexe définissable sans quantificateur, avec $a, b, c \in G$ et $a', b', c' \in H$ tels que :
(a) $a \cdot b = c$ (dans G) et $a' \cdot b' = c'$ (dans H) ;
(b) $\operatorname{acl}(aA) = \operatorname{acl}(a'A)$, $\operatorname{acl}(bA) = \operatorname{acl}(b'A)$ et $\operatorname{acl}(cA) = \operatorname{acl}(c'A)$;
(c) a et b sont génériques et $a \downarrow_A b$;
(d) a' et b' sont génériques et $a' \downarrow_A b'$.

Soit $k = F_0(A)$ le sous-corps de F engendré par A. Par le théorème de Weil, on peut supposer que H est un groupe algébrique défini sur k. Par le Fait 2.10, $H(F)$ est aussi un groupe de Nash.

Par le Fait 2.3 a et a' sont interdéfinissables sur k, ainsi que b, b' et c, c'.

Lemme 2.12. Il y a des voisinages k-définissables U,V et W dans G de a,b et c respectivement et U',V' et W' dans $H(F)$ de a', b', c' et des fonctions k-définissables f, g et h tels que :
(i) $f(a) = a'$ et f est un Nash-homéomorphisme de U dans U'
$g(b) = b'$ et g est un Nash-homéomorphisme de V dans V'
$h(c) = c'$ et h est un Nash-homéomorphisme de W dans W'
(ii) $\forall a'' \in U$, $\forall b'' \in V$ $f(a'') \cdot g(b'') = h(a'' \cdot b'')$
(iii) $\forall x, z \in U$ $x^{-1} \cdot c \in V$ et $z \cdot x^{-1} \cdot c \in W$

Démonstration. (i)/ Comme a et a' sont interdéfinissables, il existe $\varphi(x;y)$ dans $\mathcal{L}_k$ telle que $F \models \varphi(a;a')$ et $F \models \exists! x' \varphi(a;x') \wedge \exists! x \varphi(x;a')$.

Comme $\dim(a/k) = \dim(a'/k) = n$, par le Lemme 2.6, il existe un voisinage U_1 de a dans G et U_2 de a' dans H, tels que pour tout $x \in U_1$ on a $F \models \exists! x' \varphi(x;x')$, et de même pour $x \in U_2$ $F \models \exists! x \varphi(x;x')$.

On obtient ainsi deux fonctions k-définissables $f : U_1 \longrightarrow F^n$ et $f^{-1} : U_2 \longrightarrow F^n$ et telles que $f(x)$ est l'unique y qui vérifie $\models \varphi(x;y)$. Par le Fait 2.3 il existe un ouvert dense U_3 de U_1 k-définissable tel que $f \restriction_{U_3}$ est analytique. Par le Lemme 2.6 , $a \in U_3$. De même, il existe U_4 ouvert dense de U_2 k-définissable tel que $f^{-1} \restriction_{U_3}$ analytique et $a' \in U_4$.

On a ainsi un ouvert $U \ni a$ sur lequel f est un Nash-homéomorphisme dans un voisinage U' de a' tel que $f(a) = a'$. Par le même raisonnement, on trouve V, V' et W, W'.

(ii)/ Comme $\dim(a,b/k) = 2n$ et $f(a) \cdot g(b) = h(a \cdot b)$ alors il existe un voisinage Z de (a,b) dans F^{2n} tel que pour tout $(x,y) \in Z$ $f(x) \cdot g(y) = h(x \cdot y)$. On peut rétrécir U,V tels que $U \times V \subseteq Z$.

(iii)/ On peut rétrécir U, V tels que $U \cdot V \subseteq W$ (dans G)et $U^{-1} \cdot c \subseteq V$.

□

Lemme 2.13. L'application $\chi : U^{-1} \cdot a \longrightarrow (U')^{-1} \cdot a'$ défini par $\chi(x^{-1} \cdot a) = f(x)^{-1} \cdot a'$ est un isomorphisme local entre un voisinage de l'identité dans G et un voisinage de l'identité dans H(F).

Démonstration. On sait déjà que χ est un Nash-homéomorphisme entre $U^{-1} \cdot a$ et $(U')^{-1} \cdot a'$. il reste à montrer que $\chi(x \cdot y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$ pour tout $x, y \in U^{-1} \cdot a$ qui vérifient $x \cdot y \in U^{-1} \cdot a$.

On pose $x = x'^{-1} \cdot a$ et $y = y'^{-1} \cdot a$. Il existe z tel que $x'^{-1} \cdot a \cdot y'^{-1} \cdot a = z^{-1} \cdot a$, c'est-à-dire $a = x' \cdot z^{-1} \cdot y'$.

On pose $b_1 = x'^{-1} \cdot c$ et $c_1 = z \cdot b_1$. Par le Lemme 2.12(iii) $b_1 \in V$ et $c_1 \in W$.
On a $y' \cdot b = y' \cdot a^{-1} \cdot a \cdot b = y' \cdot a^{-1} \cdot c = y' \cdot y'^{-1} \cdot z \cdot x'^{-1} \cdot c = c_1$. Par le Lemme 2.12 (ii)
$f(y) \cdot g(b) = h(c_1)$
$f(z) \cdot g(b_1) = h(c_1)$
$f(x) \cdot g(b_1) = h(c)$

$$\begin{aligned} f(x') \cdot f(z)^{-1} \cdot f(y') \cdot g(b) &= f(x') \cdot f(z)^{-1} \cdot h(c_1) \\ &= f(x') \cdot g(b_1) \\ &= h(c) \\ &= f(a) \cdot g(b) \end{aligned}$$

D'où $f(x') \cdot f(z)^{-1} \cdot f(y') = f(a)$, et

$$\begin{aligned}
\chi(x) \cdot \chi(y) &= \chi(x'^{-1} \cdot a) \cdot \chi(y'^{-1} \cdot a) \\
&= f(x')^{-1} \cdot f(a) \cdot f(y')^{-1} \cdot f(a) \\
&= f(z)^{-1} \cdot f(a) \\
&= \chi(z^{-1} \cdot a) \\
\chi(x) \cdot \chi(y) &= \chi(x \cdot y)
\end{aligned}$$

□

□

Remarque. Dans le théorème 2.11, on ne peut pas faire mieux qu'un isomorphisme local.

Considérons, en effet, dans $\mathbb{R}$ le groupe de l'addition modulo $\mathbb{Z}$ c'est un groupe de Nash, définissable dans $\mathbb{R}$, mais il n'admet pas de fonction de Nash non constante dans $\mathbb{R}$, alors que toute partie rationelle d'un groupe algébrique admet un plongement de Nash dans $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 3

Les groupes définissables dans les corps pseudo-finis

3.1 Définition et propriétés des corps pseudo-finis

Définition 3.1. *Soit F un corps.*

On dit que F est un corps pseudo-fini s'il vérifie les axiomes suivants :

- F est un corps parfait ;
- F a exactement une extension algébrique de degrès n pour tout n ;
- F est pseudo-algébriquement clos : i.e. toute F-variété absolument irréductible possède un point rationnel.

Remarque. La théorie des corps pseudo finis est l'ensemble des énoncés qui sont vrais dans tous les corps $\mathbb{F}_q$ pour q assez grand.

Fait 3.2. *Soit F_1 et F_2 deux corps pseudo-finis, et $E \subseteq F_1 \cap F_2$ un sous-corps.*

Alors $F_1 \equiv_E F_2$ ssi il existe un E-isomorphisme entre $\tilde{E} \cap F_1$ et $\tilde{E} \cap F_2$.

Fait 3.3. *Soit F un corps pseudo-fini, et E un sous-sorps de F, $a \in F$.*

$\mathrm{tp}^F(a/E)$ est déterminé par des conjonctions de $\exists t f(\bar{a};t) = 0$ et de $\forall t f(\bar{a};t) \neq 0$, où $f \in E[\bar{X};T]$.

Fait 3.4. *Soit F un corps pseudo-fini.*

Tout ensemble définissable $X \subseteq F^n$ peut s'écrire $\pi(W)$ où $W \subseteq F^{n+m}$ est défini par des équations et $\pi \restriction_W$ est à fibres finies.

Fait 3.5. Les corps pseudo-finis sont des corps géométriques avec la propriété (S_1).

3.2 Stabilité locale

3.2.1 Formules stables

Vocabulaire. Soit $\delta(x;y)$ une $\mathcal{L}$-formule.

– une instance de δ est une formule de la forme : $\delta(x;a)$ avec $a \in M$;
– une δ-formule est une combinaison booléenne d'instances de δ ;
– une $\delta - A$–formule est une δ-formule à paramètres dans A ;
– un δ-type complet sur A est un ensemble maximal et consistent de $\delta - A$–formules, on note $S_\delta(A)$ l'ensemble des δ-types sur A ;
– si $p \in S(A)$, on note $p|\delta$ l'ensemble des δ-formules de p.

Remarque. Si $p \in S_\delta(M)$ où M est un modèle, p est déterminé par l'ensemble des instances de δ et $\neg\delta$ qui sont dans p.

Définition 3.6. *Soit $p \in S_\delta(M)$.*

On dit que p est définissable s'il existe une formule $\varepsilon(y)$ à paramètres dans M telle que :

$$\forall a \in M \qquad \delta(x;a) \in p \text{ ssi } \models \varepsilon(a)$$

Une telle formule (si elle existe) est unique (à équivalence près).

Si $p = q|\delta$ où $q \in S(M)$, ε est la δ-définition de q.

Définition 3.7. La formule $\delta(x;y)$ est dite stable s'il n'existe pas de suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans M, tel que $\models \delta(a_i;b_i)$ ssi $i < j$ pour tout i et j.

La théorie T est dite stable si toute formule $\varphi(x;y)$ de $\mathcal{L}$ est stable.

Remarque.
1. Si $\delta(x;y)$ est stable alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'existe pas de suite finie $(a_i)_{i<n}$ et $(b_i)_{i<n}$ telles que $\models \delta(a_i;b_i)$ ssi $i < j$ (pour $i, j < n$).
2. Si $\delta(x;y)$ est stable, alors $\delta'(y;x) = \delta(x;y)$ l'est aussi.
3. Si $\delta_1(x;y_1)$ et $\delta_2(x;y_2)$ sont stables et si $\delta_3(x;(y_1;y_2))$ est une combinaison booléenne de δ_1 et δ_2, alors δ_3 est stable.

Proposition 3.8. $\delta(x;y)$ *est stable. Soit* $p(x) \in S(M)$.
(i) $p|\delta$ est définissable.
(ii) Il y a $c_1, ..., c_k$ dans M tel que la δ-définition de p est équivalente à une combinaison booléenne positive de $\delta(c_i;y)$.
(iii) Si $A \subseteq M$ et si $\mathfrak{M}$ est $|A|^+$-saturé, alors les éléments $c_1, ..., c_k$ peuvent être choisis tels que $c_i \models p|A \bigcup \{c_1; ...; c_{i-1}\}$.

Démonstration. .

0. Par la remarque précédente, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
(i) $\nexists c_i, a_i (i \leqslant N)$ tels que $\models \delta(c_i;a_j)$ ssi $i < j$
(ii) $\nexists c_i, b_i (i \leqslant N)$ tels que $\models \neg\delta(c_i;b_j)$ ssi $i < j$

Soit $\mathfrak{N} \succcurlyeq \mathfrak{M}$, et soit c* une réalisation de $p(x)$ dans $\mathfrak{N}$. On peut supposer qu'il existe d, e dans $\mathfrak{M}$ tels que $\models \delta(c*;d) \wedge \neg\delta(c*;e)$.

