MODÈLES D'ÉCONOMIE URBAINE: ÉQUILIBRE ET JEUX À CHAMPS MOYEN

ANNETTE DUMAS

Résumé. Ce rapport expose le travail de recherche effectué lors du stage encadré par Filippo Santambrogio à l'Institut de Camille Jordan du 1er avril 2021 au 30 juillet 2021 dans le cadre du Master 2 Mathématiques avancées à l'ENS de Lyon et dans l'optique de faire la thèse sur les modèles de jeux à champ moyen pour le marché immobilier et l'économie urbaine dans ce même laboratoire avec le même encadrant. Nous montrons ici l'existence d'un équilibre pour deux problèmes de jeux à champ moyen de type variationnel où les trajectoires des individus sont constantes par morceaux et où on considère le nombre de sauts (ou déménagements) effectués par les agents. Grâce aux hypothèses faites sur la fonctionnelle, le premier problème peut être résolu sur un espace de dimension finie. Le second problème est une extension du premier et pourra être résolu sur un espace de dimension infinie. Dans les deux cas, nous utiliserons le théorème de point fixe de Kakutani pour les multifonctions.

1. Introduction

La théorie des jeux à champ moyen a été introduite par Lasry et Lions dans [8] et [9]. Elle consiste en l'étude de l'évolution d'une population où chaque individu choisit une stratégie qui permet de satisfaire au mieux ses préférences. Les individus sont indistinguables et négligeables. Dans la théorie des jeux, on considère un nombre fini N de joueurs rationnels qui prévoient que chaque autre joueur ait un comportement rationnel aussi. L'équilibre de Nash correspond à une stratégie optimale où chaque joueur maximise son gain tout en tenant compte de la stratégie des autres joueurs. Le risque de ce modèle est que lorsqu'un joueur change de stratégie, cela peut modifier le comportement des autres. Or, en économie, par exemple sur le marché financier où il y a un très grand nombre de participants, il est peu probable qu'un individu ayant un comportement déviant change la tendance globale. Pour pallier ce problème, la théorie des jeux avec un continuum de joueurs a vu le jour dans la seconde moitié du $20^{\text{ème}}$ siècle notamment avec le travail d'Aumann [1]. En faisant tendre le nombre de joueurs N vers l'infini, Lasry et Lions ont montré que l'équilibre de Nash pour un nombre infini de joueurs se traduit en une solution (ϕ, ρ) d'un système constitué d'une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman et d'une équation de continuité où ϕ est la fonction valeur d'un problème d'optimisation et ρ la densité des joueurs.

Pour résoudre ce système qui offre un point de vue Eulérien de la solution, il est possible d'opter pour un point de vue Lagrangien en résolvant un problème de minimisation qui est la forme variationnelle de l'équation. Par l'exemple, dans [3], on introduit le problème où chaque agent cherche sa trajectoire optimale x évoluant

Date: avril à juillet 2021.

dans un domaine Ω qui résoud

$$\min_{\{x\ ;\ x(0)=x_0\}} \int_0^T \left(\frac{|x'(t)|}{2} + g(x, \rho_t(x(t)) \right) dt + \psi(x(T)),$$

pour un point x_0 donné et où g est une fonction croissante de la densité ρ_t au temps t qui modélise la pénalisation par l'embouteillage. La fonction valeur ϕ de ce problème est donnée par

$$\phi(t_0, x_0) := \min\{\int_{t_0}^T \left(\frac{|x'(t)|}{2} + g(x, \rho_t(x(t)) \right) dt + \psi(x(T))\ ;\ x\colon [t_0, T] \to \Omega,\ x(t_0) = x_0\}.$$

Grâce à la théorie du contrôle optimal, on sait que la fonction valeur ϕ résoud l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 & = & h, \\ \phi(T, x) & = & \phi(x). \end{array} \right. \tag{1}$$

Les trajectoires optimales x de (1) vérifient

$$x'(t) = -\nabla \phi(t, x(t)).$$

Le principe de conservation de la masse, connu en mécanique des fluides, nous permet de donner l'équation de continuité vérifiée par ρ :

$$\partial_t \rho - \nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = 0.$$

On obtient ainsi le système des jeux à champs moyen

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 & = & h, \\ \partial_t \rho - \nabla \cdot (\rho \nabla \phi) & = & 0, \\ \phi(T, x) & = & \phi(x), \\ \rho(0, x) & = & \rho_0(x). \end{array} \right.$$

Dans ce rapport, on s'inspire d'un problème variationnel du type

$$\min_{\{\gamma;\ \gamma(0)=x_0\}} \int_0^T L(t, \gamma(t), \gamma'(t)) + F(\gamma(t), e_t \sharp Q) dt + \psi(\gamma(T)), \tag{2}$$

où $e_t\colon AC(0, T; \bar{\Omega}) \to \bar{\Omega}$ est la fonction évaluation en $t \in [0, T]$ et Q est une mesure de probabilité sur l'ensemble $AC(0, T; \bar{\Omega})$ telle que $e_0 \sharp Q = m_0 \in P(\bar{\Omega})$. Pour une mesure de probabilité $Q \in P(AC(0, T; \bar{\Omega}))$ donnée, on cherche une mesure de probabilité $\tilde{Q}$ dont le support est contenu dans l'ensemble des minimiseurs de (2). Un *équilibre* pour le problème (2) est une mesure $Q \in P(AC(0, T; \bar{\Omega}))$ telle que si on considère le problème (2) avec Q comme distribution de départ, alors le support de Q est aussi contenu dans l'ensemble des minimiseurs de (2). Grâce à ce point de vue variationnel et certaines hypothèses sur F, L et ψ, Cannarsa et Capuani [5] ont démontré l'existence d'un équilibre au problème (2) sur un domaine restreint $\bar{\Omega}$ grâce au théorème de Kakutani, alors que l'existence n'avait été prouvé que pour des domaines particuliers comme $\mathbb{R}^d$ et le tore (par exemple, voir [9]).

Cependant, si nous voulons modéliser des dynamiques urbaines comme par exemple les déménagements des habitants dans une ville en fonction du revenu, de la densité de la population ou bien de l'emplacement, alors ce modèle n'est pas satisfaisant. En effet, la solution obtenue est absolument continue. Or, les habitants ne changent pas de résidence continûment. La trajectoire des individus serait plutôt une courbe constante par morceaux. Les résultats actuels en théorie des jeux à champs moyen portant sur les courbes absolument continues ne peuvent s'appliquer à des courbes discontinues. A terme, nous étudierons des problèmes plus complexes en prenant en compte des paramètres comme la position et la taille des logements ou la position dans un espace de préférences, ce dernier paramètre évoluant de manière continue, tandis que l'autre non. Dans ce rapport seulement, nous introduisons des notions mathématiques relatives aux mouvements par « sauts » nécessaires à l'étude de ces modèles.

L'idée du problème que nous allons étudier ici est la suivante. L'ensemble des courbes dans lequel nous cherchons la solution est l'ensemble des courbes constantes par morceaux. Sur cet ensemble, nous désignons le nombre de sauts qu'effectue chaque courbe γ par

$$S(\gamma) := \sharp\{x \in \bar{\Omega};\ \gamma \text{ est discontinue en } x\}.$$

Dans un premier temps, nous montrons l'existence d'un équilibre pour le problème de minimisation

$$\min_{\{\gamma;\ \gamma(0)=x_0\}} S(\gamma) + \int_0^T F(\gamma(t), e_t\sharp Q)dt + \psi(\gamma(T)), \tag{3}$$

où F et ψ sont supposées continues et bornées, ce qui nous permettra de résoudre le problème sur un espace de dimension finie.
Dans un second temps, nous élargissons ce résultat avec l'existence d'un équilibre en dimension infinie pour le problème

$$\min_{\{\gamma;\ \gamma(0)=x_0\}} S(\gamma) + \int_0^T \frac{dI}{dm}(e_t\sharp\tilde{Q})(\gamma(t))dt + \int_0^T F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt, \tag{4}$$

où F est continue en ses deux variables et I est une fonction convexe qui admet une variation première. Ce second problème est intéressant, car le cas continu (cf. [6]) et le cas variationnel (cf. [3]) ont été étudiés séparément. Ici, nous abordons ces deux cas simultanément. Malgré la faible régularité de dI/dm, nous pouvons grâce à la régularité de F montrer l'existence d'un équilibre.

Similairement à [5], nous utiliserons le théorème de point fixe de Kakutani pour montrer l'existence d'un équilibre à chacun de ces problèmes.

