Université Claude Bernard Lyon 1
Préparation à l'écrit 1 du CAPES de mathématique

2021 - 2022

SUJET BLANC - 31 janvier 2022

Durée : 5 heures. Le sujet comporte 8 pages et deux problèmes indépendants.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une partie importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.
Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.
Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.

Les problème A et B seront traités sur des copies séparées.

Problème A - Puissances de matrices dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans ce problème on note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels, et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

PARTIE I - Un premier exemple [1].

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que (M, I) est une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Il suffit de remarquer que M n'est pas une homothétie, et n'est donc pas colinéaire à I.

2. Calculer M^2.
$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Montrer que M a pour polynôme minimal $X^2 - X - 2$.
Par la question précédente, on a $M^2 = M + 2I$, donc $X^2 - X - 2$ est un polynôme annulateur de M. Comme (M, I) est libre, aucun polynôme de degré 1 n'annule M. Il suit que $X^2 - X - 2$ est le polynôme minimal de M.

4. Première méthode de calcul des puissances de M.

(a) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers telles que pour tout entier naturel n, on ait $M^n = a_n M + b_n I$.
Initialisation : *On a $M^0 = 0 \times M + 1 \times I$ donc $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ sont deux entiers qui conviennent.*
Hérédité : *Soit un entier naturel n. Supposons qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $M^n = a_n M + b_n I$. Alors, $M^{n+1} = a_n M^2 + b_n M = a_n(M + 2I) + b_n M = (a_n + b_n)M + 2a_n I$. Ainsi, en posant $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$, on a $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$ et, comme a_n et b_n sont entiers, a_{n+1} et b_{n+1} sont également entiers.*

On fixe deux telles suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $X_n = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifions ce résultat à nouveau par récurrence. (En fait, on vérifie ici que les suites sont uniques.)
Initialisation : *On a $I = M^0 = a_0 \times M + b_0 \times I$ donc $a_0 M + (b_0 - 1)I = 0$. Comme (M, I) est libre, on en déduit que $a_0 = 0$ et $b_0 - 1 = 0$ et donc que $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Hérédité : *Soit un entier naturel n. Supposons que $X_n = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $M^n =$*

1. Cette partie est librement inspirée de l'exercice 4 du sujet du bac S Mathématiques Spécialité 2020 - Polynésie remplacement

a_nM+b_nI et $M^{n+1}=a_{n+1}M+b_{n+1}I$, le calcul dans la question précédente impose que $a_{n+1}M+b_{n+1}I=(a_n+b_n)M+2a_nI$, ou encore que $(a_{n+1}-a_n-b_n)M+(b_{n+1}-2a_n)I=0$. Comme (M,I) est libre, cela entraîne que $a_{n+1}=a_n+b_n$ et $b_{n+1}=2a_n$, ce qui est équivalent à $X_{n+1}=AX_n$. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient $X_{n+1}=A\times A^nX_n=A^{n+1}X_n$.

On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(c) Vérifier que P est inversible et que la matrice $D=P^{-1}AP$ est diagonale.
Il n'est pas nécessaire pour cette question de calculer P^{-1}.
$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ sont donc des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres 2 et -1. Comme de plus A est carrée de taille 2, ces deux vecteurs propres de A forment une base, la matrice P est inversible et $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

(d) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $X_n=PD^nP^{-1}X_0$.
Par récurrence, on vérifie alors que pour tout entier naturel n, on a $A^n=PD^nP^{-1}$, puis par (b), $X_n=PD^nP^{-1}X_0$.