1. On va construire par récurrence :
– une suite d'éléments $c_0, c_1, ..., c_i, ...$ de M ;
– des ensembles $K(i), L(i) \subseteq \mathcal{P}(\{0; ...; i-1\})$;
– des éléments a^s et b^t dans M pour chaque $s \in K(i)$ et $t \in L(i)$.

• On choisit c_0 arbitraire dans M. On pose $L(0) = K(0) = \{\varnothing\}$.

• On suppose construits $c_0, c_1, ..., c_n$, $K(0), ..., K(n)$, $L(0), ..., L(n)$ et a_i^s, b_i^t pour $s \in K(i)$ et $t \in L(i)$ $(i \leqslant n)$.

$K(n+1) = \{W \subseteq \{0; ...; n\} | \exists a \in M \quad \forall j \in W \quad \vDash \delta(c_j; a) \text{ et } \vDash \neg\delta(c*; a)\}$
On pose pour $W \in K(n+1)$, a_{n+1}^W un témoin, i.e.. $\forall j \in W \quad \vDash \delta(c_j; a_{n+1}^W)$ et $\vDash \neg\delta(c*; a_{n+1}^W)$.

$L(n+1) = \{W \subseteq \{0; ...; n\} | \exists b \in M \quad \forall j \in W \quad \vDash \neg\delta(c_j; b) \text{ et } \vDash \delta(c*; b)\}$
On pose pour $W \in L(n+1)$, b_{n+1}^W un témoin, i.e.. $\forall j \in W \quad \vDash \neg\delta(c_j; b_{n+1}^W)$ et $\vDash \delta(c*; b_{n+1}^W)$.

On remarque que $K(n) \subseteq K(n+1)$ et $L(n) \subseteq L(n+1)$, on peut faire en sorte que $a_n^s = a_{n+1}^s$ (pour $s \in K(n)$), on notera cet élément a^s, de même on définit b^t (pour $t \in K(n)$).

On pose $B_{n+1} = \{a^s | s \in K(n+1)\} \bigcup \{b^t | t \in L(n+1)\}$. On choisit c_{n+1} dans $\mathfrak{M}$ tel que $\vDash \delta(c_{n+1}; d)$ ssi $\vDash \delta(c*; d)$, pour tout $d \in B(\star)$ (en effet c'est exprimable par une formule et vérifié par c* dans $\mathfrak{N}$ donc aussi dans $\mathfrak{M}$.).

On remarque que si $\mathfrak{M}$ est $|A|^+$-saturé, alors $p \upharpoonright (A \cup B \cup \{c_0; ...; c_n\})$ est finiment réalisé puisque réalisé dans $\mathfrak{N}$ par c*, on peut donc exiger $c_{n+1} \vDash p \upharpoonright (A \cup B \cup \{c_0; ...; c_n\})$.

2. Pour $i < n$, $s \in K(i)$ et $t \in L(i)$, on a $\vDash \neg\delta(c_n; a^s) \wedge \delta(c_n; b^t)$. En effet, $a^s, b^t \in B_{n-1}$ et on a $\vDash \neg\delta(c*; a^s) \wedge \delta(c*; b^t)$, donc par($\star$) $\vDash \neg(c_n; a^s) \wedge \delta(c_n; b^t)$.

3.

Lemme 3.9. Supposons que $i(0) < i(1) < ... < i(n) < \omega$ et pour un certain $a \in M$ $\vDash \delta(c_{i(0)}; a) \wedge ... \wedge \delta(c_{i(n)}; a) \wedge \neg\delta(c*; a)$. Alors il existe des éléments $d_0, d_1, ..., d_n$ dans M tels que $\vDash \delta(c_{i(j)}; d_r)$ ssi $i < r$ (pour $0 \leqslant j, r \leqslant n$).

Démonstration. On a $K(i(0)) \neq \varnothing$ (car $\varnothing \in K(0) \subseteq K(i(0))$). On pose $d_0 = a^s$ pour $s \in K(i(0))$, donc $\vDash \neg\delta(c_{i(j)}; d_0)$ pour $j = 0, ...n$.

Alors par hypothèse $W_k = \{i(0); ...; i(k)\} \in K(i(k+1))$, on pose $d_{k+1} = a^{W_k}$. On a donc $\vDash \delta(c_{i(j)}; d_{k+1})$ pour $j \leqslant k$ et par 2. $\vDash \neg\delta(c_{i(0)}; d_{k+1})$ pour $k+1 \leqslant j \leqslant n$ □

4.

Lemme 3.10. Supposons que $i(0) < i(1) < ... < i(n) < \omega$ et pour un certain $b \in M$ $\vDash \neg\delta(c_{i(0)}; a) \wedge ... \wedge \neg\delta(c_{i(n)}; b) \wedge \delta(c*; b)$. Alors il existe des éléments $e_0, e_1, ..., e_n$ dans M tels que $\vDash \neg\delta(c_{i(j)}; e_r)$ ssi $i < r$ (pour $0 \leqslant j, r \leqslant n$).

Démonstration. idem en prenant $e_k = b^{W_k}$ où $W_k = \{i(0); ...; i(k)\}$. □

5. Soit $a \in M$. On note $S_a = \{i \in \{0; ...; 2N\} | \vDash \delta(c_i; a)\}$ et $T_a = \{i \in \{0; ...; 2N\} | \vDash \neg\delta(c_i; a)\}$. On a $|T_a| \geqslant N$ ou $|S_a| \geqslant N$.

– si $|T_a| \geqslant N$, d'après le Lemme 3.9, on a $\vDash \delta(c*; a)$, donc $\delta(x; a) \in p(x)$.

– si $|S_a| \geqslant N$, d'après le Lemme 3.10, on a $\vDash \neg\delta(c*; a)$, donc $\delta(x; a) \notin p(x)$.

Ainsi $\delta(x; a) \in p(x)$ ssi $\displaystyle\bigvee_{\substack{W \subseteq \{0; ...; 2N\} \\ |W| = N}} \Big(\bigwedge_{i \in W} \delta(c_i; a)\Big)$. □

Proposition 3.11. *Soit $\delta(x;y)$ une $\mathcal{L}$-formule.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\delta(x;y)$ est stable ;

(ii) pour tout modèle $\mathfrak{M}$ et $p(x) \in S_\delta(M)$, p(x) a une δ-définition.

(iii) pour tout cardinal $\lambda \geqslant |T|$, et tout ensemble de paramètre A :

$$|A| \leqslant \lambda \Longrightarrow |S_\delta(A)| \leqslant \lambda$$

(iv) il existe un cardinal $\lambda \geqslant |T|$ tel que pour tout ensemble de paramètre A :

$$|A| \leqslant \lambda \Longrightarrow |S_\delta(A)| \leqslant \lambda$$

Démonstration. (i)⇒(ii)/ donné par 3.8.

(ii)⇒(iii)/Soit $A \subseteq M$ et $\lambda > |T|$. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de cardinal λ contenant A. Par 3.12 tout type $p(x) \in S_\delta(M)$. Par (ii) q est déterminé par sa δ-définition. Comme il y a au plus λ formules dans $\mathcal{L}_M$, il vient que le nombre de types dans $S_\delta(A)$ est majoré par λ.

(iii)⇒(iv)/ évident.

(iv)⇒(i)/ Par contraposée, supposons $\delta(x;y)$ instable. Soit $\lambda \geq |T|$ et μ le plus petit cardinal tel que $\mu \leq \lambda$ et $2^\mu > \lambda$. On note ${}^\mu 2$ l'ensemble des fonctions de μ dans $\{0;1\}$. Pour $f, g \in^\mu 2$ on définit $f \leq g$ si il existe $\alpha < \mu$ tel que $f\restriction_\alpha = g\restriction_\alpha$ et $f(\alpha) = 0$ et $g(\alpha) = 1$. c'est un ordre total. Soit $X \subseteq^\mu 2$ l'ensemble des fonctions constantes sur un segment final, alors X est dense dans ${}^\mu 2$ et $|X| \leq \lambda$.

Par compacité et comme $\delta(x;y)$ est instable, il existe a_f, b_f pour $f \in^\mu 2$ tel que $\models \delta(a_f;b_g)$ ssi $f \leq g$. Soit $\mathfrak{M}$ un modèle de cardinalité λ contenant $\{b_g; g \in X\}$. Si $f \neq g \in^\mu 2$, les δ -types de a_f et a_g au dessus de M sont différents, donc $|S_\delta(M)| > \lambda$. □

Proposition 3.12. *Soit $\delta(x;y)$ stable. Soit $p(x) \in S(A)$ et $\mathfrak{M}$ un modèle contenant A.*

Il existe $q(x) \in S_\delta(M)$ tel que $p(x) \cup q(x)$ est consistent et q(x) est δ-définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.

Démonstration. On peut supposer que $\mathfrak{M}$ est $|A|^+$-saturé et $|A|^+$-fortement homogène. Soit $X = \{q \in S_\delta(M) | q(x) \cup p(x) \text{ est consistent}\}$. X est un espace compact totalement discontinu. Il existe un ensemble X_0 fini qui contient tous les types de rang de Cantor-Bendixson maximum. X_0 est laissé fixe sous l'action de $Aut_A(\mathfrak{M})$.

Soit $q \in X_0$ et $\psi(y) \in \mathcal{L}_M$ sa δ-définition. Pour $f \in Aut_A(\mathfrak{M})$, $f(q) \in S_\delta(M)$ a pour définition $f(\psi)$. $\{f(q) | f \in Aut_A(\mathfrak{M})\} \subseteq X_0$ est fini, donc $\{f(\psi) | f \in Aut_A(\mathfrak{M})\}$ est fini aussi.

Montrons que ψ est équivalente à une $\mathrm{acl}(\mathcal{A})$-formule, i.e.. $Y = \psi(\mathfrak{M})$ est $\mathrm{acl}^{eq}(A)$-définissable. Soit $\bar{c} \in \mathfrak{M}^{eq}$ le paramètre canonique de Y. Y est $\bar{c}$-définissable. Pour $f \in Aut_A(\mathfrak{M}^{eq})$, $f(\bar{c})$ est le paramètre canonique de $f(Y)$, donc l'orbite de $\bar{c}$ sous l'action de $Aut_A(\mathfrak{M}^{eq})$ est finie et $\bar{c} \in \mathrm{acl}^{eq}(A)$. Donc Y est $\mathrm{acl}^{eq}(A)$-définissable. □

Définition 3.13. Soit $q(x) \in S_\delta(M)$ et $A \subseteq M$.

- Si la δ-définition est à paramètres dans $\mathrm{acl}^{eq}(A)$, alors on dit que q ne dévie pas sur A.
- Si $q(x) \in S_\delta(B)$ et $A \subseteq B$, on dit que q ne dévie pas sur A si q a une extension $r \in S_\delta(M)$ à un modèle M qui ne dévie pas sur A.

Remarque. La Proposition 3.12 nous assure, en particulier, de l'existence d'une extension non déviante pour tout $p \in S_\delta(A)$.

Proposition 3.14. *$\delta(x;y)$ est une formule stable. On note $\delta'(x;y)$ la formule $\delta(y;x)$. Soit $p(x) \in S_\delta(M)$ et $q(y) \in S_{\delta'}(M)$.*

On note $\varepsilon(y)$ la δ-définition de p et $\sigma(x)$ la δ'-définition de q. Alors $\sigma(x) \in p(x)$ ssi $\varepsilon(y) \in q(y)$.

