Calcul approché d'intégrales : méthodes de quadrature

Problématique
La nécessité de calculer des intégrales intervient dans de nombreux champs d'application, issus d'une grande variété de domaines (physique, mécanique, chimie, biologie...). Si dans de rares exceptions il est possible de calculer analytiquement ces intégrales, un calcul exact s'avère souvent hors de portée (les calculs sont très longs et fastidieux, ou bien l'intégrale n'admet tout simplement pas d'expression analytique). Ceci justifie l'introduction de méthodes permettant d'approcher numériquement ces intégrales. Concrètement, étant donnée une fonction réelle f continue sur un intervalle $[a, b]$, l'objectif de ce chapitre est d'introduire et d'analyser des méthodes permettant d'approcher la quantité suivante:

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt\,.$$

1 Introduction : méthode des rectangles

L'une des stratégies les plus connues est la méthode des ***rectangles***. Il s'agit de découper l'intervalle $[a, b]$ en se donnant $n + 1$ points équidistants:

$$a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b\,,$$

L'intervalle $[a, b]$ est ainsi décomposé en n sous intervalles $[y_k, y_{k+1}]$, $k = 0, \cdots, n-1$ de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$. L'intégrale sur chaque sous-intervalle $[y_k, y_{k+1}]$, c'est à dire l'aire située sous la courbe entre les points y_k et y_{k+1} (voir Figure 1), peut alors être approchée en utilisant la valeur de f en un point de cet intervalle. Par exemple:

- $\displaystyle\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(t)dt \simeq hf(y_k)$: méthode des ***rectangles à gauche***,
- $\displaystyle\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(t)dt \simeq hf(y_{k+1})$: méthode des ***rectangles à droite***,
- $\displaystyle\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(t)dt \simeq hf\left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right)$: méthode du ***point milieu***.

La Figure 1 illustre la méthode des rectangles à gauche.

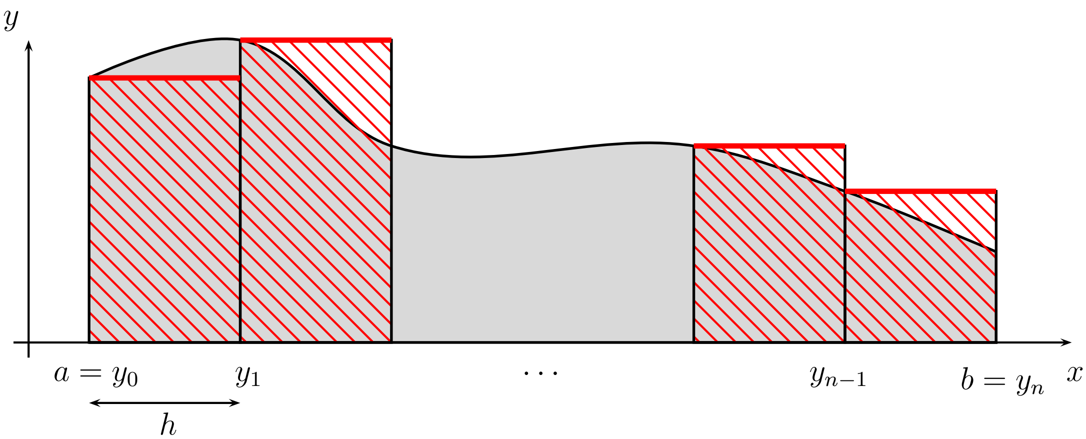

Figure 1: *Méthode des rectangles à gauche.*

En notant x_k le point utilisé dans chaque intervalle $[y_k, y_{k+1}]$ pour $k = 0 \cdots, n-1$, l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ est donc approchée par la somme des aires des rectangles de hauteur $f(x_k)$ et de largeur $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(t)dt \simeq hf(x_0) + \cdots + hf(x_{n-1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,.$$

La quantité $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est donc approchée par la ***somme de Riemann*** $J_{n-1}(f) := h\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$, et on peut établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_{n-1}(f) = I(f)$.

2 Cadre général

Nous avons vu précédemment un exemple simple de méthode de quadrature correspondant à des points équidistants, mais il peut s'avérer avantageux de considérer des coefficients qui vont dépendre des points utilisés (c'est le cas par exemple lorsque les points ne sont pas régulièrement espacés). Ceci nous amène à la définition générale d'une formule de quadrature:

Définition 2.1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une méthode de quadrature pour le calcul approché de l'intégrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ est donnée par une formule

$$J_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)\,,$$

où les réels $x_0, \ldots, x_n$ sont des points distincts de l'intervalle $[a, b]$ (appelés ***noeuds*** *de la quadrature), et les $\omega_0, \ldots, \omega_n$ sont des réels (appelés* ***poids*** *de la quadrature).*

Plusieurs questions peuvent alors se poser:

- Comment choisir les noeuds et les poids pour obtenir la meilleure approximation possible?
- Donner des estimations de l'erreur de quadrature.
- Préciser les conditions de régularité de la fonction f.

Commençons par introduire un peu de vocabulaire:

Définition 2.2 (*Méthode de Newton-Cotes*)

Si les noeuds sont répartis de façon équidistante, on dit qu'il s'agit d'une méthode de ***Newton-Cotes****.*
Si de plus le premier et le dernier noeuds correspondent aux extrémités de l'intervalle (c'est à dire si $x_0 = a$ et $x_n = b$), on dit qu'il s'agit d'une méthode de Newton-Cotes ***fermée****. Si $x_0 \neq a$ et $x_n \neq b$, on dira que la méthode est* ***ouverte****.)*

Par exemple, les méthodes des rectangles vues précédemment (à gauche, à droite et point-milieu) sont des méthodes de Newton-Cotes. La méthode du point-milieu est une méthode de Newton-Cotes ouverte.