(e) Calculer $P^{-1}X_0$.
Cela revient à résoudre le système $P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=X_0$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{lcl}x+y & = & 0\\ x-2y & = & 1\end{array}\right.$.
Ce système a pour solution $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Donc $P^{-1}X_0=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

(f) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+(-1)^{n+1}\\ 2^n+2\times(-1)^n\end{pmatrix}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Par les questions (d) et (e), on a :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} &= PD^n(P^{-1}X_0)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n\\ (-1)^{n+1}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+(-1)^{n+1}\\ 2^n+2\times(-1)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(g) Vérifier enfin que pour tout entier naturel n,

$$M^n=\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}(M+I)+(-1)^nI.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Par ce qui précède, on a

$$M^n=a_nM+b_nI=a_n(M+I)+(b_n-a_n)I=\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}(M+I)+(-1)^nI.$$

5. Interlude arithmétique

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel k, on a $2^{4k} \equiv 1$ modulo 5.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $2^4 = 16 \equiv 1$ modulo 5, donc $2^{4k} \equiv 1^k \equiv 1$ modulo 5.

On considère un entier naturel n multiple de 4.

(b) Montrer que $3a_n$ est divisible par 5 (où a_n correspond au terme de la suite considérée en **4**).

Comme n est multiple de 4, il existe un entier k tel que $n = 4k$. Alors,

$$3a_n = 2^{4k} + (-1)^{4k+1} = 2^{4k} - 1 \equiv 0 \text{ modulo } 5.$$

Donc 5 divise $3a_n$.

(c) En déduire que a_n est divisible par 5.

5 est premier avec 3 et divise $3a_n$ donc, par le lemme de Gauss, 5 divise a_n.

6. Seconde méthode de calcul des puissances de M.

(a) Expliquer pourquoi M est diagonalisable.

M a pour polynôme minimal $X^2 - X - 2$. Or $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, est un polynôme scindé à racines simples ; M est donc diagonalisable.

(b) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M.

Les valeurs propres de M correspondent aux racines de son polynôme minimal ; M a donc pour valeurs propres 2 et -1.

(c) Expliciter une base pour chacun des espaces propres de M.

On a $E_2 = \ker(M-2I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = \ker(M+I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où E_2 et E_{-1} sont les sous-espaces propres correspondant respectivement aux valeurs propres 2 et -1.

On voit immédiatement que E_{-1} est de dimension 2 (la matrice étant de rang 1) et donc comme $\dim E_2 + \dim E_{-1} = 3$, on a $\dim E_2 = 1$.

Un simple calcul montre que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de E_2, il forme donc une base de E_2.

On remarque également que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à E_{-1}. Comme ils sont non colinéaires et $\dim E_{-1} = 2$, ils forment une base de E_{-1}.

(d) Diagonaliser M.

Considérons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage à la base formée des vecteurs propres précédemment calculée. Alors $M = Q \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer M^n et retrouver le résultat de la question **4**(g).

Par une simple récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = Q \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n Q^{-1}$.

Il s'agit donc de calculer l'inverse de Q. Par un rapide calcul, on obtient

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

puis, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ 2^n & (-1)^{n+1} & 0 \\ 2^n & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2\times(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n - 2\times(-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n + (-1)^{n+1} & 2^n - 2\times(-1)^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\big((2^n + (-1)^{n+1})M + (2^n + 2\times(-1)^n)I\big) = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}(M+I) + (-1)^n I. \end{aligned}$$

PARTIE II - Un second exemple.

On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $N = S - M$ où M est la matrice de la partie précédente.

1. Calculer N.

$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Vérifier que $N^2 = 0$ et que $MN = NM = -N$.

Comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ *et que les autres lignes, respectivement colonnes sont colinaires, il suit que* $N^2 = 0$.

$MN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -N.$

De même $NM = -N$.

3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$S^n = M^n + nM^{n-1}N = M^n + n(-1)^{n-1}N.$$

On a $S = M + N$ *et les matrices* M *et* N *commutent. On peut appliquer la formule du binôme de Newton : pour* $n \geqslant 0$,

$$S^n = (M+N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}M^{n-k}N^k.$$

Comme $N^2 = 0$, *il suit que pour* $n \geqslant 1$, $S^n = M^n + nM^{n-1}N$.
Enfin, comme $MN = -N$, *par une récurrence immédiate, on a pour tout entier naturel* m, $M^mN = (-1)^mN$, *ce qui permet de conclure que pour tout entier naturel* $n \geqslant 1$, $S^n = M^n + n(-1)^{n-1}N$.