Démonstration. Par la proposition 3.8, $\varepsilon(y)$ est une δ'-formule à paramètre dans M. Donc soit $\varepsilon(y)$, soit $\neg\epsilon(y)$ est dans $q(y)$. De même soit $\sigma(x)$, soit $\neg\sigma(x)$ est dans $p(x)$. On peut supposer que p et q sont définis au dessus d'un ensemble $A \subset M$, et que $\mathfrak{M}$ est $|A|^+$-saturé. Par l'absurde, supposons que $\neg\sigma(x) \in p$ mais $\varepsilon(y) \in p$. On définie $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans M par

$$a_i \models p \upharpoonright A \bigcup \{b_0;...;b_{i-1}\} \text{ et } b_i \models q \upharpoonright A \bigcup \{a_0;...;a_{i-1}\}$$

En particulier, on a $\models \neg\sigma(a_i)$ et $\models \varepsilon(b_j)$, donc $\neg\delta(a_i;y) \in q$ et $\delta(x;b_j) \in p$, aussi $\neg\delta \in q \upharpoonright A \bigcup \{a_0;...;a_{i-1}\}$ et $\delta(x;b_j) \in p \upharpoonright A \bigcup \{b_0;...;b_{i-1}\}$. On en déduit $\models \neg\delta(a_i;b_j)$ pour $j > i$ et $\models \delta(a_i;b_j)$ pour $i > j$, c'est à dire $\models \delta(a_i;b_j)$ ssi $i > j$. Ce qui contredit la stabilité de δ et prouve la proposition. □

Proposition 3.15. *$\delta(x;y)$ est une formule stable. Soit $p_1(x), p_2(x) \in S_\delta(M)$ définis sur $A \subseteq M^{eq}$ avec $A = acl^{eq}(A)$.*

Si $p_1|A = p_2|A$ alors $p_1 = p_2$.

Démonstration. Soit $b \in M$. On doit vérifier que $\delta(x;b) \in p_1$ ssi $\delta(x;b) \in p_2$. Soit $q_0(y)$ le δ'-type complet de b sur A. Par 3.12 il y a $q(y) \in S_{\delta'}(M)$ qui étends $q_0(y)$ et tel que la δ'-définition est à paramètres dans A. Soit $\varepsilon_i(y)$ la δ-définition de $p_i(x)$ pour$i = 1,2$. Soit $\sigma(x)$ la δ'-définition de q. ε_1, ε_2 et σ sont à paramètres dans A.

Par la proposition 3.14 $\varepsilon_1(y) \in q$ ssi $\sigma(x) \in p_1$ ssi$\sigma(x) \in p_2$ ssi $\varepsilon(y) \in q$. Mais $\varepsilon_i(y) \in q$ ssi $\models \sigma_i(b)$. Donc $\models \sigma_1(b)$ ssi $\models \sigma_2(b)$. □

On note $FER_\delta(A)$ l'ensemble des relations d'équivalence définissables par des δ-formule à paramètres dans A avec un nombre fini de classes d'équivalence.

Proposition 3.16. *$p(x) \in S_\delta(A)$ et $A \subset M$.*

Soit $X = \{q(x) \in S_\delta(M) | q \text{ est une extension non déviante de } p\}$. Alors :
(i) X est fini ;
(ii) Si $\mathfrak{M}$ et suffisamment homogène, alors $Aut_A(\mathfrak{M})$ agit transitivement sur X ;
(iii) Il existe $E(x_1;x_2) \in FER_\delta(A)$ telle que pour tout $q_1, q_2 \in X$ $q_1 = q_2$ ssi $q_1(x_1) \bigcup q_2(x_2) \vdash E(x_1;x_2)$.

Démonstration. (ii)/ Soit $Y = \{q \upharpoonright \mathrm{acl}^{eq}(A); q \in X\}$. Par la proposition 3.15, il suffit de démontrer que $Aut_A(\mathfrak{M})$ agit transitivement sur Y. Il est claire que Y est laissé stable par l'action de $Aut_A(\mathfrak{M})$. Soit $p_1(x)$ un type complet sur A étendant $p(x)$, et $q(x) \in Y$. Alors $p_1(x) \bigcup q(x)$ est consistent.

En effet : sinon par compacité, il existe $\sigma(x) \in q(x)$ telle que $\sigma(x) \bigcup p_1(x)$ est inconsistant. Comme $p_1(x)$ est laissé fixe sous l'action de $Aut_A(\mathfrak{M})$, chaque A-conjugué de σ est inconsistent avec $p_1(x)$. $\sigma(x)$ est une δ-formule à paramètre dans $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ donc σ n'a qu'un nombre fini de conjugués au dessus de A. Soit $\psi(x)$ une disjonction de ceux-ci, donc $\psi(x)$ est inconsistent avec $p_1(x)$ et est laissée fixe sous l'action de $Aut_A(\mathfrak{M})$. Aussi $\psi(x)$ est une δ-formule sur A de q, donc $\psi(x) \in p$, ce qui contredit le fait que p_1 étends p. Donc $p_1(x) \bigcup q(x)$ est consistent.

Soit $q_1, q_2 \in Y$. On peut donc choisir $a \vDash q_1$ et $b \vDash q_2$ tels que $a, b \vDash p_1$ (i.e. $\mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A) = p_1(x)$). Soit $f \in Aut_A(\mathfrak{M})$ tel que $f(a) = b$. On pose $g = f \upharpoonright \mathrm{acl}^{eq}(A)$, on a donc $g(q_1) = q_2$ (il suffit de le montrer pour chaque formule).

(i)/ Soit $q_0 \in X$. Soit $\varepsilon(y)$ la δ-définition de q_0, $\varepsilon(y)$ est à paramètre dans $\mathrm{acl}^{eq}(A)$, et a donc un nombre fini de conjugués sous $Aut_A(\mathfrak{M})$. Si $f \in Aut_A(\mathfrak{M})$ alors $f(\varepsilon)$ est la δ-définition de $f(q_0) \in X$. Donc par (ii) X est fini.

(iii)/Comme X est fini, il existe une collection finie de formules $\Phi(x)$ qui différencient les types de X. Par la proposition 3.15, on peut choisir des δ-formules à paramètres dans $\mathrm{acl}^{eq}(A)$.
Pour $q_1, q_2 \in X$: $q_1 = q_2$ ssi pour tout $\varphi(x) \in \Phi(x) \quad \varphi(x) \in q_1 \leftrightarrow \varphi(x) \in q_2$.
On peut supposer que Φ est clos sous l'action de $Aut_A(\mathfrak{M})$.
On pose $E(x_1; x_2) = \bigwedge_{\varphi \in \Phi} \varphi(x_1) \leftrightarrow \varphi(x_2)$. Alors E est clairement une relation d'équivalence à un nombre fini de classes qui satisfait (iii). □

Définition 3.17. *Soit $\delta(x; a)$ une instance de δ stable.*

On dit que $\delta(x; a)$ ne dévie pas sur A, si pour un modèle $\mathfrak{M}$ contenant $A \bigcup \{a\}$, il existe $p \in S_\delta(M)$ contenant $\delta(x; a)$ qui ne dévie pas sur A.

Proposition 3.18. .

1. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $\delta(x; a)$ ne dévie pas au dessus de A ;
(ii) Il existe une combinaison booléenne positive de conjugués de $\delta(x; a)$ consistente et A-définissable ;
(iii) Tout ensemble de $\mathrm{acl}^{eq}(A)$-conjugués de $\delta(x; a)$ est consistent.

2. Si $\delta(x; a)$ dévie sur A, il existe une suite A-indiscernable $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $\mathrm{tp}(a_i/A) = \mathrm{tp}(a/A)$ et telle que $\{\delta(x; a_i); i \in \mathbb{N}\}$ est inconsistant.

Démonstration. **1.** On pose $A_1 = \mathrm{acl}^{eq}(A)$ et $q(y) = \mathrm{tp}(a/A_1)$ (stationnaire) et $\mathfrak{M}$ modèle $|A|^+$-saturé contenant $A \cup \{a\}$. Par 3.12, on choisit $q*(y) \in S_{\delta'}(M)$ définissable sur A_1 consistent avec $q(y)$. On note $\sigma(x)$ sa δ'-définition.

Soit a^* une réalisation de $q(y) \cup q^*(y)$. $\sigma(x)$ est équivalente à une combinaison booléenne positive de formule $\delta(x; a')$ avec $\mathrm{tp}(a'/A_1) = \mathrm{tp}(a^*/A_1) = q(y)$. Aussi $\sigma(x)$

est équivalente à une combinaison booléenne de A_1-conjugués de $\delta(x;a)$ à paramètre dans A_1.

(i)⇒(ii)/ Supposons que $\delta(x;a)$ ne dévie pas sur A. Il existe $p(x) \in S_\delta(M)$ qui ne dévie pas et tel que $\delta(x;a) \in p(x)$. Soit $\varepsilon(y)$ la δ'-définition de $p(x)$, $\varepsilon(y)$ à paramètres dans $\mathrm{acl}^{eq}(A) = A_1$. Par la proposition 3.14, $\sigma(x) \in p(x)$ ssi $\varepsilon(y) \in q^*(y)$. Comme $\delta(x;a) \in p$, alors $\vDash \varepsilon(a)$ donc $\vDash \varepsilon(a^*)$, car $a^* \vDash q(y) = \mathrm{tp}(a/A)$ et donc $\varepsilon(y) \in q^*(y)$, donc $\sigma(x) \in p(x)$. Donc $\sigma(x)$ est consistent. Soit $\sigma'(x)$ la disjonction finie des A-conjugués de $\sigma(x)$. Alors $\sigma'(x)$ est consistant et c'est une combinaison booléenne positive de A-conjugués de $\delta(x;a)$.

(iii)⇒(i)/ On suppose (iii), donc $\sigma(x)$ est consistante. Soit $p(x) \in S_\delta(A_1)$ contenant σ. Soit $p^*(x) \in S_\delta(M)$ une extension non déviante de p, on note $\varepsilon(y)$ sa δ-définition. $\sigma \in p^*(x)$ donc $\varepsilon(y) \in q^*(y)$, en particulier $\vDash (a^*)$, donc $\vDash \varepsilon(a)$ et $\delta(x;a) \in p^*$. Donc $\delta(x;a)$ ne dévie pas sur A car p^* ne dévie pas.

(ii)⇒(iii)/ On suppose (ii). Soit $\varepsilon(x)$ une combinaison booléenne positive consistante de formules A-conjugués de $\delta(x;a)$. Soit $p(x) \in S_\delta(A)$ contenant $\varepsilon(x)$ et soit $p^*(x) \in S_\delta(M)$ une extension non déviante de p, où $\mathfrak{M}$ est suffisamment saturé et homogéne. Comme $\varepsilon(x) \in p^*$, certains A-conjugués de $\delta(x;a)$ sont dans p^*. Soit $\delta(x;a') \in p^*(x)$ et $f \in Aut_A(\mathfrak{M})$ tel que $f(a') = a$. Alors $p^{**} = f(p^*)$ est aussi une extension non déviante de p et $\delta(x;a) \in p^{**}$. La δ-définition de p^{**} est à paramètres dans $\mathrm{acl}^{eq}(A)$, donc si $\mathrm{tp}(a''/\mathrm{acl}^{eq}(A)) = \mathrm{tp}(a/\mathrm{acl}^{eq}(A))$, alors $\delta(x;a'') \in p^{**}$. En particulier, tout ensemble de conjugués $\delta(x;a)$ par des $\mathrm{acl}^{eq}(A)$-automorphismes est consistant.

2. On modifie la construction du début de la preuve de **1.**. $\mathfrak{M}$ est un modèle suffisamment saturé de T contenant A. On pose $q(y) = \mathrm{tp}(a/A_1)$ et $q^*(y) \in S_\delta(M)$ donné par 3.12. Soit a^* une réalisation de $q(y) \cup q*(y)$.

Soit $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{M}$ un petit modèle contenant A. Soit $q_1(y) = \mathrm{tp}(a^*/N)$. On a que q^* est définissable à paramètre dans $A_1 \subseteq N$ donc $q_1(y) \cup q^*(y)$ est finiment satisfaisable dans $\mathfrak{N}$ car satisfait dans $\mathfrak{M}$. On peut donc étendre $q_1(y) \cup q^*(y)$ en un type $r(y) \in S(M)$ finiment satisfaisable dans N.