2. Un modèle simple

Cette section consiste en la preuve de l'existence d'un équilibre pour le problème (3). Tout d'abord, nous introduisons les notations adaptées à ce problème qui pourra être résolu en dimension finie et l'énoncé du théorème. Nous présentons ensuite quelques résultats sur les multifonctions, suivis d'une partie regroupant des propriétés sur la fonctionnelle à minimiser et des propriétés de régularités. En rassemblant tous ces arguments, nous terminons cette section avec la preuve du théorème.

Avant de commencer, expliquons pourquoi nous pouvons résoudre ce problème en dimension finie. Soit $\tilde{\gamma}$ un minimiseur de (3). En évaluant la fonctionnelle en une trajectoire constante égale à x_0, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} S(\tilde{\gamma}) + \int_0^T F(\tilde{\gamma}(t), e_t\sharp Q)dt + \psi(\tilde{\gamma}(T)) &\leq 0 + \int_0^T F(x_0, e_t\sharp Q)dt + \psi(x_0) \\ &\leq T \sup_{\bar{\Omega}\times P(\bar{\Omega})} F + \sup_{\bar{\Omega}} \psi, \end{aligned}$$

qui donne une borne uniforme sur l'ensemble $\{S(\tilde{\gamma})\ ;\ \tilde{\gamma}$ minimiseur de (3)$\}$. Notons N cette borne arrondie à l'entier supérieur. En nous plaçant dans l'ensemble des courbes constantes par morceaux faisant au plus N sauts, nous pouvons représenter chaque courbe par un $2N$-uplet où les N premières coordonnées représentent les positions prises par la courbe et les N dernières représentent les durées pendant lesquelles la courbe occupe chaque position.

2.1. **Notations et énoncé du théorème.** Notons Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ décrivant l'espace d'une ville.

Soit $T > 0$ fixé. On définit $S_N = \{(a_1, \ldots, a_N) \in (\mathbb{R}^+)^N\ ;\ a_1 + \ldots + a_N \leq T\}$, le simplexe de dimension N où chaque coordonnée représente le temps passé dans un endroit.

La trajectoire d'un individu au cours du temps est décrite par $X = (x_0, \ldots, x_{N-1}, a_1, \ldots, a_N) \in \bar{\Omega}^N \times S_N$, où l'agent habite la position x_i au temps $t \in [0,T]$ tel que $\sum_{j=1}^{i} a_j \leq t < \sum_{j=1}^{i+1} a_j$.

Pour chaque $t \in [0,T]$, on définit la fonction évaluation e_t par

$$\begin{aligned} e_t \colon \bar{\Omega}^N \times S_N &\longrightarrow \bar{\Omega} \\ X &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

où t vérifie $\sum_{j=1}^{i} a_j \leq t < \sum_{j=1}^{i+1} a_j$ pour $i \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Soit $m_0 \in P(\bar{\Omega})$ une mesure de probabilité sur $\bar{\Omega}$. Nous désignerons par $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ l'ensemble des mesures de probabilités Q sur $\bar{\Omega}^N \times S_N$ telles que $e_0\sharp Q = m_0$, i.e la mesure image de Q par l'application e_0 est m_0.

La fonction S décrivant le nombre de changements de position de X est définie par

$$\begin{aligned} S \colon \bar{\Omega}^N \times S_N &\longrightarrow \mathbb{N} \\ X &\longmapsto \sharp\{i \in [\![0\ ;\ N-2]\!]; x_i \neq x_{i+1}\}. \end{aligned}$$

Pour fluidifier la discussion, on appelle « sauts » ces changements de position.

Pour $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$, la fonctionnelle J_Q que nous considérons est

$$J_Q(X) = S(X) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(m_t, x_i)dt + \psi(x_N),\ \forall X \in \bar{\Omega}^N \times S_N, \tag{5}$$

où $t_0 = 0$, $t_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $m_t = e_t\sharp Q$.

Soient $x_0 \in \bar{\Omega}$ et $s \in [0,T]$. La fonction valeur de J_Q est donnée par

$$\begin{aligned} \Phi_Q(x_0, s) = \min_{X \in \{x_0\} \times \bar{\Omega}^{N-1} \times S_N} S(X,s) &+ \int_s^{t_j} F(m_t, x_{j-1})dt \\ &+ \sum_{i=j}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(m_t, x_i)dt + \psi(x_N), \end{aligned}$$

où $t_{j-1} \leq s < t_j$ et $S(X,s)$ est le nombre de sauts effectués par X sur l'intervalle de temps $[s,T]$.

L'ensemble des minimiseurs de $\Phi_Q(x_0, 0)$ (ou plus simplement $\Phi_Q(x_0)$) sera noté $\Gamma_Q[x_0]$.

Le résultat que nous montrons dans cette section est résumé dans le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Soient $F\colon \bar{\Omega} \times P(\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}$ et $\psi\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, donc bornées. Notons $\mathcal{P}(P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N))$ l'ensemble des parties de $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$.*

Soit $H\colon P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N) \to \mathcal{P}(P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N))$ la multifonction telle que

$$H(Q) = \{\tilde{Q} \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N); \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) d\tilde{Q}(X) = \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0)\}.$$

Alors H admet un point fixe $\bar{Q}$ tel que $\bar{Q} \in H(\bar{Q})$.

2.2. **Résultats intermédiaires sur les multifonctions.** Une condition nécessaire pour appliquer le théorème de Kakutani est que l'image de H ne peut pas être l'ensemble vide. C'est pourquoi nous aurons besoin du lemme énoncé ci-après qui donnera l'existence d'une sélection mesurable de minimiseurs de J_Q pour tout Q.

Définition 2.2. *(i) Une* multifonction *est une application $A \to \mathcal{P}(B)$, où $(A, \mathfrak{A})$ est un espace mesurable, B un espace métrique séparable et $\mathcal{P}(B)$ l'ensemble des parties de B.*

(ii) Une multifonction $\Gamma\colon A \to \mathcal{P}(B)$ est dite mesurable*, si pour tout ouvert $U \subset B$, on a $\{a \in A; \Gamma(a) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathfrak{A}$.*

(iii) Soit $\Gamma\colon A \to \mathcal{P}(B)$ une multifonction. Une sélection de Γ *est une fonction $\sigma\colon A \to B$ telle que pour tout $a \in A$, $\sigma(a) \in \Gamma(a)$.*

(iv) Une multifonction $\Gamma\colon A \to \mathcal{P}(B)$ a un graphe fermé*, lorsque l'ensemble $\{(a, b);\ b \in \Gamma(a)\}$ est fermé.*

Lemme 2.3. *Soient $(A, \mathfrak{A})$ un espace mesurable, B un espace métrique séparable et $\Gamma\colon A \to \mathcal{P}(B) - \{\emptyset\}$ une multifonction mesurable.*

Alors Γ admet une sélection mesurable.

Démonstration. Une preuve de ce lemme est donnée dans la référence [7, Théorème III.6.]. □

Lemme 2.4. *Soient $(A, \mathfrak{A})$ un espace mesurable, B un espace métrique séparable et $\Gamma\colon A \to \mathcal{P}(B)$ une multifonction qui a un graphe fermé. Lorsque les boules fermées de B ne sont pas compactes, nous supposerons en plus qu'il existe un compact $\mathcal{K} \subset B$ tel que $\bigcup_{a \in A} \Gamma(a) \subset \mathcal{K}$.*

Alors Γ est mesurable.

Démonstration. Comme B est un espace métrique, sa topologie est engendrée par les boules ouvertes $\mathcal{B}(x, R)$ centrée en $x \in B$ de rayon $R \in \mathbb{R}^+$ et toute boule ouverte peut s'écrire comme réunion dénombrable de fermés. L'objectif est de montrer que pour tout ouvert $U \subset B$, l'ensemble $E := \{a \in A; \Gamma(a) \cap U \neq \emptyset\}$ est mesurable. Il suffit alors de montrer cela pour toute boule ouverte de B.

Soit $x \in B$ et $R \in \mathbb{R}^+$ tels que $\mathcal{B}(x, R) \subset B$. Puisque B est un espace métrique, on peut écrire $\mathcal{B}(x, R)$ comme réunion dénombrable de fermés, par exemple,

$$\mathcal{B}(x, R) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k}),$$

où $\mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon $R - \frac{1}{k}$.
Ainsi, pour tout $a \in A$,

$$\Gamma(a) \cap \mathcal{B}(x, R) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (\Gamma(a) \cap \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})).$$

Si $E = \{a \in A; \Gamma(a) \cap \mathcal{B}(x, R) \neq \emptyset\}$ est vide, alors cet ensemble est bien mesurable. Sinon, montrons que cet ensemble est une union dénombrable de fermés, et par conséquent, un ensemble mesurable. Notons $E_k := \{a \in A; \Gamma(a) \cap \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k}) \neq \emptyset\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons que E_k est fermé.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(a_n)_n$ une suite de E_k convergeant vers $a \in A$. Montrons que $a \in E_k$.