4. Montrer que $(S+I)(S-2I) = -3N$.
On pourra utiliser le fait que $M^2 = M + 2I$, *ainsi que les deux questions précédentes.*
$(S+I)(S-2I) = S^2 - S - 2I = M^2 - 2N - M - N - 2I = M + 2I - M - 2I - 3N = -3N.$

5. Montrer que $(S+I)^2(S-2I)=0$.
$(S+I)^2(S-2I) = -3(S+I)N = -3(M+N+I)N = -3(MN+N^2+N) = -3(-N+0+N) = 0$.

6. En déduire que S est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais non diagonalisable.
Par la question précédente, S a comme polynôme annulateur le polynôme $(X+1)^2(X-2)$, qui est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. La matrice S est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, les seules valeurs propres possibles pour S sont alors -1 et 2. Par la question 4, le polynôme $(X+1)(X-2)$ n'annule pas S, donc S n'est pas diagonalisable.

PARTIE III - Cas général.

On considère une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré 3. Démontrer que f s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}$.
Il existe des réels a, b, c, d tels que $a \neq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$. Par croissance comparée, si $a>0$, la fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Dans le second cas, où $a<0$, la fonction f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et vers $+\infty$ en $-\infty$. Dans les deux cas, f est une fonction continue qui change de signe. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule en au moins un point de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que B admet au moins une valeur propre réelle.
Le polynôme caractéristique de B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3. Par la question précédente, il a au moins une racine réelle, qui est une valeur propre de B.

3. Expliquer rapidement comment on peut calculer les puissances de B si B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Si B est diagonalisable, on détermine une base formée de vecteurs propres de B et on considère la matrice de passage P à cette base. Alors $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$B^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

4. On suppose dans cette question que B n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de B admet trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$. *On a vu à la question 2 qu'il admettait au moins une racine réelle λ. Il se factorise ainsi sous la forme $(X-\lambda)P_2$ où P_2 est un polynôme de degré 2. Comme B n'est pas trigonalisable, son polynôme caractéristique ne peut être scindé dans $\mathbb{R}[X]$, ainsi P_2 n'a pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées μ et $\overline{\mu}$.*

(b) Expliquer dans ce cas, comment on peut calculer les puissances de B. *Dans ce cas, on peut diagonaliser B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, ainsi à l'aide d'une matrice de passage P à valeurs complexes, on obtient alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$B^n = P \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mu}^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5. On suppose enfin que B est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais n'est pas diagonalisable.

(a) Supposons pour cette question que B n'a qu'une seule valeur propre λ. Posons dans ce cas $N = B - \lambda I$. Montrer que $N^3 = 0$, puis en déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$B^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}\,\lambda^{n-2}N^2.$$

Considérer le polynôme caractéristique de B, et ensuite, l'égalité $B = \lambda I + N$.
Comme B n'a qu'une valeur propre et est trigonalisable, son polynôme caractéristique est scindé et vaut $(X-\lambda)^3$. (Remarque : comme B n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal vaut $(X-\lambda)^2$ ou $(X-\lambda)$.) Par Cayley-Hamilton, on a donc $(B-\lambda I)^3 = 0$, c'est-à-dire $N^3 = 0$. Comme N commute avec λI, on peut utiliser la formule du binôme de Newton : pour $n \geqslant 0$,

$$B^n = (\lambda I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k.$$

Enfin, comme $N^3 = 0$, on en déduit que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$B^n = \lambda^n I + n\lambda^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}\,\lambda^{n-2}N^2.$$

Pour la suite, on suppose que B a au moins deux valeurs propres distinctes.

(b) Montrer que dans ce cas B a exactement deux valeurs propres distinctes et que le polynôme minimal de B est de la forme $(X-\lambda)(X-\mu)^2$ où λ et μ sont deux réels distincts.