Soit $\sigma(x)$ la δ'-définition de q^* (i.e. la δ'-définition de $r(y)$). Par 3.8 (iii) σ est équivalente à une combinaison booléenne positive de $\delta(x;a_1)$, ..., $\delta(x;a_k$ où $a_i \vDash r \upharpoonright (N \cup \{a_1;...;a_{i-1}\})$. On construit $(a_i)_{i<\omega}$ étendant $a_1,...,a_k$ telle que pour tout i, $a_i \vDash r \upharpoonright (N \cup \{a_1;...;a_{i-1}\})$. Ainsi $(a_i)_{i<\omega}$ est une suite N-indiscernable.

Comme $\delta(x;a)$ dévie sur A, par la preuve de (iii)⇒(i), $\sigma(x)$ est inconsistant. Alors $\{\delta(x;a_1);...;\delta(x;a_k)\}$ est inconsistant, ce qui prouve le lemme. □

3.2.2 Stabilité locale et groupes

Dans cette section $G(z)$ désigne la définition d'un groupe, et $\chi(z_1;z_2;z_3)$ le graphe de l'opération de groupe, qu'on note aussi $z_1 \cdot z_2 = z_3$. $S(x)$ est la définition d'un ensemble, et $\xi(z;x_1;x_2)$ ou $z \cdot x_1 = x_2$ est une action transitive de G sur$S$.

Définition 3.19. *Soit $\delta(x;y)$ une $\mathcal{L}$-formule.On suppose* $\vDash \forall x \forall y \delta(x;y) \longrightarrow S(x)$.

On dit que $\delta(x;y)$ est une formule équivariante si $\forall a \in M \forall c \in G \exists b \in M$

$$\vDash \delta(c \cdot x; a) \longleftrightarrow \delta(x; b)$$

Remarque. Si $X = \{x \in S | \vDash \delta(x;a)\}$, on a $c \cdot X = \{x \in S | \vDash \delta(c^{-1} \cdot x; a)\}$.
Pour $\delta(x;y)$ stable et équivariante :

– Si $\varphi(x)$ est une δ-formule alors pour tout $c \in G$, $\varphi(c \cdot x)$ l'est aussi.
– Si $p(x) \in S_\delta(M)$, $c \in G$, alors $c \cdot p = \{\varphi(c^{-1} \cdot x) | \varphi(x) \in p\} \in S_\delta(M)$.

Aussi G agit sur $S_\delta(M)$.

Définition 3.20. *δ est une formule stable et équivariante.*

(i) *Soit $\varphi(x)$ une δ-formule.*

On dit φ est générique si S est couvert par un nombre fini de G-translatés de φ. i.e. il existe $c_1, ..., c_n \in G$ tels que $\vDash S(x) \longrightarrow \varphi(c_1^{-1} \cdot x) \vee ... \vee \varphi(c_n^{-1} \cdot x)$

(ii) *Soit $A \subseteq M$ et $p(x) \in S_\delta(A)$.*

On dit que $p(x)$ est générique si toute formule de $p(x)$ est générique.

Proposition 3.21. *Soit φ une δ-formule.*

Alors $\varphi(x)$ ou $\neg\varphi(x)$ est générique.

Démonstration. On pose $\mathfrak{M}_0$ le "réduit" de $\mathfrak{M}$ aux prédicats $G(z)$, $S(x)$ et $\lambda(z;x)$ où $\mathfrak{M}_0 \vDash \lambda(x;z)$ ssi $\mathfrak{M} \vDash \varphi(z^{-1} \cdot x)$. On pose $T_0 = Th(\mathfrak{M}_0)$.

• $\lambda(x;z)$ est stable pour T_0. En effet, $\varphi(x)$ est une δ-formule, c'est donc une combinaison booléenne de $\delta(x;c_i)$, on la note $\chi(x;\bar{c})$. Si $\lambda(x;z)$ est instable, alors il existe $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tels que $\vDash \lambda(a_i;b_j)$ ssi $i < j$, ainsi $\vDash \varphi(b_j^{-1} \cdot a_i)$ ssi $i < j$ et donc $\vDash \chi(b_j^{-1} \cdot a_i; \bar{c})$ ssi $i < j$.

Comme δ est équivariante χ l'est aussi, donc pour tout b_j, il existe $\bar{c}_j$ tel que $\vDash \chi(a_i; \bar{c}_j)$ ssi $i < j$, donc χ est instable, absurde, car χ est une combinaison booléenne d'instances de δ stable.

• Pour tout $g \in G$, la fonction $f_g : x \longmapsto \begin{cases} g \cdot x \text{ si } x \in G \\ g \cdot x \text{ si } x \in S \\ x \text{ sinon} \end{cases}$ est clairement une bijection et respecte les prédicats $G(z)$, $S(x)$ et $\lambda(z;x)$. C'est donc un automorphisme de $\mathfrak{M}_0$.

• Comme l'action de G sur S est transitive, tous les éléments de $S(\mathfrak{M}_0)$ ont le même type. $S(x)$ détermine un unique 1-type $p \in S(\varnothing)$.

• Soit $1 \in G$ l'élément neutre du groupe. On a l'existence d'un type non déviant sur$\varnothing$ par la proposition 3.12. Ainsi $\lambda(x;1)$ ou $\neg\lambda(x;1)$ est dans ce type. Donc l'une des deux est non déviante.

Supposons qu'il s'agit de $\lambda(x;1)$. Il existe donc une combinaison booléenne positive ψ de $\varnothing$-conjugué de $\lambda(x;1)$, qui est consistent et $\varnothing$-définissable. Comme les automorphismes de $\mathfrak{M}_0$ respectent G, les conjugués de $\lambda(x;1)$ sous l'action de $Aut(\mathfrak{M}_0)$ sont de la forme $\lambda(x;g)$ pour $g \in G$. $\psi \in p$ donc $\vDash S(x) \longrightarrow \lambda(x;g_1) \vee ... \vee \lambda(x;g_m)$ pour $g_1, ..., g_m \in G$. Donc φ est générique dans $\mathfrak{M}_0$ donc dans $\mathfrak{M}$.

De même, si $\neg\lambda(x;1)$ ne dévie pas, $\neg\varphi$ est générique. Ce qui prouve la proposition. $\square$

Proposition 3.22. *Soit $\mathfrak{M}$ un modèle.*
(i) L'ensemble $X = \{p \in S_\delta(M) | p$ est générique$\}$ est fini et non vide.
(ii) $G(\mathfrak{M})$ agit transitivement sur X.
(iii) Il existe $E \in FER_\delta(\varnothing)$ G-invariant tel que pour $p_1, p_2 \in X$

$$p_1 = p_2 \quad \text{ssi} \quad p_1(x_1) \cup p_2(x_2) \models E(x_1; x_2)$$

Démonstration. Soit E la formule $\forall x \quad \delta(x; y_1) \longrightarrow \delta(x; y_2)$. On pose $\Delta = S_E$ dans T^{eq}. Soit $\varepsilon(x; w) \longleftrightarrow \exists y(\delta(x; y) \wedge w = y/E)$. On pose $\mathfrak{M}_1$ le réduit de $\mathfrak{M}$ aux prédicats $S(x)$, $\Delta(w)$ et $\varepsilon(x; w)$. $T_1 = Th(\mathfrak{M}_1)$. Clairement $\varepsilon(x; w)$ est stable.

Soit $p \in S(\varnothing)$ le type complet déterminé par S. On a $p|\varepsilon \in S_\varepsilon(\varnothing)$.

On pose $X_1 = \{q \in S_\varepsilon(M_1); q$ ne dévie pas sur $\varnothing$ de $p|\varepsilon\}$. Soit $E_1 \in FER_\delta(\varnothing)$ qui distingue les éléments de X_1 par 3.16. $Aut(\mathfrak{M}_1)$ agit transitivement sur X_1, donc E_1 est G-invariante. En particulier G agit transitivement sur les E_1-classes, donc sur X_1.

Lemme 3.23. *Soit φ une δ-formule à paramètres dans M.*
$\varphi(x)$ est générique ssi $\varphi(x) \in q$ pour un $q \in X_1$.

Démonstration. $\Rightarrow$/ Si φ est générique alors tout type $q \in S_\varepsilon(M)$ contient un translaté $g \cdot \varphi(x)$. En prenant $q \in X_1$ alors $g^{-1} \cdot g \cdot \varphi(x) \in g^{-1} \cdot q \in X_1$

$\Leftarrow$/ Si $\varphi(x) \in q$ avec $q \in X_1$. Comme G agit sur X_1, une certaine union finie de G-translatés de $\varphi(x)$, $\psi(x)$ contenu dans tous les types de X_1. Donc $\neg\psi$ n'est dans aucun type de X_1. Par ($\Rightarrow$) $\neg\psi(x)$ n'est pas générique. Par 3.21 ψ est générique et donc φ est générique. □

Ainsi tous les types de X_1 sont génériques et inversement. Il y a une correspondance entre X et X_1. Par 3.16, on finit la démonstration. □

Corollaire 3.24. (i) *Soit φ une δ-formule.*
φ est générique ssi $\forall g \in G \quad \varphi(g \cdot x)$ ne dévie pas sur $\varnothing$.

(ii)*Soit $p(x) \in S_\delta(M)$ où $\mathfrak{M}$ est suffisamment saturé.*
p est générique ssi $\forall g \in G \quad g \cdot p$ ne dévie pas sur $\varnothing$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$/ On suppose que φ est générique. Pour tout $g \in G$, $\varphi(g \cdot x)$ est également générique donc par le lemme 3.23, $\varphi(g \cdot x)$ est contenu dans un $q \in S_\delta(M)$ qui ne dévie pas sur $\varnothing$ (au sens de T_1). Donc la δ-définition de q est à paramètre dans $\varnothing$ (au sens de T_1 et au sens de T aussi). donc $\varphi(g \cdot x)$ ne dévie pas sur $\varnothing$.

$\Leftarrow$/ On suppose φ non générique. Comme dans la preuve de 3.21, on pose $\mathfrak{M}_0$ le réduit de $\mathfrak{M}$ à $G(z)$, $S(x)$ et $\lambda(z; x) = \varphi(z^{-1} \cdot x)$, et $T_0 = Th(\mathfrak{M}_0)$. Alors $\lambda(x; 1)$ dévie sur $\varnothing$. Alors par 3.18, il existe une suite indiscernable $(g_i)_{i<\omega}$ telle que $\{\lambda(x; g_i); i < \omega\}$ est inconsistant. ($\star$)

On l'étends, par compacité, en une suite indiscernable $(g_i)_{i<\kappa}$ où $\kappa > 2^{|T|}$. Soit $\mathfrak{N}$ un modèle de T contenant tous les g_i pour $i < \kappa$. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout g_i $\varphi(g_i^{-1} \cdot x)$ ne dévie pas. Donc on peut choisir pour tout $i < \kappa$ $p_i \in S_\delta(M)$ qui ne dévie pas sur $\varnothing$ et $\varphi(g_i^{-1} \cdot x) \in p_i$.

Par 3.15 p_i est déterminé par $p_i \restriction_{\mathrm{acl}^{eq}(\varnothing)}$. Ainsi il y a au plus $2^{|T|}$ types différents. Par compacité, d'après $(\star)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $\{\lambda(x; g_{i_j}) | 0 < j < k\}$ inconsistant. Comme il s'agit d'éléments indiscernables, tout sous-ensemble de k éléments est inconsistant. Donc k éléments ne peuvent pas être dans le même type. Il y ainsi κ types différents. Absurde. Donc il existe $\varphi(g_i^{-1} \cdot x)$ qui dévie $\varnothing$.