Comme pour tout n, $a_n \in E_k$, alors il existe $b_n \in \Gamma(a_n) \cap \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$. Lorsque $\mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$ est compact, alors on peut extraire une sous-suite de $(b_n)_n$ convergeant vers $b \in \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$ et comme Γ a un graphe fermé, on en déduit que $b \in \Gamma(a)$. Donc l'ensemble $\Gamma(a) \cap \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$ est non-vide, ce qui montre que $a \in E_k$. Donc E_k est fermé.

Si $\mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$ n'est pas compact, alors la suite $(b_n)_n$ est contenue dans le compact $\mathcal{K}$. Il existe donc une sous-suite de $(b_n)_n$ convergeant vers $b \in \mathcal{K}$. Comme Γ a un graphe fermé et la boule $\mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$ est fermée, alors la limite b appartient à $\Gamma(a) \cap \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$. Donc $\Gamma(a) \cap \mathcal{BF}(x, R - \frac{1}{k})$ est non-vide et ainsi, $a \in E_k$ ce qui implique aussi que E_k est fermé.

Nous avons montré que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble E_k est fermé. Or, $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} E_k$ est une union dénombrable de fermés, donc E est mesurable. Ainsi, la multifonction Γ est mesurable.

$\square$

2.3. **Résultats préliminaires.** Nous établirons dans la proposition 2.7 que J_Q admet un minimiseur. Pour cela, nous avons besoin de la régularité de J_Q comme suit :

Proposition 2.5. *Pour tout Q, la fonction J_Q est semi-continue inférieurement (noté désormais s.c.i.).*

Démonstration. Par hypothèse, F et ψ sont des fonctions continues, et donc s.c.i. .

Montrons maintenant que S est s.c.i. . Soit $X_0 \in \bar{\Omega}^N \times S_N$ et notons $p := S(X_0) \in \mathbb{N}$.

Ecrivons les coordonnées de X_0 comme ceci $(x_0, \ldots, x_{N-1}, a_1, \ldots, a_N)$.

Prenons $\delta := \min_i\{(x_{i+1} - x_i)/4 \;;\; x_i \neq x_{i+1}\}$ et définissons un voisinage $\mathcal{U}$ de X_0 tel que $\mathcal{U} = [x_1 - \delta \;;\; x_1 + \delta] \times \cdots \times [x_N - \delta \;;\; x_N + \delta] \times S_N - \{0\}$. De cette façon, lorsqu'il y a un saut dans X_0, ce saut existe aussi dans chaque élément de $\mathcal{U}$.

Donc pour tout $X \in \mathcal{U}$, on a $p \leq S(X)$.

Donc S est bien s.c.i., et donc finalement J_Q est s.c.i. . $\square$

Remarque 2.6. *Cette preuve montre que S est s.c.i. .*

Proposition 2.7. *Soient $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ et $x_0 \in \bar{\Omega}$ fixés. Alors il existe une solution $X \in \bar{\Omega}^N \times S_N$ au problème $\Phi_Q(x_0)$ de condition initiale x_0, autrement dit, J_Q admet un minimiseur pour la condition initiale x_0.*

Démonstration. Notons $M := \Phi_Q(x_0)$. Soit $(X_n)_n \subseteq \bar{\Omega}^N \times S_N$ une suite minimisante de M telle que $J_Q(X_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} M$.

L'ensemble $\{x_0\} \times \bar{\Omega}^{N-1} \times S_N$ étant compact, il existe une suite extraite $(X_{n_k})_k$ de $(X_n)_n$ et X tels que $X_{n_k} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} X$.

Comme J_Q s.c.i. (Proposition 2.5), on a

$$J_Q(X) \leq \varliminf_k J_Q(X_{n_k}) = M.$$

Donc X est un minimiseur J_Q, d'où l'existence d'une solution au problème $\Phi_Q(x_0)$.
$\square$

Ensuite, nous aurons besoin de montrer que l'image de H n'est pas l'élément vide. Pour Q donné, si $\eta\colon x_0 \mapsto \Gamma_Q[x_0]$ admet une sélection mesurable, alors nous pourrons définir une mesure $\tilde{Q}$ telle que son support est l'image de cette sélection et ainsi prouver que $H(Q)$ est non-vide.

La proposition suivante montre que pour tout Q, $\Phi_Q(\cdot)$ est continue. Cela entraîne la mesurabilité de $\eta\colon x_0 \mapsto \Gamma_Q[x_0]$ (Proposition 2.9). Ainsi, nous aurons l'existence d'une sélection mesurable grâce au lemme 2.3.

Proposition 2.8. *Soit $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ fixé. La fonction $\Phi_Q(\cdot)$ est continue.*

Démonstration. Soit $(x_{0,n})_n$ une suite dans $\bar{\Omega}$ qui converge vers x_0. Montrons que $J_Q(x_{0,n},\cdot)$ Γ-converge vers $J_Q(x_0,\cdot)$, ce qui entraînera $\Phi_Q(x_{0,n}) \longrightarrow \Phi_Q(x_0)$.

(i) Γ-$\liminf$.

Soit $(X_n)_n$ une suite dans $\bar{\Omega}^{N-1} \times S_N$ qui converge vers X.

Grâce à la proposition 2.5, nous savons que J_Q est semi-continue inférieurement. Donc

$$J_Q(x_0, X) \leq \varliminf_n J_Q(x_{0,n}, X_n)$$

ce qui prouve la première condition de la Γ-convergence.

(ii) Γ-$\limsup$.

Soit $X = (x_1, \ldots, x_{N-1}, a_1, \ldots, a_N) \in \bar{\Omega}^{N-1} \times S_N$.

Si $x_0 \neq x_1$, définissons $(X_n)_n$ la suite constante égale à X.

On a

$$\begin{aligned} J_Q(x_{0,n}, X_n) =& J_Q(x_{0,n}, X) \\ =& S(x_{0,n}, X) + \int_0^{a_1} F(m_t, x_{0,n})dt \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(m_t, x_i)dt + \psi(x_N). \end{aligned}$$

Or,

$$S(x_{0,n}, X_n) = S(x_{0,n}, X) \leq S(x_0, X),$$

et comme F est continue et bornée, le théorème de convergence dominée entraîne

$$\int_0^{a_1} F(m_t, x_{0,n})dt \xrightarrow[n]{} \int_0^{a_1} F(m_t, x_0)dt.$$

Donc $\varlimsup_n J_Q(x_{0,n}, X_n) \leq J_Q(x_0, X)$.

Si $x_0 = x_1$ et $x_1 \neq x_2$, définissons la suite $(X_n)_n$ telle que
$X_n = (x_{0,n}, x_2, \ldots, x_{N-1}, a_1, \ldots, a_N)$.

Ainsi, on a

$$S(x_{0,n}, X_n) \leq S(x_0, X).$$

En appliquant le théorème de convergence dominée à l'intégrale de F, on obtient

$$\varlimsup_n J_Q(x_{0,n}, X_n) \leq J_Q(x_0, X).$$

Si j est tel que $x_0 = x_1 = \ldots = x_j$ et $x_j \neq x_{j+1}$, on définit
$X_n = (x_{0,n}, \ldots, x_{0,n}, \ldots, x_{j+1}, \ldots, x_{N-1}, a_1, \ldots, a_N)$. On obtient de même

$$\varlimsup_n J_Q(x_{0,n}, X_n) \leq J_Q(x_0, X).$$

Finalement, nous avons montré que pour tout X, il existe une suite $(X_n)_n$ convergeant vers X, telle que

$$\overline{\lim_n}\ J_Q(x_{0,n}, X_n) \leq J_Q(x_0, X).$$

Donc la condition Γ-lim sup de la Γ-convergence est vérifiée.

En conclusion, nous avons montré que pour tout suite $x_{0,n} \longrightarrow x_0$, la fonction $J_Q(x_{0,n}, \cdot)$ Γ-converge vers $J_Q(x_0, \cdot)$. Par conséquent, $\Phi_Q(x_{0,n})$ converge vers $\Phi_Q(x_0)$. □

Proposition 2.9. *Soit $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$. La multifonction*

$$\begin{aligned} \eta\colon \bar{\Omega} &\to \mathcal{P}(\bar{\Omega}^N \times S_N) \\ x_0 &\mapsto \Gamma_Q[x_0]. \end{aligned}$$

est mesurable.