Il existe deux types d'approche pour construire des méthodes de quadrature. La première stratégie consiste à construire une formule (généralement d'ordre élevé) directement sur l'intervalle $[a, b]$. On parle alors de ***méthode simple***. La seconde se caractérise par l'utilisation de formules de quadrature d'ordre moins élevé sur des sous-intervalles de $[a, b]$, C'est notamment le cas des méthodes des rectangles que nous avons vues dans la partie introductive: on a subdivisé l'intervalle $[a, b]$ et approché l'intégrale sur chaque sous-intervalle en utilisant la valeur de f en un seul noeud. On parle alors de ***méthodes composées*** (ou ***méthodes composites***). Ces deux stratégies d'approximation font écho aux deux principales méthodes d'interpolation vues dans le chapitre précédent (interpolation globale et interpolation par intervalles).

2.1 Méthodes simples

Nous allons voir comment construire des formules de quadrature à partir des polynômes d'interpolation de Lagrange. L'idée est de remplacer le calcul de l'intégrale de f par celle de son polynôme interpolateur, généralement bien plus simple à déterminer.

Exemple 2.1. Un noeud de quadrature
Considérons une méthode avec un seul noeud de quadrature. Prenons par exemple $x_0 = a$.

Le polynôme interpolateur de f en a est donc le polynôme constant $P_0(x) = f(a)$. On a donc:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_0(x)dx = (b-a)f(a)\,.$$

On obtient alors la méthode des rectangles à gauche. De manière analogue, la méthode des rectangles à droite s'obtient en considérant $x_0 = b$, et celle du point milieu en prenant $x_0 = \dfrac{b-a}{2}$.

Deux noeuds de quadrature
Prenons $x_0 = a$ et $x_1 = b$. Le polynôme interpolateur de Lagrange s'écrit:

$$P_1(x) = f(a)L_0(x) + f(b)L_1(x)\,,$$

où $L_0(x) = \dfrac{x-b}{a-b}$ et $L_1(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$. On va approcher l'intégrale de f par celle P_1, c'est à dire:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_1(x)dx = f(a)\int_a^b L_0(x)dx + f(b)\int_a^b L_1(x)dx\,.$$

Un calcul basique donne $\displaystyle\int_a^b L_0(x)dx = \int_a^b L_1(x)dx = \frac{b-a}{2}$, de sorte que:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{2}\left(f(a) + f(b)\right)\,.$$

Cette formule est communément appelée formule des ***trapèzes***.

Trois noeuds de quadrature
Prenons $x_0 = a$ et $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. Le polynôme interpolateur de Lagrange s'écrit:

$$P_2(x) = f(a)L_0(x) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)L_1(x) + f(b)L_2(x)\,.$$

Comme dans le cas précédent, par linéarité de l'intégrale on a:

$$\int_a^b P_2(x)dx = f(a)\omega_0 + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\omega_1 + f(b)\omega_2\,,$$

avec $\omega_k = \displaystyle\int_a^b L_k(x)dx$ pour $k = 0, 1, 2$. Le calcul donne (exercice) $w_0 = w_2 = \dfrac{b-a}{6}$ et $w_1 = 4\dfrac{b-a}{6}$, de sorte que la formule s'écrit:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\,. \tag{1}$$

Il s'agit de la formule de ***Simpson***.

De façon plus générale, si l'on remplace f par son polynôme interpolateur $P_n = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$ dans le calcul de l'intégrale, on obtiendra la formule suivante:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)dx\,,$$

où $\omega_k = \displaystyle\int_a^b L_k(x)dx$ pour $k = 0, \cdots, n$. Le cadre est posé par la définition suivante:

Définition 2.3

On dit que la méthode est ***associée au polynôme d'interpolation*** P_n, *si* $\omega_k = \int_a^b L_k(x)dx$ *pour tout* $k \in \{0, \ldots, n\}$, *où* $\left(L_k\right)_{0\le k\le n}$ *sont les polynômes de Lagrange associés aux* $n+1$ *noeuds* $x_0, \ldots, x_n$.

Une telle méthode est aussi dite de ***type interpolation***. Ainsi, à titre d'exemple:

- Dans le cas où il n'y a qu'un seul noeud de quadrature:
  - La méthode des rectangles à gauche

    $$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f(a) \tag{2}$$

    (resp. à droite) est la méthode associée au polynôme d'interpolation au point $x_0 = a$ (resp $x_0 = b$).
  - La méthode du point milieu

    $$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

    est la méthode associée au polynôme d'interpolation au noeud $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Rappelons qu'il s'agit d'une méthode de Newton-Cotes ouverte (le noeud d'interpolation ne correspond à aucune des bornes de l'intervalle $[a, b]$).

- Dans le cas de deux points:
  La méthode des trapèzes

  $$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

  est la méthode associée au polynôme d'interpolation aux noeuds $x_0 = a$ et $x_1 = b$. Il s'agit d'une méthode de Newton-Cotes fermée (les noeuds d'interpolation correspondent aux bornes de l'intervalle $[a, b]$).

- Et pour trois points:
  La méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

  est la méthode associée au polynôme d'interpolation aux noeuds $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. C'est aussi une méthode de Newton-Cotes fermée ($x_0 = a$ et $x_2 = b$).

Notons qu'en général ces méthodes interviennent dans le cadre d'approches composites: les formules ci-dessus sont utilisées sur chaque sous-intervalle associé à une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, comme nous l'avons vu dans l'introduction pour la méthode des rectangles. Nous reviendrons plus en détail sur ces méthodes dans la Section 2.4.