(ii)/ découle du (i). □

3.2.3 Stabilité locale et structures géométriques

Proposition 3.25. *Soit $\mathfrak{M}$ une structure géométrique (suffisamment saturée), $A \subseteq B \subseteq M$. Soit $p \in S_n(A)$ avec $\dim(p) = m$. Soit $\delta(x; y)$ stable.*

(i) Il existe une extension $q \in S_n(B)$ de p avec $\dim(q) = m$ et telle que $q|\delta$ ne dévie pas sur A.

(ii) Si de plus $\mathfrak{M}$ a la propriété(E), alors toute extension $q \in S_n(B)$ avec $\dim(q) = m$, $q|\delta$ ne dévie pas sur A.

Démonstration. (i)/ Raisonnons par l'absurde. S'il n'existe pas de tel $q \in S_n(B)$ alors l'ensemble

$$p(x) \bigcup \{\neg\chi(x; b) | b \in B, \chi(x; b) \text{ est une } \delta\text{-formule et } \chi(x, b) \text{ dévie sur A}\} \\ \bigcup \{\varphi(x; b) | b \in B \text{ et } \dim(\neg\varphi(x; b)) < m\}$$

est inconsistant, par compacité, il existe $\theta(x) \in p(x)$, $\neg\chi(x; b)$ et $\varphi(x; b)$ tel que $\{\theta(x); \neg\chi(x; b); \varphi(x; b)\}$ inconsistant i.e. $\vDash \theta(x) \wedge \varphi(x; b) \longrightarrow \chi(x; b)$, où $\chi(x; b)$ dévie sur A et $\dim(\theta(x) \wedge \neg\varphi(x; b)) < m$. Comme $\chi(x; b)$ dévie sur A, il existe par 3.18 $b_1, ..., b_n$ A-conjugués de b tel $\{\chi(x; b_1); ...; \chi(x; b_n)\}$ est inconsistant.

On a aussi $\vDash \forall(\theta(x) \wedge \varphi(x; b_i)) \longrightarrow \chi(x; b_i)$ pour $i \in \{1; ...; n\}$ et $\dim(\theta(x) \wedge \neg\varphi(x; b_i)) < m$. Donc $\vDash \neg\exists \bigwedge_{i=1}^{n} \chi(x; b_i)$ et $\vDash \forall x \bigvee_{i=1}^{n} \neg\chi(x; b_i)$.

En particulier, $\vDash \forall x \bigvee_{i=1}^{n} (\theta(x) \longrightarrow \neg\varphi(x; b_i))$ donc $\vDash \forall x\ \theta(x) \longrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg\varphi(x; b_i)$. Ainsi $\theta(x) \wedge \neg\varphi(x; b_i)$ est une partition finie de $\theta(x)$ en ensemble de dimension $< m$. Contradiction (voir lemme 1.2(iii)).

(ii)/ Soit $q \in S_n(B)$ une extension de p avec $\dim(q) = m$. Par l'absurde, supposons que $q|\delta$ dévie sur A. Sans perdre de généralité, on peut supposer $B = M_0$ un modèle.

Soit $\mathfrak{M}_1 \simeq \mathfrak{M}_0$, un modèle $|M_0|^+$-saturé. Par (i), soit $r \in S_n(M_1)$ une extension de q telle que $\dim(r) = m$ et $r|\delta$ ne dévie pas. La δ-définition de r est la δ-définition de q, on la note $\psi(y; c)$ avec $c \in M_0$. $\psi(y; c)$ n'est pas à paramètre dans $\mathrm{acl}^{eq}(A)$ (car $q|\delta$ dévie sur A). Par le lemme 3.8, il y a $a_1, ..., a_k$ dans M_1 tels que $a_i \vDash r \restriction (M_0 \cup \{a_1; ...; a_k\})$, et $\psi(y; c)$ est à paramètre dans $\{a_1; ...; a_k\}$. On a $\dim r = m$ et $\dim(r|A) = \dim p = m$. Donc $\forall Z\ A \subseteq Z \subseteq M_1, \quad \dim(r|Z) = m$ Ainsi $\forall i \leqslant k \dim(a_i/M_0 a_1...a_{i-1}) = \dim(a_i/A a_1...a_{i-1}) = \dim(a_i/A) = m$, de même $\dim(a_1...a_k/M_0) = \dim(a_1...a_k/A)$ $(\star)$

Soit E la relation d'équivalence définissable sur $\varnothing$ par :

$$c_1 E c_2 \text{ ssi } \psi(y;c_1) \longleftrightarrow \psi(y;c_2)$$

On note $\mathcal{C}$ la E-classe de c, et soit $c' \in \mathcal{C} \cap M_0$ tel que $\dim(c'/A,c) = \dim(\mathcal{C}) = t$. $\psi(y;c)$ est $\{a_1;...;a_k\}$-définissable, donc $\mathcal{C}$ aussi, donc $\dim(c'/A \cup \{a_1;...;a_k\}) \leqslant \dim(c'/Ac) = t$.

Par $(\star)$ $a_1...a_k \downarrow_A M_0$ et donc $c' \downarrow_A a_1...a_k$, donc $\dim(c'/A) = \dim(c'/A\cup\{a_1;...;a_k\}) \leqslant t$ Or $\dim(c'/A) \geqslant t$ donc $\dim(c'/A) = t$. Soit X un ensemble A-définissable de dimension t, contenant c'. $\mathcal{C}$ est c-définissable. $c' \in X \cap \mathcal{C}$ donc $\dim(X \cap \mathcal{C}/Ac) = \dim(c'/Ac) = t$. Comme $\psi(y;c)$ n'est pas définissable sur $\mathrm{acl}^{eq}(A)$, $\mathcal{C}$ a une infinité de conjugués au dessus de A. Ainsi E a une infinité de classes dans X de dimension t, ce qui contredit la propriété (E). □

Corollaire 3.26. *Soit $\mathfrak{M}$ une structure géométrique saturé vérifiant la propriété (E).*

$G \subseteq M^k$ est un groupe infiniment définissable sur $\varnothing$ avec $\dim G = n$. Soit $\delta(x;y)$ une $\mathcal{L}$-formule qui est stable et équivariante pour l'action de G sur lui-même.

Alors $p(x) \in S_{\delta,G}(M)$ est générique ssi il existe $q(x) \in S(M)$ étendant $p(x)$ avec $\dim q = n$.

Démonstration. $\Rightarrow$/ On suppose que $p(x) \in S_{\delta,G}(M)$ est générique. Soit $\varphi(x)$ une δ -formule dans p. Alors G est couvert par un nombre fini de translaté sous G de $\varphi(x) \wedge G(x)$. Mais $\dim(\varphi(x) \wedge G(x)) = \dim(\varphi(g \cdot x) \wedge G(x))$ pour $g \in G$. Par le lemme 1.2 (iii) et et comme $\dim G(x) = n$ alors $\dim(\varphi(x) \wedge G(x)) = n$. Ainsi pour tout $\varphi(x) \in p$, $\dim(\varphi(x) \wedge G(x)) = n$, donc $\dim p = n$ et il existe $q : inS(M)$ qui étend p avec $\dim q = n$.

$\Leftarrow$/ On suppose qu'il existe $q(x) \in S(M)$ étendant $p(x) \in S_{\delta,G}(M)$ tel que $\dim p = n$. On a $\dim(p|\varnothing) = n$ car $G(x) \subset p(x)|\varnothing$ et $\dim G(x)$=n. Donc par 3.25, $q \in S(M)$ étendant $p|\varnothing$ et $\dim(p|\varnothing) = \dim q = n$, donc $q|\delta$ ne dévie pas sur $\varnothing$, donc $p(x)$ ne dévie pas sur $\varnothing$. De plus pour $g \in G$, $\dim(g \cdot q) = n$ et $g \cdot p \in S_{\delta,G}(M)$. Donc $\forall g \in G$ $g \cdot p$ ne dévie pas sur $\varnothing$. Par 3.24, $p(x)$ est générique. □

Proposition 3.27. *Soit $\mathfrak{M}$ une structure géométrique satisfaisant (S_1).*

Soit $\varphi(x;y)$ et $\psi(x;z)$ des formules telles que $\forall a,b \in M$ $\dim(\varphi(x;a)) \leqslant n$ et $\dim(\psi(x;b)) \leqslant n$.

On pose $\delta(y;z)$ la formule telle que pour tout a', b' :

$$\vDash \delta(a';b') \quad \text{ssi} \quad \dim(\varphi(x;a') \wedge \psi(x;b')) = n$$

Alors δ est stable.

Démonstration. Supposons δ instable. On pose :

$$\begin{aligned} T = Diag^{el}(\mathfrak{M}) \cup \{\delta(\alpha_i;\beta_j) \mid i,j \in \mathbb{Z} \quad i<j\} \cup \{\alpha_i \neq \alpha_j \wedge \beta_i \neq \beta_j \mid i \neq j\} \\ \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\varphi(\alpha_{i_1};\beta_{i_1};...;\alpha_{i_n};\beta_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(\alpha_{j_1};\beta_{j_1};...;\alpha_{j_n};\beta_{j_n}) \mid i_1,...,i_n,j_1,...,j_n \in \mathbb{Z} \\ \text{avec } i_1 < ... < i_n,\ j_1 < ... < j_n \quad \varphi \in \mathcal{L}\} \end{aligned}$$

Par compacité, il suufit qu'une partie T_0 finie soit consistante.

$$T_0 \subseteq Diag^{el}(\mathfrak{M}) \cup \{\delta(\alpha_i;\beta_j) \mid -M \leq i < j \leq M\} \cup \{\alpha_i \neq \alpha_j \wedge \beta_i \neq \beta_j \mid i \neq j\}$$
$$\cup \bigcup_{0\leq k\leq K} \{\varphi_k(\alpha_{i_1};\beta_{i_1};...;\alpha_{i_N};\beta_{i_N}) \leftrightarrow \varphi_k(\alpha_{j_1};\beta_{j_1};...;\alpha_{j_N};\beta_{j_N}) \mid -M \leq i_1,...,i_N,j_1,...,j_N \leq M$$
$$\text{avec } i_1 < ... < i_n,\ j_1 < ... < j_n \quad \varphi_k \in \mathcal{L}\}$$

Comme δ est instable, il existe $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telles que $\models \delta(a_i;b_j)$ ssi $i < j$. On note $Z = \{(a_i;b_j) \mid i \in \mathbb{N}\}$.

$$\begin{aligned}[Z]^N &\longrightarrow \wp(\{1;...;k\})\\ (a_{i_0};b_{j_0};...;a_{j_N};b_{j_N}) &\longmapsto \{k \leq K \mid \models \varphi_k(a_{i_0};b_{j_0};...;a_{j_N};b_{j_N})\}\end{aligned}$$

Par le théorème de Ramsey, il existe une partie infinie de Z qui vérifient toutes les mêmes formules parmi les $\varphi_0,...,\varphi_K$. En interprétant les $(\alpha_i;\beta_i)_{-M\leq i\leq M}$ par ces éléments de Z on a un modèle de T_0. Donc T est conistante.