B ne peut avoir trois valeurs propres distinctes sinon B serait diagonalisable. Ainsi, son polynôme caractéristique est de la forme $(X-\lambda)(X-\mu)^2$ où λ et μ sont deux réels distincts. Son polynôme minimal a nécessairement pour racines λ et μ et ne peut être à racines simples, car B est non diagonalisable. Ce polynôme vaut donc $(X-\lambda)(X-\mu)^2$.

(c) Montrer qu'il existe deux polynômes réels U et V tels que

$$(X-\lambda)U + (X-\mu)^2 V = 1.$$

Les polynômes $(X-\lambda)$ et $(X-\mu)^2$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$. Le théorème de Bezout permet de conclure.

(d) On pose dans ce cas $N = (B-\lambda I)(B-\mu I)U(B)$.
Vérifier que $N^2 = 0$.

Les facteurs ci-dessus de N commutent entre-eux donc

$$N^2 = (B-\lambda I)^2(B-\mu I)^2(U(B))^2 = 0$$

car $(B-\lambda I)(B-\mu I)^2 = 0$.

(e) On pose alors $D = B - N$.
Montrer que $(D-\lambda I)(D-\mu I) = 0$.

$$\begin{aligned}(D-\lambda I)(D-\mu I) &= (B-\lambda I-N)(B-\mu I-N)\\ &= (B-\lambda I)(B-\mu I) - (B-\lambda I)N - (B-\mu I)N + N^2.\end{aligned}$$

On a $N^2 = 0$ *et* $(B - \mu I)N = (B - \lambda I)(B - \mu I)^2 U(B) = 0$.
En utilisant, l'identité de Bezout ci-dessus, on a

$$\begin{array}{rcl} (B - \lambda I)N & = & (B - \lambda I)(B - \mu I)(B - \lambda I)U(B) \\ & = & (B - \lambda I)(B - \mu I)(I - (B - \mu I)^2 V(B)) \\ & = & (B - \lambda I)(B - \mu I) - (B - \lambda I)(B - \mu I)^3 V(B) \\ & = & (B - \lambda I)(B - \mu I). \end{array}$$

D'où $(D - \lambda I)(D - \mu I) = 0$.

(f) En déduire que D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
D a pour polynôme annulateur $(X - \lambda)(X - \mu)$, qui est scindé, donc D est diagonalisable.

(g) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$B^n = D^n + nD^{n-1}N.$$

N est un polynôme en B et commute donc avec B, et donc avec $D = B - N$. On utilise à nouveau la formule du Binôme de Newton et le fait que $N^2 = 0$ pour conclure.

Problème B - Intégration numérique

Notations et rappels

- Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- Si $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Un vecteur $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifiera les fonctions polynomiales définies sur un intervalle $[a, b]$ avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On considère ainsi $\mathbb{R}[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$.
- Étant donnés un entier $n \geqslant 2$ et $a_1, \cdots, a_n$, n éléments de $\mathbb{R}$, on pose :

$$M(a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

  communément appelée **matrice de Vandermonde**.
  On admettra le résultat suivant :

$$W(a_1, \cdots, a_n) := \det(M(a_1, \cdots, a_n)) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

  En particulier, $\det(M(a_1, \cdots, a_n)) \neq 0$ si et seulement si les $a_1, \cdots, a_n$ sont tous distincts.
- Enfin, on adoptera la convention $M(a) = 1$ pour tout réel a.

PARTIE I - Généralités.

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et deux réels a, b tels que $a < b$.
On considère une fonction réelle f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$.
On pose $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. On cherche une approximation de $I(f)$, notée $J(f)$, sous la forme suivante :

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

où les $(x_k)_{k=0,\cdots,n}$ sont $n + 1$ points distincts de $[a, b]$ vérifiant

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

(communément appelés **points d'intégration**) et les $(\lambda_i)_{i=0,\cdots,n}$ sont des réels (communément appelés **poids d'intégration**). La méthode d'approximation est dite **d'ordre au**

moins n si $I(P) = J(P)$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n.