Démonstration. Pour montrer cela, montrons que le graphe de η est fermé, ce qui entraînera la mesurabilité de η grâce au lemme 2.4.

Soit $(x_{0,n})_n$ une suite dans $\bar{\Omega}$ convergeant vers x_0 et $(X_n)_n$ une suite de minimiseurs telle que $X_n \in \Gamma_Q[x_{0,n}]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et qui converge vers $X \in \bar{\Omega}^N \times S_N$.

Montrons que $X \in \Gamma_Q[x_0]$.

La continuité de Φ_Q montrée dans la proposition 2.8 donne

$$J_Q(X_n) = \Phi_Q(x_{0,n}) \underset{n}{\longrightarrow} \Phi_Q(x_0).$$

Comme la fonction J_Q est semi-continue inférieurement (Proposition 2.5), nous avons

$$J_Q(X) \leq \underline{\lim_n}\ J_Q(X_n) = \Phi_Q(x_0),$$

donc $X \in \Gamma_Q[x_0]$.

Ainsi, le graphe de η est fermé. Donc par le lemme 2.4, η est mesurable. □

Une condition nécessaire du théorème de Kakutani est que le graphe de H est fermé. Si $(Q_n)_n$ est une suite telle que $Q_n \to Q$, et $(K_n)_n$ une suite telle que $K_n \in H(Q_n)$ et $K_n \to K$, alors il faut montrer que $K \in H(Q)$. Le lemme ci-après permet de montrer que J_{Q_n} Γ-converge vers J_Q. Ensuite, grâce à la Γ-convergence de $(J_{Q_n})_n$ (Proposition 2.12), nous pourrons en déduire que $K \in H(Q)$.

Lemme 2.10. *Soit $(Q_n)_n$ une suite convergeant étroitement vers Q dans $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$.*

Alors pour presque tout t, $e_t \sharp Q_n$ converge étroitement vers $e_t \sharp Q$.

Remarque 2.11. *Si $t \in [0, T]$, la fonction e_t n'est pas continue en les X qui effectuent un saut au temps t. Or l'ensemble de ces X est négligeable pour presque tout t. En effet, si on note $A = \{(X, t)\ ;\ e_t \text{ est discontinue en } X\}$, alors par le théorème de Fubini, on a :*

$$\int_0^T Q(\{X; (X,t) \in A\})dt = \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} \int_0^T \mathbb{1}_{\{t;(X,t)\in A\}}(X)dt\ dQ(X) = 0.$$

Autrement dit, pour presque tout t, e_t est continue pour Q-p.t. X.

Démonstration. D'après le théorème de Skorokhod, il existe une famille de variables aléatoires $\{X_n\}_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Xi, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\bar{\Omega}^N \times S_N$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est de loi Q_n et il existe une variable aléatoire X sur $(\Xi, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\bar{\Omega} \times S_N$ de loi Q telle que $X_n \longrightarrow X$, $\mathbb{P}$-presque sûrement.

Soit $\varphi \in C_b^0(\bar{\Omega})$. Pour tout t tel que e_t est continue pour Q-p.t. X, on a

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Omega}} \varphi(x) d(e_t)\sharp Q_n(x) &= \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} \varphi(e_t(X)) dQ_n(X) \\ &= \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} \varphi(e_t(X)) dX_n \sharp \mathbb{P}(X) \\ &= \int_{\Xi} \varphi(e_t(X_n(\omega))) d\mathbb{P}(\omega).\end{aligned}$$

Par la remarque 2.11, on sait que la fonction e_t est continue pour presque tout X. Donc $\varphi(e_t(X_n(\omega)))$ converge simplement vers $\varphi(e_t(X(\omega)))$ en les points où e_t est continue.

Comme φ est bornée, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Xi} \varphi(e_t(X_n(\omega))) d\mathbb{P}(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} &\int_{\Xi} \varphi(e_t(X(\omega))) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{\bar{\Omega}} \varphi(x) d(e_t)\sharp Q(x).\end{aligned}$$

Donc pour presque tout t, $e_t \sharp Q_n$ converge étroitement vers $e_t \sharp Q$. □

Proposition 2.12. *Soit $x_0 \in \bar{\Omega}$ une condition initiale fixée. Soit $(Q_n)_n \subseteq P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ une suite convergeant vers $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$.*

Alors la suite $(J_{Q_n})_n$ Γ-converge vers J_Q pour la condition initiale x_0.

Démonstration. Posons $g_n(X) := S(X) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(e_t \sharp Q_n, x_i) dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g(X) := S(X) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(e_t \sharp Q, x_i) dt$.

(i) Γ-$\liminf$.

Soit $X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ une suite dans $\{x_0\} \times \bar{\Omega}^{N-1} \times S_N$.

Notons $X_n = (x_{n,0}, \ldots, x_{n,N-1}, a_{n,1}, \ldots, a_{n,N})$ où $x_{n,0} = x_0$ pour tout n.

Montrons que $g(X) \leq \varliminf_n g_n(X_n)$.

D'après le lemme 2.10, $e_t \sharp Q_n$ converge étroitement vers $e_t \sharp Q$. Comme F est continue et bornée, nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(e_t \sharp Q_n, x_{n,i}) dt$. De plus, la semi-continuité inférieure de S (remarque 2.6) donne

$$g(X) = S(X) + \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(e_t \sharp Q, x_i) dt \leq \varliminf_n S(X_n) + \lim_n \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(e_t \sharp Q_n, x_{n,i}) dt.$$

D'où $g(X) \leq \varliminf_n g_n(X_n)$.

(ii) Γ-$\limsup$.

Soit $X \in \{x_0\} \times \bar{\Omega}^{N-1} \times S_N$. Définissons la suite constante $(X_n)_n$ égale à X. En appliquant le théorème de convergence dominée à $\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(e_t \sharp Q_n, x_i) dt$, on obtient :

$$\varlimsup_n g_n(X_n) = \lim_n g_n(X) = g(X).$$

Pour conclure cette preuve, nous avons démontré que g_n converge vers g pour la Γ-convergence. De plus, comme la fonction ψ est continue, on obtient que $J_{Q_n} = g_n + \psi$ Γ-converge vers $g + \psi = J_Q$. $\square$

Lemme 2.13. *Soit (E,d) un espace métrique. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur E qui Γ-converge vers f, où f est une fonction s.c.i. définie sur E et bornée inférieurement. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de probabilité qui converge étroitement vers μ. Alors,*

$$\int f d\mu \leq \underline{\lim}_n \int f_n d\mu_n.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons pour tout $k > 0$, les fonctions f_n^k suivantes :

$$f_n^k(x) = \inf_y f_n(y) + k\ d(x,y),\ \forall x \in E.$$

De même, définissons f^k telle que pour tout $k > 0$,

$$f^k(x) = \inf_y f(y) + k\ d(x,y),\ \forall x \in E.$$

En particulier, pour tout $k > 0$, $f_n^k \leq f_n$, et la famille de fonctions $(f^k)_k$ est croissante.

De plus, nous avons $f = \sup_k f^k$. En effet, pour x fixé dans E et pour tout $k > 0$, il existe $y_k \in E$, tel que

$$f^k(x) \leq f(y_k) + k\ d(x,y_k) \leq f^k(x) + 1/k. \tag{6}$$

En divisant l'inégalité (6) par $k > 0$, et en passant à la limite $k \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_k \frac{f(y_k)}{k} + d(x,y_k) = 0.$$

Comme f est bornée inférieurement, on a $\lim_k d(x,y_k) = 0$, donc

$$y_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Par conséquent, en passant à la $\liminf$ dans (6), on a

$$\underline{\lim}_k\ f(y_k) + k\ d(x,y_k) \leq \sup_k f^k(x).$$

Ensuite, la définition des f^k et la semi-continuité inférieure de f donnent

$$\sup_k f^k(x) \leq f(x) \leq \underline{\lim}_k\ f(y_k) + k\ d(x,y_k).$$

Ces deux dernières inégalités entraînent

$$\sup_k f^k(x) \leq f(x) \leq \sup_k f^k(x),$$

donc $f(x) = \sup_k f^k(x)$.

Ensuite, fixons $k > 0$. Comme f_n Γ-converge vers f, la suite de fonctions $(f_n^k)_n$ converge simplement vers f^k.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille de fonctions $(f_n^k)_n$ est équicontinue, car $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n^k est k-Lipschitzienne. Puis pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{f_n^k(x)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact. Donc par le théorème d'Arzelà-Ascoli, f_n^k converge uniformément vers f^k.