2.2 Ordre d'une méthode

Commençons par introduire la définition générale suivante:

Définition 2.4

*Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que la méthode est d'**ordre au moins** p, si pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à p, on a l'égalité*

$$\int_a^b P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \omega_i P(x_i)\,.$$

*La méthode est d'**ordre** p si elle est d'ordre au moins p, mais pas d'ordre au moins $p+1$ (en d'autres termes, s'il existe un polynôme de degré $p+1$ pour lequel la formule n'est pas exacte).*

Exemple 2.2. Considérons par exemple la formule du point milieu :

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx \simeq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) =: J(f)\,.$$

Considérons un polynôme P de degré 0, c'est à dire une constante réelle, que l'on notera β. On a d'une part $I(P) = \displaystyle\int_a^b P(x)dx = \beta\int_a^b dx = \beta(b-a)$, et d'autre part $J(P) = (b-a)P\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \beta(b-a)$. La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes constants. Au sens de la définition précédente, elle est de degré au moins 0.
On peut à présent se demander si elle est de degré au moins 1. Considérons le monôme $P(x) = x$, et regardons si la formule est exacte pour ce polynôme particulier. On a

$$I(P) = \int_a^b P(x)dx = \int_a^b xdx = \frac{b^2 - a^2}{2}\,.$$

D'autre part: $J(P)=(b-a)P\left(\frac{b+a}{2}\right)=\frac{b^2-a^2}{2}$, donc la formule est exacte pour P.
Notons qu'à ce stade nous avons seulement montré que la formule était exacte pour un polynôme de degré 1 particulier. Si l'on revient à la Définition 2.4, il faut montrer que cette formule est exacte pour tout polynôme de degré 1. Considérons donc un polynôme Q sous la forme $Q(x)=\alpha x+\beta$, avec α et β deux constantes réelles. Notons que $Q(x)=\alpha P(x)+\beta$. On a donc:

$$I(Q)=\int_a^b (\alpha P(x)+\beta)\,dx=\alpha\int_a^b P(x)dx+\beta\int_a^b dx\,,$$

et d'autre part:

$$J(Q)=(b-a)\left(\alpha P\left(\frac{a+b}{2}\right)+\beta\right)=\alpha(b-a)P\left(\frac{a+b}{2}\right)+\beta(b-a)\,.$$

Ainsi, la formule est exacte pour tous les polynômes de degré 1 si et seulement si:

$$\alpha\int_a^b P(x)dx+\beta\int_a^b dx=\alpha(b-a)P\left(\frac{a+b}{2}\right)+\beta(b-a)\,,$$

pour tous α,β réels.
Or, la formule étant de degré au moins 0, on a $\int_a^b dx=(b-a)$, et nous venons d'établir que $\int_a^b P(x)dx=(b-a)P\left(\frac{a+b}{2}\right)$. La formule est donc exacte.

Ainsi, pour vérifier que la méthode est d'ordre au moins 1, il suffit d'établir qu'elle est exacte pour le polynôme constant égal à 1 et pour le monôme $P(x)=x$.

Notons que cette méthode n'est pas d'ordre 2. En effet

$$I(x^2)=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)\ \text{ et }\ J(x^2)=(b-a)\left(\frac{b+a}{2}\right)^2\neq I(x^2)\,.$$

Cette stratégie pour vérifier l'ordre d'une méthode se généralise à travers la proposition suivante. En particulier, ce résultat permet de vérifier l'ordre d'une méthode en travaillant exclusivement sur les monômes.

Proposition 2.1

La méthode $J(f)=\sum_{k=0}^{n}\omega_k f(x_k)$ est d'ordre p si et seulement si pour tout $m\in\{0,\ldots,p\}$ on a

$$\int_a^b x^m dx=\sum_{k=0}^{n}\omega_k x_k^m \text{ et } \int_a^b x^{p+1}dx\neq\sum_{k=0}^{n}\omega_k x_k^{p+1},$$

en d'autres termes, si et seulement si la méthode est exacte pour tous les monômes de degré inférieur à p et inexacte pour x^{p+1}.

En particulier, pour vérifier qu'un méthode est d'ordre au moins p, il suffit d'établir qu'elle est exacte pour les monômes $\{1, x, \cdots, x^p\}$.

Exemple 2.3 (*Méthode des rectangles à gauche*)**.** On a $J(f) = (b-a)f(a)$.

- On teste la méthode avec $f = 1$:

$$I(f) = \int_a^b dx = b - a \quad \text{et} \quad J(f) = b - a\,,$$

  donc la méthode est d'ordre au moins 0.

- On considère à présent $f(x) = x$.

$$I(f) = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad \text{et} \quad J(f) = (b-a)f(a) = a(b-a)\,,$$

  donc la méthode n'est pas exacte pour ce polynôme. On en déduit que la méthode est d'ordre (exactement) 0.

Exemple 2.4 (*Méthode des trapèzes*)**.** On a $J(f) = (b-a)\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)$.

- On teste la méthode avec $f = 1$:

$$I(f) = \int_a^b dx = b - a \quad \text{et} \quad J(f) = b - a\,,$$

  donc la méthode est d'ordre au moins 0.

- On considère à présent $f(x) = x$.

$$I(f) = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad \text{et} \quad J(f) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b^2 - a^2}{2}\,,$$

  donc la méthode est d'ordre au moins 1.

- On considère maintenant $f(x) = x^2$.

$$I(f) = \int_a^b x dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \quad \text{et} \quad J(f) = (b-a)\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \neq \frac{b^3 - a^3}{3}\,,$$

  donc la méthode est d'ordre (exactement) 1.

Exercice 2.1. Pour toute fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on pose

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

On va utiliser une méthode de quadrature de la forme

$$J(f) = af(-1) + bf(0) + cf(1).$$

1. Montrer que si f est impaire, alors $I(f) = 0$.

   Supposons f impaire, c'est à dire que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. On a:

   $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx\,. \tag{3}$$

   On effectue le changement de variables $u(x) = -x$ dans la première intégrale du second membre:

   $$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{1}^{0} \underbrace{f(-u)}_{-f(u)}(-du) = \int_{0}^{1} f(u)du = -\int_{0}^{1} f(u)du\,.$$

   En revenant à (3), obtient $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, pour avoir $J(f) = 0$ pour toute fonction f impaire.