On dit dans ce cas que J est une **formule d'intégration d'ordre n aux points d'intégration** $(x_0, \cdots, x_n)$.

Enfin, on dit qu'une méthode est **d'ordre exactement n** si elle est d'ordre au moins n et si elle n'est pas exacte pour un polynôme de degré supérieur.

1 - Montrer que I et J sont des applications linéaires du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$.

La linéarité de I découle directement de la linéarité de l'intégrale.
Concernant la linéarité de J, on peut commencer par remarquer que $J(0) = 0$ (mais ce n'est pas nécessaire). Soit $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$J(f + \mu g) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(f(x_k) + \mu g(x_k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) + \mu \sum_{k=0}^{n} \lambda_k g(x_k) = J(f) + \mu J(g)\,,$$

ce qui assure la linéarité de J.

2 - Justifier rapidement que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie. Quelle est sa dimension ?

L'ensemble des polynômes de degré au plus n contient la fonction nulle et est stable par addition et multiplication scalaire. Ensuite, tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ admet une décomposition unique sur la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, \cdots, X^n\}$, et donc $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.

3 - Montrer que $I_{|\mathbb{R}_n[X]} = J_{|\mathbb{R}_n[X]}$ si et seulement si I et J coïncident sur les polynômes $X^i : x \longmapsto x^i$ pour tout $i = 0, \cdots, n$.

Les restrictions de I et J à $\mathbb{R}_n[X]$ sont deux applications linéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie. Ces deux applications sont les mêmes si et seulement si elles coïncident sur les éléments de la base canonique.

4 - (a) Calculer $I(X^0)$ et $J(X^0)$. En déduire que $I(X^0) = J(X^0) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = (b-a)$.

Le calcul donne :

$$I(X^0) = I(1) = \int_a^b dt = b - a\,,$$

$$J(X^0) = J(1) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\,,$$

d'où le résultat.

(b) Calculer $I(X^i)$ et $J(X^i)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

$$I(X^i) = \int_a^b t^i dt = \left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_a^b = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}\,.$$

$$J(X^i) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x_k)^i\,.$$

(c) Montrer que la condition : $I(X^i) = J(X^i)$ pour tout $i = 0, \cdots, n$ équivaut à :

$$^t M(x_0, \cdots, x_n). \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \vdots \\ \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où $M(x_0, \cdots, x_n)$ est la matrice de Vandermonde de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, définie dans le préambule de la **Partie B.** En déduire que la formule J est une formule d'intégration d'ordre n aux points $x_0, \cdots, x_n$ si et seulement si les $(\lambda_i)_{i=0,\cdots,n}$ sont solution de (1).

On déduit de ce qui précède que $I(X^i) = J(X^i)$ pour tout $i = 0, \cdots, n$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x_k)^i = \dfrac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}$ pour tout $i = 0, \cdots, n$, ce qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_0)^n & (x_1)^n & \cdots & (x_n)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \vdots \\ \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

5 - En déduire l'existence et l'unicité d'une formule d'intégration d'ordre n aux points d'intégration $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$. *(On pourra utiliser les rappels sur le déterminant de la matrice de Vandermonde).*

Etant donnés $n+1$ point d'intégration $x_0, \cdots, x_n$, la formule J est d'ordre n si et seulement si le vecteur ${}^t(\lambda_0, \cdots \lambda_n)$ est solution de (2). Or d'après les rappels, det(M) est non nul car les $x_0, \cdots, x_n$ sont distincts, ce qui assure l'existence et l'unicité des coefficients $\lambda_0, \cdots \lambda_n$.

6 - ***Application aux formules d'intégration classiques :*** L'objectif ici est de déterminer la formule d'intégration d'ordre n associée à des exemples classiques de choix de n points dans l'intervalle $[a, b]$.

Méthode des rectangles

(a) On pose $n = 0$ et $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
Utiliser la formule (1) pour retrouver la formule du rectangle (pour la matrice de Vandermonde de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on adoptera la convention $M(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$J(f) = (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right) .$$

On a $M = 1$. La formule (2) donne $\lambda = b - a$ et par conséquent $J(f) = (b-a) f\left(\dfrac{b+a}{2}\right)$.