Par conséquent,

$$\lim_n \int f_n^k d\mu_n = \int f^k d\mu.$$

Finalement, on obtient

$$\int f^k d\mu = \varliminf_n \int f_n^k d\mu_n \leq \varliminf_n \int f_n d\mu_n.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $k > 0$, on obtient grâce au théorème de convergence monotone :

$$\int f d\mu = \lim_k \int f_k d\mu \leq \varliminf_n \int f_n d\mu_n.$$

□

Corollaire 2.14. *Soit f une fonction s.c.i. bornée inférieurement. Alors l'application $\mu \mapsto \int f d\mu$ est semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Soit $(\mu_n)_n$ une suite qui converge étroitement vers μ. Montrons que

$$\int f d\mu \leq \varliminf_n \int f d\mu_n.$$

Si $(f_n)_n$ est la suite constante égale à f, alors f_n Γ-converge vers f. En appliquant le lemme 2.13, on obtient l'inégalité voulue. □

2.4. **Preuve du théorème 2.1.** Nous sommes maintenant parés pour démontrer le théorème 2.1.

Démonstration. L'ensemble $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ est convexe, compact et non-vide. En effet, $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ est compact, car si on prend une suite $(Q_n)_n$ de $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$, la compacité de $\bar{\Omega}^N \times S_N$ entraîne que la famille $(Q_n)_n$ est tendue. Par le théorème de Prokhorov [4, Chap. 1, Théorèmes 1.4 et 6.1], $(Q_n)_n$ est relativement compacte et donc $(Q_n)_n$ admet une sous-suite, notée aussi $(Q_n)_n$, convergeant vers Q. Grâce au lemme 2.10, on a

$$m_0 = e_0 \sharp Q_n \overset{\text{étroitement}}{\longrightarrow} e_0 \sharp Q,$$

donc $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$, d'où la compacité de $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$.
Ensuite, soient Q_1 et Q_2 dans $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$. Alors pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout B borélien de $\bar{\Omega}$, on a

$$\lambda Q_1(e_0^{-1}(B)) + (1-\lambda)Q_2(e_0^{-1}(B)) = \lambda m_0(B) + (1-\lambda)m_0(B) = m_0(B).$$

Donc $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ est convexe.

Ensuite, vérifions les hypothèses du théorème de Kakutani.

(i) *Pour tout $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$, l'ensemble $H(Q)$ est convexe.*
Soient $\lambda \in [0,1]$ et $(Q_1, Q_2) \in H(Q)^2$. Posons $\tilde{Q} := \lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2$. Par la convexité de $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$, on a bien $\tilde{Q} \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$.

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) d\tilde{Q}(X) &= \lambda \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) dQ_1(X) + (1-\lambda) \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) dQ_2(X) \\
&= \lambda \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0) + (1-\lambda) \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0) \\
&= \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0).
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{Q} \in H(Q)$, ce qui prouve que $H(Q)$ est convexe.

(ii) *Pour tout $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$, l'ensemble $H(Q)$ est non-vide.*

Définissons la multifonction suivante :

$$\eta\colon \bar{\Omega} \to \mathcal{P}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$$
$$x_0 \mapsto \Gamma_Q[x_0].$$

Par la proposition 2.9, on sait que cette application est mesurable. Elle associe à tout x_0 un ensemble non-vide d'après la proposition 2.7. Donc d'après le lemme 2.3, elle admet une sélection mesurable $Y\colon \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}^N \times S_N$, $x_0 \mapsto X^Q_{x_0}$ telle que $Y(x_0) \in \Gamma_Q[x_0]$.

Posons maintenant $\tilde{Q}(X) = \int_{\bar{\Omega}} \delta_{\{X^Q_{x_0}\}}(X) dm_0(x_0)$, pour tout $X \in \bar{\Omega}^N \times S_N$. En utilisant le fait que pour tout x_0, $X^Q_{x_0}$ est un minimiseur de J_Q, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) d\tilde{Q}(X) &= \int_{\bar{\Omega}} J_Q(X^Q_{x_0}) dm_0(x_0)\\ &= \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0).\end{aligned}$$

Donc $\tilde{Q} \in H(Q)$.

(iii) *Le graphe de H est fermé.*

Soit $(Q_n)_n$ une suite de $P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ convergeant vers $Q \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$ et soit $(K_n)_n$ une suite telle que $K_n \in H(Q_n)$ qui converge vers $K \in P_{m_0}(\bar{\Omega}^N \times S_N)$.

Montrons que $K \in H(Q)$, ce qui prouvera que le graphe de H est fermé.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $K_n \in H(Q_n)$, on a :

$$\int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_{Q_n}(X) dK_n(X) = \int_{\bar{\Omega}} \Phi_{Q_n}(x_0) dm_0(x_0).$$

Or, d'après la proposition 2.12, J_{Q_n} Γ-converge vers J_Q. Par conséquent, comme l'ensemble $\{x_0\} \times \bar{\Omega}^{N-1} \times S_N$ est compact, $\Phi_{Q_n}(x_0)$ converge vers $\Phi_Q(x_0)$ pour tout $x_0 \in \bar{\Omega}$. Comme F et ψ sont bornées et que le nombre de sauts n'excède pas N, la suite de fonctions $(\Phi_{Q_n})_n$ est uniformément bornée. Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\int_{\bar{\Omega}} \Phi_{Q_n}(x_0) dm_0(x_0) \underset{n}{\longrightarrow} \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0).$$

Ensuite, par le lemme 2.13,

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) dK(X) &\leq \varliminf_n \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_{Q_n}(X) dK_n(X)\\ &= \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0).\end{aligned}$$

L'inégalité inverse est aussi vraie, car

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) dK(X) &\geq \int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} \Phi_Q(X(0)) dK(X)\\ &= \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) de_0\sharp K(x_0)\\ &= \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0).\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\bar{\Omega}^N \times S_N} J_Q(X) dK(X) = \int_{\bar{\Omega}} \Phi_Q(x_0) dm_0(x_0),$$

ce qui prouve que $K \in H(Q)$.

Pour conclure cette preuve, nous avons montré que pour tout Q, l'ensemble $H(Q)$ est un convexe non-vide et que le graphe de H est fermé. Donc par le théorème du point fixe de Kakutani, H admet un point fixe $\bar{Q}$ tel que $\bar{Q} \in H(\bar{Q})$. □

3. Une extension du résultat

Dans cette section, nous montrons l'existence d'un équilibre pour le problème (4). Précédemment, nous avions supposé que F et ψ sont bornées, ce qui nous a permis de résoudre le problème en dimension finie. Ici, il se peut que la fonction dI/dm ne soit pas bornée. Il n'y a donc a priori pas de raisons que les trajectoires optimales aient un nombre de sauts maximal.

Remarque 3.1. *En réalité, l'intégrabilité de F et ψ en la variable spatiale suffisait pour se ramener en dimension finie. En effet, si on choisit une courbe γ telle que*

$$\gamma(t) = \begin{cases} x_0, & si\ t = 0, \\ y, & si\ t \in]0,T], \end{cases}$$

où $y \neq x_0$ est un point arbitraire de $\bar{\Omega}$, alors pour tout minimiseur $\tilde{\gamma}$ de (3) on a

$$S(\tilde{\gamma}) + \int_0^T F(\tilde{\gamma}(t), e_t\sharp Q)dt + \psi(\tilde{\gamma}(T)) \leq 1 + \int_0^T F(y, e_t\sharp Q)dt + \psi(y). \tag{7}$$

En intégrant l'inégalité (7) sur $\bar{\Omega}$, on obtient

$$\int_{\bar{\Omega}} (S(\tilde{\gamma}) + \int_0^T F(\tilde{\gamma}(t), e_t\sharp Q)dt + \psi(\tilde{\gamma}(T)))dy \leq \int_{\bar{\Omega}} dy + \int_{\bar{\Omega}} (\int_0^T F(y, e_t\sharp Q)dt + \psi(y))dy,$$

d'où le fait qu'une borne L^1 sur F et ψ en la variable spatiale suffit pour borner le nombre de sauts $S(\tilde{\gamma})$.

Malgré cela, nous ne pouvons en général pas trouver de borne uniforme sur $S(\tilde{\gamma})$ pour le problème (4), car nous ne savons pas si dI/dm est intégrable en la variable spatiale.