   Supposons f impaire. On a $f(-1) = f(1)$ et $f(0) = 0$. La formule $J(f)$ s'écrit alors simplement $J(f) = (c - a)f(1)$.
   Ainsi, $J(f) = 0$ pour toute fonction f impaire si et seulement si $a = c$. Il n'y a pas de condition sur b.

3. Déterminer les nombres réels a, b, c tels que $I(P) = J(P)$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 3.

   Conformément à la Proposition 2.1, il suffit de trouver les conditions sur a, b et c assurant que la méthode est exacte pour les monômes x^k pour $k = 0, \cdots, 3$.

   - *On teste la méthode avec $P = 1$:*

     $$I(P) = \int_{-1}^{1} dx = 2 \quad \text{et} \quad J(P) = a + b + c\,,$$

     On aboutit à une première condition : $\boxed{a+b+c=2}$.
   - *On considère à présent $P(x) = x$. Notons que P est impaire, donc d'après les questions précédentes, $I(P) = 0$, et la condition $J(P) = 0$ implique $\boxed{a=c}$.*

- *On considère maintenant $P(x) = x^2$.*

$$I(f) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3} \qquad et \qquad J(f) = a + c\,,$$

d'où l'on tire un troisième relation $a + c = \frac{2}{3}$. On en déduit le système:

$$\begin{cases} a + b + c &= 2\,, \\ a &= c\,, \\ a + c &= \dfrac{2}{3}\,, \end{cases}$$

qui admet pour solution $a = c = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{4}{3}$. On en déduit:

$$J(f) = 2\left[\frac{1}{6}f(-1) + \frac{4}{6}f(0) + \frac{1}{6}f(1)\right]\,.$$

On reconnaît la méthode de Simpson (1) dans le cas $[a, b] = [-1, 1]$.

4. La méthode obtenue est-elle de degré 3, 4 ?

   Il s'agit de vérifier si la formule est exacte pour $P(x) = x^3$. Il s'agit d'une fonction impaire, donc $I(P) = J(P) = 0$ en vertu des questions précédentes. La méthode est donc d'ordre au moins 3.
   Le calcul donne enfin $I(P) \neq J(P)$ pour $P(x) = x^4$, et donc la méthode n'est pas d'ordre 4.

Ainsi, d'après les exemples précédents:

- La formule des rectangles (un point) est d'ordre au moins 0.
- La formule des trapèzes (deux points) est d'ordre au moins 1.
- La formule de Simpson (trois points) est d'ordre au moins 2 (elle est même d'ordre exactement 3).

Conjecture : Il semblerait donc que, si $n + 1$ est le nombre de noeuds d'une méthode de quadrature de type interpolation, alors cette méthode est d'ordre au moins n.

Nous allons établir cette assertion, et montrer qu'il y a même équivalence.

Considérons donc une méthode de type interpolation à $n + 1$ points, avec $n \in \mathbb{N}$. Par définition, cette méthode s'écrit:

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)\,,$$

où, pour tout $k = 0, \cdots, n$, $\omega_k = \displaystyle\int_a^b L_k(x)dx$, et L_k est le polynôme de Lagrange associé au noeud x_k. Considérons un polynôme P de degré inférieur ou égal à n. Par unicité du polynôme d'interpolation, on a:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k(x)\,,$$

ce qui donne immédiatement, par linéarité de l'intégrale:

$$\int_a^b P(x)dx = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) \int_a^b L_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \omega_k P(x_k) = J(P)\,.$$

On déduit que la formule est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n. En d'autres termes, elle est d'ordre au moins n.

On s'intéresse maintenant à la réciproque. Considérons une méthode d'interpolation à $n+1$ points d'ordre n s'écrivant sous la forme

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)\,,$$

avec $\omega_0, \cdots, \omega_n$ des réels. Cette méthode étant d'ordre n, la formule est en particulier exacte pour les polynômes interpolateurs de Lagrange L_j, pour tout $j = 0, \cdots, n$. Ainsi, pour tout $j = 0, \cdots, n$ (on rappelle que $L_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$ pour tout $k = 0, \cdots, n$)

$$\int_a^b L_j(x)dx = J(L_j) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k L_j(x_k) = \omega_j\,,$$

ce qui permet de conclure qu'il s'agit d'une méthode de type interpolation.
Nous venons d'établir la propriété suivante:

Proposition 2.2

Une méthode de quadrature à $n+1$ noeuds

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)\,,$$

où $\omega_0, \cdots, \omega_n \in \mathbb{R}$ est d'ordre au moins n si et seulement si elle est associée au polynôme d'interpolation en ces noeuds, c'est à dire si et seulement si $\omega_k = \displaystyle\int_a^b L_k(x)dx$ pour $k = 0, \cdots, n$.

Exercice 2.2. Pour toute fonction dérivable $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on pose

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

On va utiliser une méthode de quadrature de la forme

$$J(f) = \alpha f(0) + \beta \left(f'(1) - f'(-1)\right).$$

Déterminer α et β tels que $I(P) = J(P)$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2.

On suit la procédure habituelle:

- *On teste la méthode avec* $P = 1$*:*

  $$I(P) = \int_{-1}^{1} dx = 2 \qquad \text{et} \qquad J(P) = \alpha\,,$$

  On aboutit à une première condition : $\boxed{\alpha = 2}$.