On a ainsi une suite indiscernable $(a_i;b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ telle que $\models \delta(a_i;b_j)$ ssi $i < j$.

cas n°1 On a $\dim(\varphi(x;a_1) \wedge \varphi(x;a_2) \wedge \psi(x;b_3)) = n$. Comme c'est une suite indiscernable et que la dimension est exprimable par une formule, on a :
$\dim(\varphi(x;a_1) \wedge \varphi(x;a_i) \wedge \psi(x;b_{i+1})) = n$ pour $i > 1$
De plus $\dim(\varphi(x;a_j) \wedge \psi(x;b_{i+1})) = n$ car $\not\models \delta(a_j;b_{i+1})$ pour $i+1 < j$.
donc $\dim(\varphi(x;a_i) \wedge \psi(x;b_{i+1}) \wedge \varphi(x;a_j) \wedge \psi(x;b_{j+1})) < n$ pour $1 < i+1 < j$.
On a $\dim(\varphi(x;a_1)) = n$ ce qui contredit la propriété (S_1).

cas n°2 Sinon, $\dim(\varphi(x;a_1) \wedge \varphi(x;a_2) \wedge \psi(x;b_3)) < n$, alors pour tout $i < j < 3$ $\dim(\varphi(x;a_2)\wedge\varphi(x;a_j)\wedge\psi(x;b_3)) < n$. Or $\dim(\psi(x;b_3)) = \dim(\varphi(x;a_i)\wedge\psi(x;b_3)) = n$ pour $i < 3$, ce qui contredit (S_1).

□

Proposition 3.28. *Soit $\mathfrak{M}$ est une structure géométrique saturée.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{M}$ a la propritété (S_1).

(ii) (Théorème d'indépendance au dessus d'un modèle) Soit $\mathfrak{M}_0 \preccurlyeq \mathfrak{M}$. Soit $a, b \in M$ avec $a \downarrow_{M_0} b$. Soit $c_1, c_2 \in M$ vérifiant : $\mathrm{tp}(c_1/M_0) = \mathrm{tp}(c_2/M_0) = r$, $c_1 \downarrow_{M_0} a$ et $c_2 \downarrow_{M_0} b$. Aors il existe $c \in M$ tel que $\mathrm{tp}(c/M_0,a) = \mathrm{tp}(c_1/M_0,a)$, $\mathrm{tp}(c/M_0,b) = \mathrm{tp}(c_2/M_0,b)$ et $c \downarrow_{M_0} bc$.

Démonstration. (ii)⇐(i)/ On suppose que $\mathfrak{M}$ satisfait (ii). Par l'absurde, supposons qu'il existe $\theta(x)$ et $\varphi(x;y)$ et $(b_i)_{i<\omega}$ tel que

$$\dim\theta(x) = \dim(\theta(x) \wedge \varphi(x;b_i)) = n\ \forall i \quad \text{et} \quad \dim(\varphi(x;b_i) \wedge \varphi(x;b_j) < n\ \forall i < j \quad (\star)$$

Affirmation : Il existe $\mathfrak{M}'$ contenant les paramètres de θ, de φ et b^1, b^2 tel que $\mathrm{tp}(b^1/M') = \mathrm{tp}(b^2/M')$, $b^1 \downarrow_{M'} b^2$ et $\dim\theta(x) = \dim(\theta(x) \wedge \varphi(x;b^i)) = n$ pour $i = 1,2$ et $\dim(\varphi(x;b^1) \wedge \varphi(x;b^2) < n$.

En effet : Par le théorème de Ramsey, on peut choisir $(b_i)_{i<\omega}$ une suite indiscernable qui vérifie $(\star)$ et tel que $\dim(b_i/M) = l$ soit minimale. Alors b_0 et b_1 sont indépendants au dessus de M. Sinon $\dim(b_i/M, b_0) < l$ pour tout i. Si on prends $\mathfrak{M}_1$ un modèle contenant $M \cup \{b_0\}$, on peut construire une suite indiscernable $(b'_i)_{i<\omega}$ sur $\mathfrak{M}_1$ qui vérifie $(\star)$ et telle que $\mathrm{tp}(b'_i/M, b_0) = \mathrm{tp}(b_i/M, b_0)$. Si $b'_1 \downarrow_{M_1} b'_2$, on a fini, sinon on recommence. Comme la dimension diminue à chaque étape, le processus s'arrête.

Soit c_1 un point générique de $\theta(x) \wedge \varphi(x; b^1)$ au dessus de $M' \cup \{b^1\}$, on a $c_1 \downarrow_{M'} b^1$. Soit c_2 tel que $\mathrm{tp}(c_2; b^2/M') = \mathrm{tp}(c_1; b^1/M')$. Soit c donné par le théorème d'indépendance. Ainsi $\mathrm{tp}(c/M', b^i) = \mathrm{tp}(c_i/M', b^i)$ pour $i = 1, 2$ et $c \downarrow_{M'} b^1, b^2$. Donc $\dim(\varphi(x; b^1) \wedge \varphi(x; b^2)) = \dim(c/M, b^1, b^2) = n$ ce qui contredit la propriété $(\star)$.

(i)$\Rightarrow$(ii)/ Supposons que $\mathfrak{M}$ vérifie (S_1). Soit M_0, a, b, c_1, c_2 et r comme défini dans (ii) et $\dim r = n$. On pose $r_1(x) = \mathrm{tp}(c_1/M_0, a)$ et $r_2(x) = tp(c_2/M_0, b)$. Il faut montrer que $r_1(x) \bigcup r_2(x) \bigcup \{\dim(x/M_0, a, b) = n\}$ est consistent. par compacité, il suffit de montrer que pour toute $\varphi_1(x; a) \in r_1(x)$ et $\varphi(x; b) \in r_2(x)$ $(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}_{M_0})$ $\dim(\varphi_1(x; a) \wedge \varphi_2(x; b)) = n$.

Considérons alors $\varphi_1(x; a) \in r_1(x)$ et $\varphi(x; b) \in r_2(x)$ et posons $\delta(x; y)$ la formule définie par : $\models \delta(a'; b')$ ssi $\dim(\varphi_1(x; a') \wedge \varphi_2(x; b')) = n$. Soit a_1 tel que $\mathrm{tp}(a_1, c_2/M_0) = \mathrm{tp}(a; c_1/M_0)$ et $a_1 \downarrow_{M_0} b, c_2$, donc $a_1 \downarrow_{M_0, b} c_2$ et comme $b \downarrow_{M_0} c_2$ alors $c_2 \downarrow a_1, b$, donc $\dim(c_2/M_0, a_1, b) = n$ et $\models \varphi_1(c_2; a_1) \wedge \varphi_2(c_2; b)$. Ainsi $\models \delta(a_1; b)$. On sait que par 3.27 que δ est stable, donc pa 3.15 il existe un unique δ-type complet q sur $M_0 \cup \{b\}$ qui ne dévie pas sur M_0 et tel que $q | M_0 = \mathrm{tp}_\delta(a/M_0)$. Comme $\dim(\mathrm{tp}(a_1/M_0, b)) = \dim(a_1/M_0, b) = n$, par 3.25, on voit que $\mathrm{tp}(a_1/M_0, b)$ ne dévie pas sur M_0 et $\mathrm{tp}(a_1/M_0, b) = \mathrm{tp}(a/M_0, b)) = q$. Du fait que $\models \delta(a_1; b)$ on a $\models \delta(a; b)$. $\square$

3.3 Propriétés des groupes définissables

Proposition 3.29. *Soit $\mathfrak{M}$ une structure géométrique avec la propriété (S_1)*

Soit G un groupe définissable dans $\mathfrak{M}$ et soit H un sous-groupe infiniment définissable de G. Alors H est une intersection de sous-groupes définissables de G.

Démonstration. Soit $\mathfrak{M}_0$ une petite sous-structure élémentaire de $\mathfrak{M}$ sur laquelle G et H sont définis. On pose $\dim H = n$. Soit$\{U_i | i \in H\}$ une famille de sous-ensembles M_0-définissable de G telle que $\dim U_0 = n$, $U_i \subseteq U_0$, $H = \bigcap_{i \in I} U_i$, et $\{U_i | i \in I\}$ est clos par intersections finies.

Pour $i \in I$, on pose $\delta_i(x; y)$ la formule (à paramètres dans M_0) :

$$G(x) \wedge G(y) \wedge \dim(x \cdot U_i \bigcap y \cdot U_i) = n$$

Par 3.27 $\delta_i(x; y)$ est stable. De plus $\delta_i(x; y)$ est équivariante sous l'action de H : si $a \in G$, $b \in H$ alors $\delta_i(b \cdot x; a) \wedge H(x)$ est équivalente à $\delta_i(x; b^{-1} \cdot a) \wedge H(x)$.

On note $S_{\delta_i, H}(M)$ l'ensemble des types de la forme $p(x) \wedge H(x)$ où $p(x) \in S_{\delta_i}(M)$. Pour $i \in I$, on pose :

$$Q_i = \{b \in U_0 | \text{ pour tout type générique } p(x) \in S_{\delta_i, H}(M), \quad \delta_i(x; b) \in p(x)\}$$

Par le lemme 3.22, pour chaque $i \in I$ il n'y a qu'un nombre fini de génériques $p(x) \in S_{\delta_i,H}(M)$, de plus ils ne dévient pas sur M_0 (par 3.24) donc leur δ_i-définition est à paramètres dans M_0, et Q_i est M_0-définissable.

Lemme 3.30. (i) $\forall i \in I \quad Q_i = \{b \in U_0 | \forall a \in H \text{ si } \dim(a/M_0, b) = n \text{ alors } \vDash \delta_i(a;b)\}$
(ii) $H = \bigcap\{Q_i; i \in I\}$.

Démonstration. (i)/ Si $\dim(a/bM_0) = n$, alors $\mathrm{tp}(a/bM_0)$ a une extension en un type complet $q(x) \in S(M)$ avec $\dim(q) = n$.

$$
\begin{aligned}
Q_i &= \{b \in U_0 | \forall a \in H \text{ si } \mathrm{tp}_{\delta_i}(a/M) \text{ est générique, alors } \vDash \delta_i(a;b)\} \\
&= \{b \in U_0 | \forall a \in H \text{ si } \mathrm{tp}_{\delta_i}(a/M) \text{ s'étend en } q(x) \in S(M) \text{ avec } \dim(q) = n \text{ alors } \vDash \delta_i(a;b)\} \text{ par 3.26} \\
&= \{b \in U_0 | \forall a \in H \text{ si } \dim(a/bM_0) = n \text{ alors } \vDash \delta_i(a;b)\}
\end{aligned}
$$

(ii)/ Si $b \in H$ et $a \in H$ alors $H \subseteq a \cdot U_i \bigcap b \cdot U_i$ donc $\dim(a \cdot U_i \bigcap b \cdot U_i) = n$ alors $\vDash \delta_i(a;b)$ et $b \in Q_i$.

Si $b \in Q_i$ pour tout i. Soit $a \in H$ tel que $\dim(a/M_0b) = n$ donc $\dim(a \cdot U_i \bigcap b \cdot U_i) = n$ d'où $\dim(b^{-1} \cdot a \cdot U_i \bigcap U_i) = n$ donc non vide. Si $b^{-1} \cdot a \cdot H \bigcap H$ est vide, i.e. $\{U_i(b^{-1} \cdot a \cdot x) \bigcap U_i(x) | i \in I\}$ est inconsistent, alors par compacité, et comme $\{U_i; i \in I\}$ est clos par intersections finies, il existe i tel que $U_i(b^{-1} \cdot a \cdot x) \bigcap U_i(x)$ est inconsistant (absurde). Donc $b^{-1} \cdot a \cdot H \bigcap H$ est non vide, donc $b \in H$. □

Remarquons que si $U_j \subseteq U_i$ alors $Q_j \subseteq Q_i$: si $b \in Q_j$ alors si $\dim(a/bM_0)$ alors $\dim(a \cdot U_j \bigcap b \cdot U_j) = n$, comme $a \cdot U_j \bigcap b \cdot U_j \subseteq a \cdot U_i \bigcap b \cdot U_i$ donc $\dim(a \cdot U_i \bigcap b \cdot U_i) = n$ et $b \in Q_i$. Ainsi comme $\{U_i; i \in I\}$ est clos par intersection finie, $\{Q_i; i \in I\}$ aussi.