Notons $\tilde{J}_{\tilde{Q}}$ la fonctionnelle que les agents souhaitent minimiser pour une distribution $\tilde{Q} \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$ donnée, où BV désigne l'ensemble des courbes définies sur $[0,T]$ à *variations bornées*, c'est-à-dire,

$$\mathrm{BV} = \{\gamma\colon [0,T] \to \bar{\Omega}\ ;\ \sup_{0=t_0<\ldots<t_n=T} \sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| < \infty\ \}.$$

Nous munissons BV de la norme L^1. Ainsi, deux courbes seront égales, si elles sont égales presque partout sur $[0,T]$.
Pour tout $\gamma \in \mathrm{BV}$, on définit

$$\tilde{J}_{\tilde{Q}}(\gamma) = S(\gamma) + \int_0^T \frac{dI}{dm}(e_t\sharp\tilde{Q})(\gamma(t))dt + \int_0^T F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt,$$

où S est la fonction définie sur BV telle que pour tout $\gamma \in \mathrm{BV}$,

$$S(\gamma) = \begin{cases} \inf\{\sharp\{t\ ;\ \bar{\gamma} \text{ est discontinue en } t\ \}\ ;\ \bar{\gamma} \overset{L^1}{=} \gamma\}, & \text{si } \gamma \text{ est constante par morceaux}, \\ +\infty, & \text{sinon}. \end{cases}$$

De cette façon, la fonction S est bien définie sur BV muni de la norme L^1. Elle représente le nombre de sauts effectués pour une trajectoire constante par morceaux où on ignore les sauts dont la durée est de mesure nulle. Dans la proposition qui suit, nous montrons que S est s.c.i. .

Proposition 3.2. *La fonction S est s.c.i. .*

Démonstration. Montrons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\alpha := \{\gamma \in \mathrm{BV}\ ;\ S(\gamma) \leq \alpha\}$ est fermé.

Si $\alpha < 0$, alors $E_\alpha = \emptyset$ est bien fermé. Supposons maintenant que $\alpha \geq 0$ et soit $(\gamma_n)_n$ une suite dans E_α convergeant vers γ pour la norme L^1. Alors

$$\text{pour presque tout } t \in [0,T],\ \gamma_n(t) \longrightarrow \gamma(t).$$

En particulier, si $\bar{\gamma}_n$ est un représentant de γ_n dans L^1 dont le nombre de discontinuités est exactement $S(\gamma_n)$, alors on peut supposer de plus que

$$\forall t \in [0,T]\backslash N_1,\ \bar{\gamma}_n(t) \longrightarrow \gamma(t),$$

où N_1 est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Or, $(S(\bar{\gamma}_n))_n$ est une suite d'entiers bornée, donc il existe une sous-suite $(S(\bar{\gamma}_{n_k}))_k$ constante égale à $p \in \mathbb{N} \cap [0,\alpha]$. On peut donc représenter chaque $\bar{\gamma}_{n_k}$ par un vecteur, que l'on notera X_k, dans l'espace $\bar{\Omega}^p \times S_p$ où les p premières coordonnées représentent les p valeurs prises par $\bar{\gamma}_{n_k}$ et les p dernières coordonnées représentent les durées pour chaque valeur, l'ensemble S_p étant le simplexe de dimension p défini dans la sous-section 2.1.

Comme $\bar{\Omega}^p \times S_p$ est compact, la suite $(X_k)_k$ admet une sous-suite convergeante dont la limite, notée X, se trouve dans $\bar{\Omega}^p \times S_p$ et notons δ l'écriture de X dans BV (par exemple l'écriture càdlàg). Ainsi, $\bar{\gamma}_{n_k}$ converge simplement vers δ sur $[0,T]\backslash N_2$, où N_2 est un ensemble de mesure nulle. Par unicité de la limite de $(\bar{\gamma}_{n_k})_k$, on a

$$\forall t \in [0,T]\backslash(N_1 \cup N_2),\ \delta(t) = \gamma(t).$$

Comme δ et γ coïncident presque partout et que δ a au plus p sauts, la définition de S comme le minimum des sauts sur les représentants implique que

$$S(\gamma) = S(\delta) \leq p \leq \alpha$$

et donc $\gamma \in E_\alpha$, ce qui prouve que E_α est fermé.

On a montré que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble E_α est fermé, donc S est semi-continue inférieurement. $\square$

Nous supposerons que I est convexe, s.c.i et de variation première dI/dm, et F est continue en ses deux variables.

Nous cherchons une distribution de trajectoires Q_0 telle que

$$\forall Q \in P_{m_0}(\mathrm{BV}),\ \int \tilde{J}_{Q_0}(\gamma)dQ_0(\gamma) \leq \int \tilde{J}_{Q_0}(\gamma)dQ(\gamma). \tag{8}$$

Si on trouve Q_0 tel que pour tout Q, avec $\tilde{Q} = Q_0$, on a

(9)

$$\int S(\gamma)dQ_0(\gamma) + \int\int \frac{dI}{dm}(e_t\sharp Q_0)(x)d(e_t\sharp Q_0)(x)\ dt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ dQ_0(\gamma)$$
$$\leq \int S(\gamma)dQ(\gamma) + \int\int \frac{dI}{dm}(e_t\sharp Q_0)(x)d(e_t\sharp Q)(x)\ dt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ dQ(\gamma),$$

alors Q_0 vérifie (8) grâce au théorème de Fubini.

Pour $\tilde{Q}$ quelconque donné, nous montrons dans la proposition ci-après que la forme variationnelle du problème (9) correspond à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$(10)\ \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q) = \int S(\gamma)dQ(\gamma) + \int\int I(e_t\sharp Q)(x)dxdt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\, dQ(\gamma).$$

Remarque 3.3. *Lorsque I est convexe, minimiser $\mathcal{U}_{\tilde{Q}}$ est même équivalent à trouver Q_0 tel que* (9)*. Or ici, nous montrons seulement l'implication* $[(10) \Rightarrow (9)]$ *qui est suffisante pour montrer l'existence d'un équilibre.*

Proposition 3.4. *Fixons $\tilde{Q} \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$.*
Si $Q_0 \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$ un minimiseur de (10)*, alors Q_0 vérifie* (9) *pour tout $Q \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $Q \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$.

Posons $Q_\epsilon = Q_0 + \epsilon(Q - Q_0)$. Dérivons la fonction $\mathcal{R}(\epsilon) := \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_\epsilon)$ par rapport à ϵ :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'(\epsilon) = &\int S(\gamma)d(Q-Q_0)(\gamma) + \int\int \frac{dI}{dm}(e_t\sharp Q_\epsilon)(x)d(e_t\sharp(Q-Q_0))(x)\ dt \\ &+ \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ d(Q-Q_0)(\gamma).\end{aligned}$$

Comme Q_0 est un minimiseur, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'(0) = &\int S(\gamma)d(Q-Q_0)(\gamma) + \int\int \frac{dI}{dm}(e_t\sharp Q_0)(x)d(e_t\sharp(Q-Q_0))(x)\ dt \\ &+ \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ d(Q-Q_0)(\gamma) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Donc le minimiseur Q_0 vérifie bien (9) pour tout Q. □

L'objectif est de trouver une mesure sur les trajectoires Q_0 qui soit un équilibre, c'est-à-dire que lorsque les trajectoires des agents sont réparties selon la mesure Q_0, alors Q_0 est optimale pour le problème

$$\min_{Q \in P_{m_0}(\mathrm{BV})} \mathcal{U}_{Q_0}(Q).$$

Pour cela, nous allons définir une application H qui à tout $\tilde{Q}$ associe l'ensemble des minimiseurs de $\mathcal{U}_{\tilde{Q}}$ et montrer que cette application H admet un point fixe Q_0 qui sera un équilibre cherché. Pour montrer cela, nous souhaitons utiliser le théorème du point fixe de Kakutani. Cependant, l'ensemble des mesures $P_{m_0}(\mathrm{BV})$ n'est pas compact, car BV muni de la norme L^1 n'est pas borné. Nous allons donc utiliser un sous-ensemble compact Γ de $P_{m_0}(\mathrm{BV})$ que nous allons définir.

Fixons $\tilde{Q} \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$. Définissons $Q \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$, une mesure dont le support est contenu dans l'ensemble des courbes constantes sur $[0, T]$. Cette mesure existe et est unique : il suffit de prendre la mesure image de m_0 par l'application qui à tout x associe la courbe constante égale à x. Ainsi, $\int S(\gamma)dQ(\gamma) = 0$ et $e_t\sharp Q = m_0$

pour tout t. Si Q_0 est un minimiseur de $\mathcal{U}_{\tilde{Q}}$, alors on a l'inégalité

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_0) &\leq 0 + \int\int I(e_t\sharp Q)(x)dxdt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ dQ(\gamma) \\
&= \int\int I(m_0)(x)dxdt + \int\int F(\gamma(0), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ dQ(\gamma) \\
&= T\int I(m_0)(x)dx + \int\int F(x, e_t\sharp\tilde{Q})dt\ dm_0(x) \\
&\leq T\int I(m_0)(x)dx + \int T \sup_{P(\bar{\Omega})} F(x,\cdot)dm_0(x) := C.
\end{aligned} \tag{11}$$

En particulier, pour tout minimiseur Q_0 de $\mathcal{U}_{\tilde{Q}}$, on a

$$\int S(\gamma)dQ_0(\gamma) \leq C,$$

où C est une constante indépendante de $\tilde{Q}$ et de Q_0.