- *On considère à présent* $P(x) = x$*. Notons que* P *est impaire, donc* $I(P) = 0$*. D'autre part* $J(P) = \alpha \times 0 + \beta(1 - 1) = 0$*. Cette condition est automatiquement satisfaite et n'induit aucune contrainte sur* α *et* β*.*

- *On considère maintenant* $P(x) = x^2$*. On a*

  $$I(P) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{1^3 - (-1)^3}{3} = \frac{2}{3}\,,$$

  et $J(P) = \alpha \times 0 + \beta\,(2 - (-2))$*. D'où la deuxième condition* $\boxed{4\beta = \frac{2}{3}}$*. On en déduit la formule suivante:*

  $$J(f) = 2f(0) + \frac{1}{6}\left(f'(1) - f'(-1)\right).$$

Exercice 2.3. Pour toute fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on pose

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(\sin(x))dx.$$

On considère une méthode de quadrature de la forme

$$J(f) = \alpha \left(f(-a) + f(a)\right),$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in [-1, 1]$.

1. Montrer que si f est impaire, alors $I(f) = J(f) = 0$.
Supposons f impaire. Alors, pour tout $a \in [-1, 1]$, $f(a) + f(-a) = 0$, ce qui entraîne immédiatement $J(f) = 0$.
D'autre part, si on définit la fonction g par $g(x) = f(sin(x))$ pour tout $x \in [-1, 1]$, il est aisé de vérifier que g est impaire. On en déduit que $\int_{-1}^{1} f(\sin(x))dx = 0$.

2. Déterminer α et a de telle sorte que la méthode proposée soit d'ordre au moins 3.

   - *On teste la méthode avec $P = 1$:*
   $$I(P) = \int_{-1}^{1} dx = 2 \quad \text{et} \quad J(P) = 2\alpha\,,$$
   On aboutit à une première condition : $\boxed{\alpha = 1}$.
   - *On considère à présent $P(x) = x$. Notons que P est impaire, donc $I(P) = J(P) = 0$. Il n'y a aucune contrainte sur α et a.*
   - *On considère maintenant $P(x) = x^2$. On a*
   $$I(P) = \int_{-1}^{1} \sin^2(x)dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right) dx = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{\sin(2)}{2}\,,$$
   et $J(P) = P(-a) + P(a) = 2a^2$. D'où la deuxième condition: $2a^2 = 1 - \dfrac{\sin(2)}{2}$, c'est à dire $\boxed{a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sin(2)}}$.

3. Déterminer l'ordre de cette méthode.
Considérons le polynôme $P(x) = x^3$. Il s'agit d'une fonction impaire, donc d'après la question 1, $I(P) = J(P) = 0$ et donc la formule de quadrature est d'ordre au moins 3. On vérifie que pour $P(x) = x^4$ on a $I(P) \neq J(P)$, de sorte que la formule est d'ordre (exactement) 3.

2.3 Erreur d'une méthode

On se donne pour but d'estimer l'erreur commise lorsqu'on emploie une méthode de quadrature de type interpolation (voir Définition 2.3). Rappelons un résultat important concernant l'erreur d'interpolation, établi dans le chapitre précédent:

Théorème 2.1

Supposons la fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$, et que P_n est le polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction f, associé aux noeuds $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$. Alors *on a, pour tout $x \in [a,b]$:*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(f) |\pi_n(x)|, \tag{4}$$

avec $\pi_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ *et* $M_{n+1}(f) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Exemple 2.5 (*Méthode des rectangles*)**.** Considérons par exemple la méthode des rectangles à gauche, donnée par la formule $J(f) = (b-a)f(a)$. Rappelons que cette méthode est associée au polynôme d'interpolation constant défini par $P(x) = f(a)$, c'est à dire que $J(f) = \int_a^b P(x)dx$ (voir l'Exemple 2.1). On a:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(a) \right| = \left| \int_a^b (f(x) - P(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P(x)|\, dx\,.$$

D'après (4), en supposant f dérivable, on a $|f(x) - P(x)| \leq M_1(f)|x-a|$ pour tout $x \in [a,b]$, d'où l'on tire:

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|\, dx \leq M_1(f) \int_a^b (x-a)dx\,.$$

On obtient l'estimation suivante:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(a) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1(f)\,. \tag{5}$$

Exemple 2.6 (*Méthode des trapèzes*)**.** Dans ce cas, la formule de quadrature est donnée par:

$$J(f) = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right). \tag{6}$$

C'est la méthode de quadrature associée au polynôme d'interpolation P_1 aux noeuds a et b (voir l'Exemple 2.1). Pour rappel $P_1(x) = f(a)L_0(x) + f(b)L_1(x)$, avec L_0, L_1 les polynômes de Lagrange associés aux noeuds a et b respectivement, et

$$J(f) = \int_a^b P_1(x)dx = f(a)\omega_0 + f(b)\omega_1,$$

avec $\omega_0 = \int_a^b L_0(x)dx$ et $\omega_1 = \int_a^b L_1(x)dx$. Par un raisonnement analogue au précédent:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - J(f) \right| = \left| \int_a^b (f(x) - P_1(x))\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - P_1(x)|\, dx\,,$$

et, en supposant f de classe $\mathcal{C}^2$, l'inégalité (4) pour $n = 1$ donne

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{1}{2} M_2(f)\, |(x-a)(x-b)|$$

pour tout $x \in [a,b]$. Le calcul donne $\displaystyle\int_a^b |(x-a)(x-b)| = \frac{(b-a)^3}{6}$, de sorte que

$$\left|\int_a^b f(x)dx - J(f)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2(f)\,. \tag{7}$$

Cas général

Considérons à présent le cas général, avec une méthode de quadrature associé au polynôme d'interpolation P_n aux noeuds $x_0, \cdots, x_n$. La formule de quadrature est donc donnée par:

$$J(f) = \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)\,,$$

où $\omega_k = \displaystyle\int_a^b L_k(x)dx$ pour tout $k = 0, \cdots, n$ et L_k désigne le polynôme interpolateur de Lagrange au noeud x_k. Comme précédemment, on a l'estimation:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - J(f)\right| \leq \int_a^b |f(x) - P_n(x)|\, dx\,.$$