Lemme 3.31. Pour tout i, il existe j tel que $Q_j \subseteq Q_i$ et $Q_j \cdot Q_j \subseteq U_0$.

Démonstration. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe i_0 tel que pour tout j :

$$[\forall z \quad q_j(z) \longrightarrow q_{i_0}(z)] \longrightarrow \exists x \exists y \quad q_j(x) \wedge q_j(y) \wedge \neg u_0(x \cdot y)$$

où $q_i(x)$ désigne la définition de Q_i et $u_0(x)$ celle de U_0.

Montrons que $Z(x) = \{q_j(x) \wedge q_j(y) \wedge \neg u_0(x \cdot y) | \ j \in I \text{ tel que } Q_j \subseteq Q_{i_0}\}$ est consistent. Par compacité, il suffit de démontrer que toute partie finie l'est.

Soit $\bigwedge_{j \in I_0} (q_j(x) \wedge q_j(y)) \wedge \neg u_0(x \cdot y) (\star)$ où I_0 est fini. Comme $\{Q_j; j \in I\}$ est clos par intersection finie, il existe j_0 tel que $(\star)$ est équivalent à $q_{j_0}(x) \wedge q_{j_0}(y) \wedge \neg u_0(x \cdot y)$, qui est consistent. Donc $Z(x)$ est consistent. Donc il existe x, y tel que pour tout $j \in I$ $\vDash q_j(x) \wedge q_j(y) \wedge \neg u_0(x \cdot y)$ ie il existe x, y tel que $x \in H$ et $y \in H$ et $x \cdot y \notin U_0$. Absurde. □

On peut donc supposer $\forall i \in I \quad Q_i \cdot Q_i \subseteq U_0$.

Lemme 3.32. $\forall i \in I \quad H \cdot Q_i \subseteq Q_i$

Démonstration. On a $H \subseteq Q_i$ donc $H \cdot Q_i \subseteq Q_i \cdot Q_i \subseteq U_0$.

Soit $a \in H$, $b \in Q_i$ et soit c un point générique de H sur $M_0 \bigcup \{a;b\}$, $\dim(c/M_0ab) = n$ donc $\dim(a^{-1}c/M_0b) = n$. Comme $b \in Q_i$, $\dim(a^{-1}cU_i \bigcap bU_i) = n$, donc $\dim(cU_i \bigcap abU_i) = n$. Donc $\vDash \delta_i(c; a \cdot b)$. Ainsi $a \cdot b \in Q_i$. □

On pose $Q'_i = \{x \in Q_i | x \cdot Q_i \subseteq Q_i$ et $x^{-1} \cdot Q_i \subseteq Q_i\}$. Par le lemme 3.32, $H \subseteq Q'_i$, deplusQ'_i est un sous-groupe de G.

Ainsi $H = \bigcap_{i \in I} Q'_i$. □

Théorème 3.33. *Soit F une sous-structure géométrique de D, où D a l'élimination des imaginaires.*

On suppose que F est suffisamment saturé et a la propriété (S_1). Soit G un groupe définissable dans F.

Alors il existe H, G_0, H_0 et f vérifiant :
(i) H est un groupe définissable dans D avec paramètre dans F ;
(ii) G_0 est un sous-groupe définissable dans F, d'indice fini dans G ;
(iii) H_0 est un sous-groupe définissable dans F, d'indice fini dans $H(F)$;
(iv) f est un homomorphisme (définissable dans F) de G_0 dans H_0 avec un noyau central fini.

Démonstration. On suppose que $\dim G = n$. Soit A, H, a, a', b, b', c, c' donnés par le théorème 1.8. On remplace A par un petit sous-modèle élémentaire de F. Comme a et a' sont inter-algébriques, ils sont de même dimension sur A et comme ils sont génériques $\dim H = n$.

On pose $K = G \times H$. Soit $q = \mathrm{tp}(b, b'/A)$, on a $\dim q = n$. Soit $(a_1; a'_1)$ réalisant $\mathrm{tp}(a, a'/A, c, c')$ avec $a_1, a'_1 \downarrow a, a', b, b', c, c'A$. Soit par homogénéité$(b_1; b'_1)$ tel que $\mathrm{tp}(a_1, a'_1, b_1, b'_1, c, c'/A) = \mathrm{tp}(a, a', b, b', c, c'/A)$; En particulier $\mathrm{tp}(b_1 b'_1/A) = \mathrm{tp}(bb'/A)$ et $(a_1, a'_1) \cdot (b_1, b'_1) = (c, c')$.

On pose $a_2 = a_1^{-1} \cdot a$ et $a'_2 = (a'_1)^{-1} \cdot a'$. On a :

Lemme 3.34. On a $(a_2, a'_2) \cdot (b, b') = (b_1, b'_1)$, $\dim(a_2/A) = \dim(a_2, a'_2/A) = n$ et $(a_2, a'_2) \downarrow_A (b, b')$.

Démonstration. On a (de manière évidente) $(a_2, a'_2) \cdot (b, b') = (b_1, b'_1)$.

$$\dim(a/A) = \dim(a/Aa_1) = \dim(a_1^{-1} \cdot a/Aa_1) \leqslant \dim(a_1^{-1} \cdot a/A) \text{ donc } \dim(a_2/A) = n$$

$$\begin{aligned}
\dim(\bar{a_2}, \bar{a_1}, \bar{a}, \bar{b_1}, \bar{b}/A) &= \underbrace{\dim(\bar{a_2}/A, \bar{a_1}, \bar{a}, \bar{b_1}, \bar{b})}_{=0} + \underbrace{\dim(\bar{b_1}/A, \bar{a_1}, \bar{a}, \bar{b})}_{=0} + \dim(\bar{a_1}, \bar{a}, \bar{b}/A) \\
&= \dim(\bar{a_1}/A, \bar{a}, \bar{b}) + \dim(\bar{a}/A, \bar{b}) + \dim(\bar{b}/A) \\
&= \dim(\bar{a_1}/A) + \dim(\bar{a}/A) + \dim(\bar{b}/A) \\
&= 3n \\
&= \underbrace{\dim(\bar{a_1}, \bar{b_1}/A, \bar{a_2}, \bar{a}, \bar{b})}_{=0} + \dim(\bar{a_2}, \bar{a}, \bar{b}/A) \\
&= \dim(\bar{a_2}/A, \bar{a}, \bar{b}) + \dim(\bar{a}/A, \bar{b}) + \dim(\bar{b}/A) \\
&= \dim(\bar{a_2}/A, \bar{a}, \bar{b}) + 2n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim(\bar{a_2},\bar{a_1},\bar{a}/A) &= \dim(\bar{a_2}/A,\bar{a_1},\bar{a}/A) + \dim(\bar{a_1}/A,\bar{a}) + \dim(\bar{a}/A)\\
&= 0 + \dim(\bar{a_1}/A) + \dim(\bar{a}/A)\\
&= 2n\\
&= \dim(\bar{a_1}/A,\bar{a_2},\bar{a}) + \dim(\bar{a_2}/A,\bar{a}) + \dim(\bar{a}/A)\\
&= 0 + \dim(\bar{a_2}/A,\bar{a}) + n
\end{aligned}$$

On a $\bar{a_1} \underset{A,\bar{c}}{\downarrow} \bar{b}$ or $\bar{b_1} \in \operatorname{acl}(A,\bar{a_1},\bar{c})$, donc $\bar{b_1} \underset{A,\bar{c}}{\downarrow} \bar{b}$ or $\bar{b} \underset{A}{\downarrow} \bar{c}$. D'où $\bar{b_1} \underset{A}{\downarrow} \bar{b}$.

$$\begin{aligned}
\dim(\bar{a_2},\bar{b_1},\bar{b}/A) &= \dim(\bar{a_2}/A,\bar{b_1},\bar{b}) + \dim(\bar{b}/A,\bar{b_1}) + \dim(\bar{b_1}/A)\\
&= 0 + \dim(\bar{b}/A) + \dim(\bar{b_1}/A)\\
&= 2n\\
&= \dim(\bar{b_1}/A,\bar{a_2},\bar{b}) + \dim(\bar{a_2}/A,\bar{b}) + \dim(\bar{b}/A)\\
&= 0 + \dim(\bar{a_2}/A,\bar{b}) + n
\end{aligned}$$

Donc $\dim(\bar{a_2}/A,\bar{a},\bar{b}) = \dim(\bar{a_2}/A,\bar{a}) = \dim(\bar{a_2}/A,\bar{b}) = n$ et $\bar{a_2} \underset{A,\bar{a}}{\downarrow} \bar{b}$, comme $\bar{b} \underset{A}{\downarrow} \bar{a}$, on en déduit que $\bar{a_2} \underset{A}{\downarrow} \bar{b}$ et $\dim(\bar{a_2}/A) = n$. $\square$

On pose $St(q) = \{x \in K \mid \exists y \models q \text{ avec } x \downarrow_A y \text{ et } x \cdot y \models q\}$

Lemme 3.35. $St(q)$ est infiniment définissable sur$A$. De plus on a $St(q) = St(q)^{-1}$ et $\dim(St(q)) = n$.

Démonstration. Soit U un ensemble définissable dans q avec $\dim U = n$.
On pose $St(U) = \{x \in K \mid \dim(x \cdot U \bigcap U) = n\}(= \{x \in K \mid \dim(x^{-1} \cdot U \bigcap U) = n\})$.
Par 1.2 (ii) $St(U)$ est A-définissable. Montrons que $St(q) = \bigcap\{St(U) \mid U \text{ dans } q\}$.

Soit $x \in St(q)$. Soit $y \models q$ générique avec $x \downarrow y$ et $x \cdot y \models q$. En particulier $x \cdot y \in U$ et $y \in U$ donc $x \cdot y \in x \cdot U \bigcap U$, comme $\dim(x \cdot y) = n$ on a $x \in St(U)$.

Soit $x \in St(U)$ pour tout U dans q. Montrons que $\dim(q \bigcap x^{-1} \cdot q) = n$. Sinon $q \bigcap x^{-1} q(\bar{y}) \wedge \dim \bar{y} = n$ est inconsistent,

$$\text{i.e. } \{\varphi(\bar{y}) \mid \varphi \in q \bigcap x^{-1} q\} \bigcup \{\varphi(\bar{y}) \longrightarrow \dim \varphi \geqslant n \mid \varphi \text{ une } \mathcal{L}\text{-formule}\} \text{ est inconsistent}$$

Par compacité, il existerait $U \in q$ tel que $U \bigcap x^{-1} U(\bar{y})$ et $\dim(\bar{y}) \geqslant n$ soit inconsistent. Absurde. Soit alors $y \models q \bigcap x^{-1} q$ générique, alors $y \downarrow x$ et $x \cdot y \models q$.

Soit $x \in St(q)$. Soit $y \models q$ avec $y \downarrow_A x$ et $x \cdot y \models q$.

$$\dim(x \cdot y/A) \leqslant \dim(y/A) = \dim(y/A,x) = \dim(x \cdot y/A,x) \leqslant \dim(x \cdot y/A)$$

donc $x \cdot y \downarrow_A x$, donc $x^{-1} \in St(q)$.

Par le lemme 3.34, $(a_2; a_2') \in St(q)$ et $\dim(a_2; a_2') = n$, donc $\dim St(q) \geqslant n$. Soit $x \in St(q)$ et $y \models q$ tels que $y \downarrow x$ et $x \cdot y \models q$. Alors

$$\dim(x/A) = \dim(x/A,y) = \dim(x \cdot y/A,y) \leqslant \dim(x \cdot y/A) = \dim(q) = n$$

donc $\dim(St(q)) = n$. $\square$

Lemme 3.36. (i) $\forall x_1, x_2 \in St(q)$ avec $x_1 \downarrow x_2$ alors $x_1 \cdot x_2 \in St(q)$
(ii) On pose $Stab(q) = St(q) \cdot St(q)$. $Stab(q)$ est infiniment définissable (à paramètres dans A) est un sous-groupe de K, et $\dim(Stab(q)) = n$.
Si $x \in Stab(q)$ est générique alors $x \in St(q)$.
(iii) $Stab(q)$ est connexe (i.e. ne contient aucun sous-groupe A-définissable d'indice fini).