Par suite, nous définissons $\Gamma = \{Q \in P_{m_0}(\mathrm{BV})\ ;\ \int S(\gamma)dQ(\gamma) \leq C\}$. Dans la proposition suivante, nous montrons que Γ est compact, ce qui nous permettra de considérer la restriction de H à Γ et d'appliquer le théorème du point fixe de Kakutani à $H_{|\Gamma}$.

Proposition 3.5. *L'ensemble* Γ *est compact.*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité de Markov entraîne

$$\forall Q \in \Gamma,\ Q(\{\gamma\ ;\ S(\gamma) > N\}) \leq \frac{\int S(\gamma)dQ(\gamma)}{N} \leq \frac{C}{N}.$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tel que

$$\forall Q \in \Gamma,\ Q(\{\gamma\ ;\ S(\gamma) \leq N\}^c) \leq \epsilon.$$

Or l'ensemble $\{\gamma\ ;\ S(\gamma) \leq N\}$ est compact, en montrant par exemple que toute suite de cet ensemble admet une sous-suite convergente. Donc la famille de mesures Γ est tendue. Grâce au théorème de Prokhorov, Γ est relativement compact.

Ensuite, montrons que Γ est fermé.

Soit $(Q_n)_n$ une suite dans Γ convergeant étroitement vers $Q \in P_{m_0}(\mathrm{BV})$. Montrons que $Q \in \Gamma$.

Comme S est s.c.i. (Proposition 3.2) et bornée inférieurement par 0, on a grâce au corollaire 2.14,

$$\int S(\gamma)dQ(\gamma) \leq \underline{\lim}_n \int S(\gamma)dQ_n(\gamma) \leq C.$$

Donc Q appartient à Γ et donc, Γ est compact. □

L'existence d'un équilibre est énoncée dans le théorème ci-dessous :

Théorème 3.6. *Soit I une fonction s.c.i, convexe et de variation première dI/dm. Soit F une fonction continue définie sur $\bar{\Omega} \times P(\bar{\Omega})$.*

La multifonction

$$\begin{aligned} H : \Gamma \longrightarrow & \mathcal{P}(\Gamma) \\ \tilde{Q} \longmapsto & \underset{Q, e_0\sharp Q = m_0}{\operatorname{argmin}} \; \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q) \\ & = \underset{Q, e_0\sharp Q = m_0}{\operatorname{argmin}} \{ \int S(\gamma) dQ(\gamma) + \int \int I(e_t\sharp Q)(x) dx dt \\ & \quad + \int \int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q}) dt \; dQ(\gamma) \} \end{aligned}$$

admet un point fixe.

Avant de faire la preuve du théorème, nous présentons d'abord la notion de variation première et d'intégrale première.

3.1. **Intégrale première.** Dans ce paragraphe, nous précisons ce que nous entendons par *intégrale première* et *variation première* dont la définition est inspirée de [10, Chapitre 7]. Cette notion est utile en pratique dans la modélisation urbaine comme par exemple dans [2], où le loyer est une fonction croissante de la densité totale, et où les charges et les revenus sont des potentiels de Kantorovitch. Ces fonctions admettent une intégrale première, ce qui permet d'aborder le problème sous sa forme variationnelle.

Définition 3.7. *Soit $F : P(\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle.*

Supposons que pour tout $\epsilon \in [0,1]$ et pour tout $m \in P(\bar{\Omega})$ et $\tilde{m} \in P(\bar{\Omega}) \cap L^\infty_c$, $F((1-\epsilon)m + \epsilon\, \tilde{m}) < +\infty$.

On dit que si

$$\forall m \in P(\bar{\Omega}),\ \frac{d}{d\epsilon} F(m + \epsilon\ \chi)_{|\epsilon=0} = \int \frac{dF}{dm}(m) d\chi,$$

où $\chi := \tilde{m} - m$ avec $\tilde{m} \in P(\bar{\Omega}) \cap L^\infty_c$, alors F est une intégrale première *de dF/dm. On dit également que dF/dm est une* variation première *de F, et en particulier, si $m \in P(\bar{\Omega})$, $dF/dm(m)$ est une* variation première de F en m.

Voici quelques exemples pour illustrer cette notion :

Example 1. *Soit V une fonction définie sur $\bar{\Omega}$ et $\mathcal{V}$ telle que*

$$\forall m \in P(\bar{\Omega}),\ \mathcal{V}(m) = \int_{\bar{\Omega}} V dm.$$

Si $m \in P(\bar{\Omega})$, alors $\mathcal{V}$ est une intégrale première de V en m. En effet, pour tout $\chi \in P(\bar{\Omega})$,

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathcal{V}(m + \epsilon\ \chi)_{|\epsilon=0} = \int_{\bar{\Omega}} V(m) d\chi.$$

On peut ainsi noter $V := d\mathcal{V}/dm$.

Example 2. *Soit f une fonction de classe C^1. Si F est la fonctionnelle telle que*

$$\forall m \in P(\bar{\Omega}),\ F(m) = \int_{\bar{\Omega}} f(\rho(x)) d\lambda(x)$$

lorsque $m = \rho \cdot \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue, alors $\frac{dF}{dm}(m) = f'(m)$.

En effet, pour $\chi = \tilde{\rho} \cdot \lambda$ *et* $\epsilon \in [0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon} F(m + \epsilon\ \chi)_{|\epsilon=0} &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\bar{\Omega}} \tilde{\rho} f'(\rho(x) + \epsilon\tilde{\rho}) d\lambda(x) \\ &= \int_{\bar{\Omega}} \tilde{\rho} f'(\rho) d\lambda(x) = \int_{\bar{\Omega}} f'(\rho) d\chi.\end{aligned}$$

En se référant par exemple à [10, page 255], *on remarque que pour avoir la semi-continuité de* F, *il est nécessaire que* f *soit superlinéaire, donc* f' *ne serait pas bornée. Ceci explique pourquoi nous ne pouvons compter sur le fait que* dI/dm *soit bornée dans cette section.*

Example 3. *Définissons pour tout* $m \in P(\bar{\Omega})$,

$$\mathcal{W}(m) = \int\int_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} W(x,y) dm(x) dm(y).$$

Alors pour tout $\chi \in P(\bar{\Omega})$ *et tout* $\epsilon \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{W}(m + \epsilon\ \chi)_{|\epsilon=0} = &\lim_{\epsilon\to 0} \int\int_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} W(x,y) dm(x) d\chi(y) + \int\int_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} W(x,y) d\chi(x) dm(y) \\ &+ 2\epsilon \int\int_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} W(x,y) d\chi(x) d\chi(y) \\ = &\int\int_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} W(x,y) dm(x) d\chi(y) + \int\int_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} W(x,y) d\chi(x) dm(y).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \bar{\Omega},\ \frac{d\mathcal{W}}{dm}(m)(z) = \int_{\bar{\Omega}} W(x,z) dm(x) + \int_{\bar{\Omega}} W(z,y) dm(y).$$

En particulier, si h *est une fonction paire telle que* $W(x,y) = h(x-y)$, *alors* $d\mathcal{W}/dm = 2h * m$.

Example 4. *Prenons l'exemple de* [2] *avec les potentiels de Kantorovitch. Soient* m_1 *et* m_2 *deux mesures de probabilités données. Considérons le problème de Monge-Kantorovitch suivant :*

$$\mathcal{C}(m_1, m_2) := \inf_{\gamma \in \prod(m_1,m_2)} \int_{\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}} c(x,y) d\gamma(x,y), \tag{12}$$

où $\prod(m_1, m_2)$ *désigne l'ensemble des mesures de probabilités définies sur* $\bar{\Omega}\times\bar{\Omega}$ *avec* $\bar{\Omega}$ *compact, de lois marginales* m_1 *et* m_2. *En se référant par exemple à* [10], *le problème dual de* (12) *s'exprime de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(m_1, m_2) = \sup_{(\alpha_1,\alpha_2)\in C(\bar{\Omega})\times C(\bar{\Omega})} \{ &\int \alpha_1 dm_1 + \int \alpha_2 dm_2\ ; \\ &\alpha_1(x) + \alpha_2(y) \le c(x,y), \forall (x,y) \in \bar{\Omega}\times\bar{\Omega}\}.\end{aligned}$$

Si α_1 *et* α_2 *sont tels que*

$$\mathcal{C}(m_1, m_2) = \int \alpha_1 dm_1 + \int \alpha_2 dm_2,$$

alors la dérivée première de $\mathcal{C}$ *est* $(\frac{d\mathcal{C}}{dm_1}, \frac{d\mathcal{C}}{dm_2}) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

3.2. **Preuve du théorème 3.6.** Voici la preuve du théorème 3.6.