En supposant f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a: $|f(x) - P_n(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(f)\, |\pi_n(x)|$ pour tout $x \in [a,b]$. D'autre part:

$$|\pi_n(x)| = \left|\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)\right| \leq (b-a)^{n+1}\,,$$

pour tout $x \in [a,b]$, et donc: $\displaystyle\int_a^b |\pi_n(x)|\, dx \leq (b-a)^{n+2}$. On aboutit donc au théorème suivant:

Théorème 2.2

Supposons f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a,b]$. Soit $J(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega_k f(x_k)$ la méthode de quadrature associée au polynôme d'interpolation P_n aux noeuds $x_0, \cdots, x_n$. On a l'estimation d'erreur suivante:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - J(f)\right| \leq \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)!} M_{n+1}(f)\,.$$

Remarque 2.1. Les formules (5) et (7) sont plus fines que celles obtenues via la formule générale du Théorème 2.2. En effet, dans ces deux cas nous avons pu intégrer explicitement le polynôme π_n, ce qui donne une meilleure estimation que celle donnée par la majoration brutale $\|\pi_n\|_\infty \leq (b-a)^{n+1}$.

Certaines formules de quadrature ne rentrent pas dans le cadre du théorème précédent (nous avons déjà vu des méthodes qui ne sont pas de type interpolation), et il faut avoir recours à d'autres stratégies afin d'obtenir une estimation de l'erreur. Avant d'illustrer une solution possible à travers un exemple, il est utile de rappeler le théorème suivant:

Théorème 2.3

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et u, v deux fonctions dérivables définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $[a, b]$. Alors la fonction définie par

$$\phi(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} f(s)ds \quad , \forall\, t \in I$$

est dérivable sur I, et sa dérivée est donnée par:

$$\phi'(t) = v'(t)f(v(t)) - u'(t)f(u(t)) \quad , \forall\, t \in I\,.$$

Proof: par définition, $\phi(t) = F(v(t)) - F(u(t))$ pour tout $t \in I$, avec F une primitive de f. Par suite, le Théorème de dérivation des fonctions composées donne que $\phi = F \circ v - F \circ u$ est dérivable, avec:

$$\phi'(t) = v'(t)F'(v(t)) - u'(t)F'(u(t))$$

pour tout $t \in I$, d'où le résultat. ■

Exemple 2.7 (*Autre approche pour la formule des trapèzes*)**.** Pour toute fonction f continue sur $[-1, 1]$, on note $I(f) = \int_{-1}^{1} f(s)ds$. La formule des trapèzes est donnée par:

$$J(f) = f(-1) + f(1)\,.$$

On introduit la fonction suivante:

$$\psi(t) = \int_{-t}^{t} f(s)ds - t\,(f(-t) + f(t)) + kt^3 \quad , \forall\, t \in [-1, 1]\,,$$

où k est une constante réelle. On remarque que:

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \int_{-1}^{1} f(s)ds - (f(-1) + f(1)) + k \\ &= I(f) - J(f) + k\,. \end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant k tel que $\psi(1) = 0$, on aura $|I(f) - J(f)| = k$, et la connaissance d'une borne sur k permettra de quantifier l'erreur commise. Dès lors, l'objectif est d'obtenir un estimation sur le réel k.

Dans ce qui suit, nous supposerons f de classe $\mathcal{C}^2$. Choisissons donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\psi(1) = 0$. Notons que ψ se rééecit $\psi = \phi - g$, avec, pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$\phi(t) = \int_{-t}^{t} f(s)ds \quad , \quad g(t) = t\,(f(-t) + f(t)) - kt^3\,.$$

Notons que le Théorème 2.3 nous assure que ϕ est dérivable, avec $\phi'(t) = f(t) + f(-t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$. D'autre part, g l'est aussi car f est de classe $\mathcal{C}^2$. Il en résulte que ψ est dérivable et que:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \underbrace{f(t) + f(-t)}_{\phi'(t)} - \underbrace{\left[f(-t) + f(t) + t\,(f'(t) - f'(-t)) - 3kt^2\right]}_{g'(t)} \\ &= -t\,(f'(t) - f'(-t)) + 3kt^2\,.\end{aligned}$$

pour tout $t \in [-1, 1]$. Notons que $\phi(0) = g(0) = 0$, et donc $\psi(0) = 0$. D'autre part, $\psi(1) = 0$. Le Théorème de Rolle nous assure qu'il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que $\psi'(\xi) = 0$. D'après ce qui précède:

$$\psi'(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3k = \frac{f'(\xi) - f'(-\xi)}{\xi}\,.$$

Or, f étant de classe $\mathcal{C}^2$, par le Théorème des accroissements finis il existe $\eta \in]-\xi, \xi[$ tel que $f'(\xi) - f'(-\xi) = f''(\eta)\,(\xi - (-\xi))$, c'est à dire:

$$\frac{f'(\xi) + f'(-\xi)}{2\xi} = f''(\eta)\,.$$

On en déduit que $k = \dfrac{2}{3} f''(\eta)$. Par conséquent, en se basant sur la relation $I(f) = J(f) - k$, il existe $\eta \in]-1, 1[$ tel que:

$$\int_{-1}^{1} f(s)ds = (f(1) + f(-1)) - \frac{2}{3} f''(\eta)\,.$$

On a donc l'estimation suivante:

$$|I(f) - J(f)| \leq \frac{2}{3} M_2(f)\,,$$

où l'on rappelle la notation $M_2(f) = \sup_{t\in[-1,1]} |f''(t)|$. A noter que l'on retombe sur la même estimation que celle obtenue dans l'Exemple 2.6 (le second membre de la formule (7) se réécrit $\dfrac{2}{3} M_2(f)$ dans le cas présent).