Démonstration. (i)/ Soit x_1, x_2 des réalisations A-indépendantes de $St(q)$. Alors $x_2^{-1} \in St(q)$. Soit y_2 réalisant q indépendant de x_2, et tel que $x_2^{-1} \cdot y_2 \vDash q$.
Soit y_1 réalisant q indépendant de x_1, et tel que $x_1 \cdot y_1 \vDash q$.

On note $r_1 = \mathrm{tp}(y_1/A, x_1)$ et $r_2 = \mathrm{tp}(y_2/A, x_2)$. Comme $\mathfrak{M}$ satisfait (S_1), par le théorème d'indépendance (voir Proposition 3.28) il existe $y \vDash r_1 \bigcup r_2$ tel que $y \downarrow_A x_1, x_2$. Donc on a $x_2^{-1} \cdot y \downarrow x_1, x_2$ et $(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_2^{-1} \cdot y) = x_1 \cdot y \vDash q$ donc $x_1 \cdot x_2 \in St(q)$.

(ii)/ $St(q)$ est clos par inverse donc $Stab(q)$ aussi. De plus $Stab(q) = \bigcap\{St(U) \cdot St(U) | U \text{ dans } q\}$. Pour montrer que c'est un sous-groupe, il reste à montrer que si $a, b, c \in St(q)$ alors $a \cdot b \cdot c \in Stab(q)$.

Soit $a, b, c \in St(q)$. Soit $b_1 \in St(q)$ et $\dim(b_1/A, a, b, c) = n$. On a par (i), $a \cdot b_1 \in St(q)$ et $b_1^{-1} \cdot b \in St(q)$. De plus $\dim(b_1^{-1} \cdot b/A, a, b, c) \leqslant \dim(b_1^{-1} \cdot b/A) \leqslant n = \dim(b_1/A, a, b, c) = \dim(b_1^{-1} \cdot b/A, a, b, c)$. Donc $b_1^{-1} \cdot b \downarrow_A c$. Ainsi $b_1^{-1} \cdot b \cdot c \in St(q)$ et $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b_1) \cdot (b_1^{-1} \cdot b \cdot c) \in Stab(q)$.

On a clairement $\dim(Stab(q)) \geqslant n$. Soit $e = a \cdot b \in Stab(q)$ avec $a, b \in St(q)$. Soit $c \in St(q)$ avec $c \downarrow_A a, b$ et $\dim(c/A) = n$. Alors $b \cdot c \in St(q)$ et $b \cdot c \downarrow_A a$ donc $a \cdot b \cdot c \in St(q)$ et $a \cdot b \cdot c \in St(q)$, d'où $\dim(a \cdot b \cdot c/A, c) \leqslant n$. Mais $\dim(e/A) = \dim(e/A, c) = \dim(a \cdot b/A, c) = \dim(a \cdot b \cdot c/A, c) \leqslant n$. D'où $\dim(e/A) \leqslant n$ et $\dim(Stab(q)) = n$.

Soit $x \in Stab(q)$ avec $\dim(x/A) = n$ et $x = a \cdot b$ où $a, b \in St(q)$. Soit $c \in St(q)$ tel que $\dim(c/A, a, b) = n$. On a $a \cdot b = (a \cdot c) \cdot (c^{-1} \cdot b)$ et $\dim(a \cdot c/A) = \dim(c^{-1} \cdot b/A) = n$. Du fait que $c \downarrow_A a, b$, on tire d'une part $c \downarrow_A a$ donc $a \cdot c \downarrow a$ et d'autre part $c \downarrow_{A,a} b$ donc $a \cdot c \downarrow_{A,a} b$. Ainsi $a \cdot c \downarrow_A a, b$ donc $a \cdot c \downarrow a \cdot b$.

$$\dim(c^{-1} \cdot b/A, a \cdot c) = \dim(a \cdot c \cdot c^{-1} \cdot b/A, a \cdot c) = \dim(a \cdot b/A, a \cdot c) = \dim(a \cdot b/A) = n = \dim(c^{-1} \cdot b/A)$$

donc $c^{-1} \cdot b \downarrow a \cdot c$ et par (i) $x = (a \cdot c) \cdot (c^{-1} \cdot b) \in St(q)$.

(iii)/ Raisonnons par l'absurde, et considérons C un sous-groupe infiniment A-définissable de $Stab(q)$ d'indice fini (dans $Stab(q)$). C est défini par $\{C_l | l \in L\}$ considéré clos par intersection finie. C est d'indice fini, donc il existe $g_1, ..., g_n \in Stab(q)$ tels que

$$Stab(q) = \dot{\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n}} g_i C \quad \text{et} \quad g_i C \bigcap g_j C = \varnothing \text{ si } i \neq j$$

En particulier $\{C_l(g_i^{-1}x) | l \in L\} \bigcup \{C_l(g_j^{-1}x) | l \in L\}$ est inconsistent pour $i \neq j$, par compacité, il existe C_l telle que $C_l(g_i^{-1}x) \wedge C_l(g_j^{-1}x)$ est inconistent. C est défini par $C_l \wedge Stab(q)$. [Si $x \in C$ alors $\vDash C_l(x)$. Si $x \notin C$ alors il existe g_i tel que $x \in g_i C$, en particulier $\vDash C_l(g_i^{-1}x)$ et $\nvDash C_l(x)$.]

Comme C est d'indice fini $\dim C = n$. Soit $c \in C$ générique sur A, donc $c \in St(q)$ par (ii). Ainsi il existe $a \vDash q$ avec $a \downarrow_A c$ et $c \cdot a \vDash q$. Soit $d \in Stab(q) \setminus C$ générique sur

A indépendant de c, donc $d \in St(q)$ et il existe $a' \models q$ tel que $a' \downarrow_A d$ et $d \cdot a' \models q$. Par le théorème d'indépendance, il existe $b \models q$ tels que $b \downarrow_A c, d$, $c \cdot b \models q$ et $d \cdot b \models q$. On a $b \downarrow_A c \cdot b$ et $b \downarrow_A d \cdot b$, donc toujours par le théorème d'indépendance, il existe e tel que

$$\mathrm{tp}(b; e/A) = \mathrm{tp}(b; d \cdot b/A) \quad \text{et} \quad \mathrm{tp}(c \cdot b; e/A) = \mathrm{tp}(c \cdot b; b/A)$$

Ainsi d'une part e et b ne sont pas dans la même classe modulo C, et $c \cdot b$ et e sont dans la même classe. Absurde. □

On note G^0 la projection de $Stab(q)$ sur G, et $H(F)^0$ la projection de $Stab(q)$ sur $H(F)$. G^0 et $H(F)^0$ sont infiniment définissables et $\dim(G^0) = \dim(H(F)^0) = n$ car $a_2 \in G^0$ et $a_2' \in H(F)^0$.

On pose $K_0 = \{x \in G^0; (x; 0) \in Stab(q)\}$ et $K_1 = \{x \in G^0; (0; x) \in Stab(q)\}$. Supposons que K_0 est infini. Soit $x \in K_1$ générique au dessus $A \cup \{a_2; a_2'\}$. Comme $x \downarrow_A a_2, a_2'$ et x et a_2 sont génériques, on a alors $x \downarrow_A a_2 \cdot x$. On en déduit d'une part que

$$0 = \dim(a_2/A, a_2') = \dim(a_2/A, a_2', x) = \dim(a_2 \cdot x/A, a_2', x) = \dim(a_2 \cdot x/A, a_2')$$

d'où $x \cdot a_2 \in \mathrm{acl}(A, a_2')$. D'autre part $x \downarrow_A a_2, a_2'$, $x \downarrow_{A,a_2} a_2'$, $x \cdot a_2 \downarrow_{A,a_2} a_2'$ et enfin $x \cdot a_2 \downarrow_A a_2'$ car $x \cdot a_2 \downarrow a_2'$. Absurde. Donc K_0 est fini, de même K_1 est fini.

$K_0 \times \{0\}$ et $\{0\} \times K_1$ sont des sous-groupes normaux finis donc les centralisateurs $C_{Stab(q)}(K_0 \times \{0\})$ et $C_{Stab(q)}(\{0\} \times K_1)$ sont des sous-goupes normaux d'indice fini. Comme $Stab(q)$ est connexe, $C_{Stab(q)}(K_0 \times \{0\}) = C_{Stab(q)}(\{0\} \times K_1) = Stab(q)$. Donc K_0 et K_1 sont centraux. Ainsi $Stab(q)$ définit un isomorphisme entre G^0/K_0 et $H(F)^0/K_1$.

Le problème est que G^0/K_0 et $H(F)^0/K_1$ sont infiniment définissables.

Par la proposition 3.29 $Stab(q) = \bigcap_{i \in I} Q_i$ où les Q_i sont des groupes définissables. On peut supposer $\dim Q_i = n$ pour tout i. Par compacité, on peut choisir Q sous-groupe définissable de $G \times H(F)$ tel que $Stab(q) \subseteq Q$, $\dim Q = n$ et $\{x \,|(x; 0) \in Q\} = K_0$ et $\{x|(0; x) \in Q\} = K_1$. On note G_0 la projection de Q sur la première coordonnée, et H_0 la projection sur la seconde coordonnée. On a $G^0 \subseteq G_0$ donc $\dim G_0 = n$ et par (S_1) G_0 est d'indice fini. De même H_0 est d'indice fini dans $H(F)$. On peut choisir Q tel que K_0 est dans le centre de G_0 et K_1 est dans le centre de H_0. Donc Q définit un isomorphisme entre G_0/K_0 et H_0/K_1. On doit remplacer H_0/K_1 par un groupe définissable. On pose $H_1 = C_H(K_1)$, H_1 est dans D, définissable à paramètres dans F et K_1 est dans le centre de H_1. Comme H est un groupe algébrique, $H = H_1$.

Par l'élimination des imaginaires dans D, H_1/K_1 est F-définissablement isomorphe à un sous-groupe H_2 par f. On a $\dim(H_2(F)) = n$ et $\dim(f(H_0/K_1)) = n$. Par la propriété (S_1), $f(H_0/K_1)$ est d'indice fini dans $H_2(F)$. Ainsi on a dans F un isomorphisme de G_0/K_0 avec un sous-groupe d'indice fini dans $H_2(F)$. □

Théorème 3.37. Soit G un groupe définissable dans un corps pseudo-fini. Alors il existe un groupe algébrique H défini sur F et une isogénie définissable entre un sous-groupe d'indice fini de G et $H(F)$.

Bibliographie

[1] Elisabeth Bouscaren. Model theoretic versions of weil's theorem on pregroups. In A Nesin and A Pillay, editors, *Model theory of groups*, pages 177–185. Notre Dame Press, 1989.

[2] Zoé Chatzidakis, Lou van den Dries, and Angus Macintyre. Definable sets over finite fields. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 427 :107–135, 1992.

[3] Ehud Hrushovski and Anand Pillay. Groups definable in local fields and pseudo-finite fields. *Israël Journal of Mathematics*, 84 :203–262, 1994.

[4] Anand Pillay. On groups and fields definable in o-minimal structures. *Journal of Pure Applied Algebra*, 53 :239–255, 1988.

[5] Anand Pillay. On fields definable in $\mathbb{Q}_p$. *Archive for Mathematical Logic*, 29 :1–7, 1989.

[6] Anand Pillay. *Geometric Stability Theory.* Oxford Science Publications, 1996.