Démonstration. De façon similaire au théorème 2.1, nous appliquons le théorème de Kakutani à la multifonction H.

Tout d'abord, l'ensemble Γ est convexe, car $P_{m_0}(\mathrm{BV})$ l'est et

$$\forall Q_1,\ Q_2 \in \Gamma,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \int S(\gamma) d(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)(\gamma) \leq \lambda C + (1-\lambda)C = C.$$

De plus, Γ est non-vide, car il suffit de prendre par exemple Q à support contenu dans l'ensemble des trajectoires constantes sur $[0,T]$.
Enfin, Γ est compact grâce à la proposition 3.5.

Vérifions ensuite les trois conditions suivantes :

(i) *Si $\tilde{Q} \in \Gamma$ est fixé, alors l'ensemble $H(\tilde{Q})$ est convexe.*

Soient Q_1 et Q_2 dans $H(\tilde{Q})$ et $\lambda \in [0,1]$. Notons M la valeur du minimimum telle que $M := \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_1) = \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_2)$.

Grâce à la linéarité de e_t et la convexité de I, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{\tilde{Q}}(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2) &= \int S(\gamma) d(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)(\gamma) \\
&\quad + \int\int I(e_t \sharp(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2))(x) dx dt \\
&\quad + \int\int F(\gamma(t), e_t \sharp \tilde{Q}) dt d(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2)(\gamma) \\
&= \lambda \int S(\gamma) dQ_1(\gamma) + \int\int I(e_t \sharp(\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2))(x) dx dt \\
&\quad + \lambda \int\int F(\gamma(t), e_t \sharp \tilde{Q}) dt dQ_1(\gamma) \\
&\quad + (1-\lambda) \int S(\gamma) dQ_2(\gamma) \\
&\quad + (1-\lambda) \int\int F(\gamma(t), e_t \sharp \tilde{Q}) dt dQ_2(\gamma) \\
&\leq \lambda\, \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_1) + (1-\lambda)\, \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_2) \\
&= M.
\end{aligned}$$

Donc $\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2 \in H(\tilde{Q})$, d'où la convexité de $H(\tilde{Q})$.

(ii) *Si $\tilde{Q} \in \Gamma$ est fixé alors l'ensemble $H(\tilde{Q})$ est non-vide.*

Soit $(Q_n)_n$ une suite minimisante de $\inf_{Q \in \Gamma} \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q)$. Comme Γ est compact, il existe une sous-suite $(Q_{n_k})_k$ de $(Q_n)_n$ qui converge étroitement vers $Q \in \Gamma$.

Estimons la limite inférieure de $\mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_{n_k})$ pour $k \to \infty$.

La fonction S étant s.c.i (Proposition 3.2) et bornée inférieurement, on a grâce au corollaire 2.14

$$\int S(\gamma) dQ(\gamma) \leq \varliminf_{k} \int S(\gamma) dQ_{n_k}(\gamma). \tag{13}$$

Ensuite, le lemme 2.10 reste valable pour l'ensemble Γ. En l'appliquant au terme $\int\int I(e_t \sharp Q_{n_k})(x) dx\, dt$ et utilisant la semi-continuité de I et le lemme de Fatou, on obtient

$$\int\int I(e_t\sharp Q)(x)dx\ dt \le \int\int \liminf_k I(e_t\sharp Q_{n_k})(x)dx\ dt \le \liminf_k \int\int I(e_t\sharp Q_{n_k})(x)dx\ dt. \tag{14}$$

Enfin, comme F est continue en ses deux variables, on a

$$\int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ dQ_{n_k}(\gamma) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp\tilde{Q})dt\ dQ(\gamma). \tag{15}$$

Finalement, les limites (13)-(15) donnent

$$\mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q) \le \liminf_k \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q_{n_k}) \le \inf_{Q\in\Gamma} \mathcal{U}_{\tilde{Q}}(Q).$$

Donc Q est un minimiseur de $\mathcal{U}_{\tilde{Q}}$. Par le calcul (11), on a aussi $Q \in \Gamma$. Donc $H(\tilde{Q})$ est non-vide.

(iii) *Le graphe de H est fermé.*

Soit $(Q_n)_n$ une suite dans Γ convergeant vers Q_∞ et $K_n \in H(Q_n)$ une suite convergeant vers $K \in \Gamma$.

Montrons que $K \in H(Q_\infty)$.

Comme $K_n \in H(Q_n)$, on a pour tout $Q \in \Gamma$,

$$\int S(\gamma)dK_n(\gamma) + \int\int I(e_t\sharp K_n)(x)dxdt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_n)dt\ dK_n(\gamma) \le \int S(\gamma)dQ(\gamma) + \int\int I(e_t\sharp Q)(x)dxdt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_n)dt\ dQ(\gamma). \tag{16}$$

Examinons la limite de chaque terme de l'inégalité (16) lorsque $n \to +\infty$.

Commençons par le terme $\int S(\gamma)dK_n(\gamma)$. La fonction S est s.c.i. (Proposition 3.2) et bornée inférieurement, donc par le corollaire 2.14, on a

$$\int S(\gamma)dK(\gamma) \le \varliminf_n \int S(\gamma)dK_n(\gamma).$$

Pour le second terme, grâce au lemme 2.10, à la semi-continuité de I et au lemme de Fatou, on a l'inégalité

$$\int\int I(e_t\sharp K)(x)dxdt \le \int\int \liminf_n I(e_t\sharp K_n)(x)dxdt \le \liminf_n \int\int I(e_t\sharp K_n)(x)dxdt.$$

Quant au terme $\int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_n)dt\ dK_n(\gamma)$, la continuité de F en les deux variables donne

$$\int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_n)dt\ dK_n(\gamma) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_\infty)dt\ dK(\gamma).$$

A droite de l'inégalité (16), un seul terme dépend de n. En y appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_n)dt\ dQ(\gamma) \underset{n}{\longrightarrow} \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_\infty)dt\ dQ(\gamma).$$

Finalement, en passant à la limite $\liminf_n$ dans l'inégalité (16), on obtient

$$\int S(\gamma)dK(\gamma) + \int\int I(e_t\sharp K)(x)dxdt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_\infty)dt\ dK(\gamma)$$
$$\leq \int S(\gamma)dQ(\gamma) + \int\int I(e_t\sharp Q)(x)dxdt + \int\int F(\gamma(t), e_t\sharp Q_\infty)dt\ dQ(\gamma).$$

Cette inégalité est vraie pour tout $Q \in \Gamma$, donc K est un minimiseur de $\mathcal{U}_{Q_\infty}$, i.e $K \in H(Q_\infty)$. Le graphe de H est donc fermé.

Les conditions (i), (ii), (iii) sont vérifiées, donc par le théorème de Kakutani appliqué à H, nous pouvons conclure que H admet un point fixe. □

Références

[1] Robert J. Aumann. Markets with a Continuum of Traders. *Econometrica*, 32(1/2) :39–50, 1964. Publisher : [Wiley, Econometric Society].

[2] César Barilla, Guillaume Carlier, and Jean-Michel Lasry. A mean field game model for the evolution of cities, December 2020.

[3] Jean-David Benamou, Guillaume Carlier, and Filippo Santambrogio. Variational Mean Field Games. March 2016.

[4] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures 2e.* Wiley, Blackwell, New York, 1999.

[5] Piermarco Cannarsa and Rossana Capuani. Existence and uniqueness for Mean Field Games with state constraints. *arXiv :1711.01063 [math]*, November 2017. arXiv : 1711.01063.

[6] Pierre Cardaliaguet. Notes on Mean Field Games. page 59.

[7] C. Castaing and M. Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* 1977.

[8] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Jeux a champ moyen. I . Le cas stationnaire. *Comptes Rendus Mathematique*, 343(9) :619–625, November 2006.

[9] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Jeux a champ moyen. II . Horizon fini et controle optimal. *Comptes Rendus Mathematique*, 343(10) :679–684, November 2006.

[10] Filippo Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians : Calculus of Variations, PDEs, and Modeling.* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhauser Basel, 2015.