Dans le cas de méthodes d'ordre plus élevé, ce procédé nécessite un ou plusieurs niveaux de dérivation supplémentaires sur ψ. Les calculs peuvent s'avérer fastidieux et il faut être particulièrement méticuleux à chaque étape, et en particulier vigilant par rapport aux erreurs de signe. A titre d'exercice, on pourra traiter l'exemple suivant, dont la formule ne rentre pas dans le cadre du Théorème 2.2. D'autres exemples seront vus en TD.

Exercice 2.4. On suppose f de classe $\mathcal{C}^4$. Retournons à l'Exemple 2.2, avec la formule de quadrature suivante:

$$J(f) = 2f(0) + \frac{1}{6}\left(f'(1) - f'(-1)\right) .$$

Pour obtenir une estimation de l'erreur, on introduit la fonction définie par:

$$\psi(t) = \int_{-t}^{t} f(s)ds - 2tf(0) - \frac{t^2}{6}\left(f'(t) - f'(-t)\right) - kt^5$$

pour tout $t \in [-1,1]$, où k est une constante réelle choisie telle que $\psi(1) = 0$.

1. Montrer que qu'il existe $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dans l'intervalle $]0,1[$ tels que:

$$\psi'(\theta_1) = 0 \quad , \quad \psi''(\theta_2) = 0 \quad , \quad \psi^{(3)}(\theta_3) = 0\, .$$

2. Montrer que $|k| \leq C \sup_{t\in[-1,1]} |f^{(4)}(t)|$, avec C une constante réelle qu'on ne cherchera pas à expliciter.

3. En déduire une estimation d'erreur pour la formule J.

2.4 Formules composées

Considérons une fonction f continue sur $[a,b]$, et une subdivision régulière $a = y_0 < \cdots < y_N = b$ de l'intervalle $[a,b]$. On note $h = \dfrac{b-a}{N}$ le pas de cette subdivision. L'intégrale sur $[a,b]$ se réécrit

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx\, , \tag{8}$$

et nous allons utiliser des formules de quadrature simples sur chaque intervalle $[y_j, y_{j+1}]$, $j = 0, \cdots, N-1$.

Exemple 2.8 (*Formules des rectangles*)**.** La formule des rectangles à gauche (à un point) donne, pour tout $j = 0, \cdots, N-1$:

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx \simeq f(y_j)\left(y_{j+1} - y_j\right) = hf(y_j)\, .$$

Ainsi, en utilisant ces approximation pour chaque intégrale impliquée dans (8):

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h \sum_{j=0}^{N-1} f(y_j)\, .$$

Par conséquent, dans sa version générale, la méthode des rectangles à gauche est une méthode composite, associée à la méthode de quadrature simple à un seul noeud donnée par (2).

Concernant l'erreur, en supposant f de classe $\mathcal{C}^1$, le Théorème 2.2 donne, pour $j = 0, \cdots, N-1$:

$$\left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - f(y_j) \underbrace{(y_{j+1} - y_j)}_{=h} \right| \leq (\underbrace{y_{j+1} - y_j}_{=h})^2 M_1(f) \,.$$

Par suite, en utilisant (5) sur chaque intervalle $[y_k, y_{k+1}]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - h\sum_{j=0}^{N-1} f(y_j) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - hf(y_j) \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - hf(y_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h^2}{2} M_1(f) = N\frac{h^2}{2} M_1(f) \,. \end{aligned}$$

Avec $h = \dfrac{b-a}{N}$, on aboutit à l'estimation:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - -h\sum_{j=0}^{N-1} f(y_j) \right| \leq \frac{1}{2}\,(b-a)\, hM_1(f) \,.$$

Exemple 2.9 (*Formule des trapèzes*)**.** De même, en appliquant la méthode des trapèzes (6) à chaque intervalle $[y_j, y_{j+1}]$, on obtient:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq h\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2}\,(f(y_j) + f(y_{j+1})) \;.$$

Intéressons nous maintenant à l'erreur commise.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1} (f(y_j) + f(y_{j+1})) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1} (f(y_j) + f(y_{j+1})) \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\,(f(y_j) + f(y_{j+1})) \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\,(f(y_j) + f(y_{j+1})) \right| \end{aligned}$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, en utilisant (7):

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1} (f(y_j) + f(y_{j+1})) \right| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{h^3}{12} M_2(f) = \frac{Nh^3}{12} M_2(f) \,,$$

et avec l'égalité $h = \dfrac{b-a}{N}$:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1} \left(f(y_j) + f(y_{j+1})\right) \right| \leq \frac{(b-a)\,h^2}{12} M_2(f)\,. \tag{9}$$

Exemple 2.10 (*Autre approche pour la formule des trapèzes*)**.** Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$. Nous avons vu dans l'Exemple 2.7 qu'il existait $\eta \in [-1,1]$ tel que:

$$\int_{-1}^{1} f(s)ds = (f(1) + f(-1)) - \frac{2}{3} f''(\eta)\,, \tag{10}$$

d'où l'on a tiré l'estimation suivante sur $[-1,1]$:

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - (f(1) + f(-1)) \right| \leq \frac{2}{3} M_2(f)\,.$$

L'idée est de réécrire l'égalité (10) pour chaque intervalle $[y_j, y_{j+1}]$ pour $j = 0, \cdots, N-1$. Fixons $j = 0, \cdots, N-1$, et introduisons le changement de variable affine:

$$u_j(t) = \frac{1}{2}\left(y_j(1-t) + y_{j+1}(1+t)\right) = \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{2}\right) t + \frac{y_{j+1} + y_j}{2}\,,\ \forall t \in [-1,1]\,, \tag{11}$$

de sorte que $u_j(-1) = y_j$ et $u_j(1) = y_{j+1}$. On a donc:

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx = \int_{-1}^{1} u_j'(t) f(u_j(t))dt = \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(u_j(t))dt\,.$$

On peut alors appliquer (10) à la fonction $g = f \circ u_j$, définie et continue sur $[-1,1]$: ainsi il existe $\eta \in [-1,1]$ tel que

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt = (g(1) + g(-1)) - \frac{2}{3} g''(\eta)\,,$$

Notons alors que $g(1) = f(u_j(1)) = f(y_{j+1})$, $g(-1) = f(u_j(-1)) = f(y_j)$ et $g''(t) = \left(\dfrac{y_{j+1} - y_j}{2}\right)^2 f''(u_j(t))$ pour tout $t \in [-1,1]$. On en déduit que $g''(\eta) = \left(\dfrac{y_{j+1} - y_j}{2}\right)^2 f''(\xi_j)$ avec $\xi_j = u_j(\eta) \in [y_j, y_{j+1}]$. On obtient donc qu'il existe $\xi_j \in [y_j, y_{j+1}]$ tel que:

$$\begin{aligned}
\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx &= \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{2}\right) \left[f(y_{j+1}) + f(y_j) - \frac{2}{3}\left(\frac{y_{j+1} - y_j}{2}\right)^2 f''(\xi_j) \right] \\
&= \left(\frac{h}{2}\right) \left[f(y_{j+1}) + f(y_j) - \frac{2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\xi_j) \right]\,.
\end{aligned}$$

Ainsi:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(f(y_j)+f(y_{j+1})\right) - \frac{h^3}{12}\sum_{j=0}^{N-1} f''(\xi_j)\,.$$

On en déduit

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(f(y_j)+f(y_{j+1})\right)\right| = \frac{h^3}{12}\left|\sum_{j=0}^{N-1} f''(\xi_j)\right|\,.$$

On remarque alors que $\left|\sum_{j=0}^{N-1} f''(\xi_j)\right| \leq NM_2(f)$, et en utilisant une nouvelle fois $h = \dfrac{b-a}{N}$, on retrouve l'estimation d'erreur (9):

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(f(y_j)+f(y_{j+1})\right)\right| \leq \frac{(b-a)\,h^2}{12}M_2(f)\,. \tag{12}$$

Cadre général

Supposons que l'on veuille approcher l'intégrale d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Pour approcher $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, on s'appuie sur une formule de quadrature de type interpolation, construite par exemple pour une fonction g définie sur $[-1,1]$:

$$I(g) = \int_{-1}^1 g(x)dx \simeq \sum_{k=0}^n \omega_k g(x_k)\,,$$

La méthode composite associée consiste à appliquer cette formule sur chaque sous-intervalle $[y_j, y_{j+1}]$ afin d'approcher l'intégrale de f, pour $j = 0, \cdots, N-1$. Dans un premier temps, il est donc nécessaire de voir comment se réécrit cette formule sur chaque sous-intervalle. Fixons $j \in [\![0, N-1]\!]$. Avec le changement de variable (11), nous avons vu dans l'Exemple 2.10 que l'on pouvait se ramener à une intégrale sur l'intervalle $[-1,1]$.

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx = \int_{u_j(-1)}^{u_j(1)} u_j'(t)f(u_j(t))dt = \left(\frac{y_{j+1}-y_j}{2}\right)\int_{-1}^1 g_j(t)dt\,,$$

avec $g_j = f \circ u_j$ définie sur $[-1,1]$. La formule de quadrature donne alors:

$$\int_{-1}^1 g_j(x)dx \simeq \sum_{k=0}^n \omega_k g_j(x_k) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(u_j(x_k))\,,$$

ce qui donne la formule composite suivante:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^n \omega_k f(u_j(x_k))\,,$$

où l'on rappelle que u_j est définie par $u_j(t) = \frac{h}{2}t + \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

Concernant l'estimation d'erreur, le Théorème 2.2 donne:

$$\left| \int_{-1}^{1} g(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \omega_k g_j(x_k) \right| \leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} M_{n+1}(g_j)\,,$$

avec $M_{n+1}(g_j) = \sup_{\xi \in [-1,1]} \left| g_j^{(n+1)}(\xi) \right|$. Notons que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_j'(x) = (f \circ u_j)'(x) = u_j'(x) f'(u_j(x)) = \frac{h}{2} f'(u_j(x))$. On en déduit que $\sup_{\xi \in [-1,1]} \left| g_j'(\xi) \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{\xi \in [a,b]} |f'(\xi)|$. Ce résultat initialise une récurrence permettant d'établir que (exercice):

$$M_{p+1}(g_j) = \sup_{\xi \in [-1,1]} \left| g_j^{(p+1)}(\xi) \right| \leq \left(\frac{h}{2} \right)^{p+1} \sup_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(p+1)}(\xi) \right| = \left(\frac{h}{2} \right)^{p+1} M_{p+1}(f)\,,$$

pour tout $j = 0, \cdots, N-1$ et tout $p \in \mathbb{N}$. Par suite, on a, pour tout $j = 0, \cdots, N-1$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(u_j(x_k)) \right| &= \frac{h}{2} \left| \int_{-1}^{1} g_j(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \omega_k g_j(x_k) \right| \\
&\leq \frac{h}{2} \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} M_{n+1}(g_j) \\
&\leq \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{n+2} M_{n+1}(f)\,,
\end{aligned}$$

ce qui permet d'aboutir à l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{a}^{b} f(x)dx - \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(u_j(x_k)) \right| &= \left| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(u_j(x_k)) \right) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{N-1} \left| \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)dx - \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n} \omega_k f(u_j(x_k)) \right| \\
&\leq N \frac{2^{n+2}}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2} \right)^{n+2} M_{n+1}(f) \\
&\leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} (b-a) M_{n+1}(f)\,.
\end{aligned}$$