Méthode de Simpson

(b) On considère le cas $n = 2$ avec $a = x_0 = 0, x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b = x_2 = 1$.
Utiliser (1) pour retrouver la formule de Simpson :

$$J(f) = \left[\frac{1}{6} f(0) + \frac{4}{6} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} f(1)\right] .$$

On vérifie par le calcul que l'égalité (2) se réécrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} ,$$

d'où l'on tire $\lambda_0 = \lambda_2 = 1/6$ et $\lambda_1 = 4/6$.

(c) On se place sur un intervalle $[a,b]$ quelconque. On considère $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et la transformation affine $\phi : x \in [0,1] \longmapsto a + x(b-a)$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\int_0^1 g(x)dx\,,$$

où l'on a posé $g = f \circ \phi$. En déduire une généralisation de la formule précédente.
La formule du changement de variables donne :

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\int_0^1 g(x)dx\,.$$

D'après ce qui précède, la formule de Simpson permet d'approcher l'intégrale de g sur $[0,1]$ par :

$$J(g) = \frac{1}{6}\left[g(0) + 4g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1)\right],$$

et donc, en revenant à f :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

PARTIE II - Erreur d'approximation.

On rappelle ici que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on note par

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt\,,$$

l'intégrale de f entre a et b, et

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

la formule d'intégration d'ordre n aux points $x_0, \cdots, x_n$ qui lui est associée.
On cherche à présent à estimer l'erreur d'approximation. On note :

$$E(f) = I(f) - J(f)\,.$$

1 - Justifier rapidement que $E : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ est linéaire.
E est linéaire comme somme d'applications linéaires.

2 - On note respectivement par E_R et E_S les applications obtenues en utilisant les formules d'approximation établies au **6 -**(a) et **6 -**(b).

(a) Calculer $E_R(X)$ et $E_R(X^2)$. En déduire l'ordre exact de la méthode des rectangles.

$$\begin{aligned} E_R(X) &= \int_a^b t dt - (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \left[t^2/2\right]_a^b - \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

$$E_R(X^2) = \int_a^b t^2 dt - (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$= \left(b^3/3 - a^3/3\right) - \frac{1}{4}(a+b)(b^2-a^2)\,.$$

Cette dernière quantité n'étant pas nulle (en général), on en déduit que la méthode est d'ordre exactement 1 (elle est d'ordre 1 mais pas d'ordre 2).

(b) On travaille ici sur l'intervalle $[0,1]$. Calculer $E_S(X^3)$ et $E_S(X^4)$. En déduire l'ordre exact de la méthode de Simpson.

Par définition de la méthode de Simpson, qui est une application de la partie I avec $n = 2$, on a $E_S(1) = E_S(X) = E_S(X^2) = 0$. Le calcul donne :

$$E_S(X^3) = \int_0^1 t^3 dt - \frac{1}{6}\left[0^3 + 4\,(1/2)^3 + 1^3\right]$$
$$= \left[t^4/4\right]_0^1 - \frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}\right]$$
$$= 1/4 - 1/4 = 0\,.$$

$$E_S(X^4) = \int_0^1 t^4 dt - \frac{1}{6}\left[0^4 + 4\,(1/2)^4 + 1^4\right]$$
$$= \left[t^5/5\right]_0^1 - \frac{1}{6}\left[\frac{5}{4}\right]$$
$$= 1/5 - 5/24 \neq 0\,.$$

On en déduit que la méthode de Simpson est d'ordre exactement 3.

3 - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, on a $E_R(f) = E_R(r)$, où r est la fonction de $\mathcal{C}([a,b])$ définie par :

$$r(x) = \int_a^x (x-t) f''(t) dt \quad , \quad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour $x \in [a,b]$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t) dt\,.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$. Avec l'indication, on a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t) dt\,.$$

Ainsi, $f = p + r$ avec $p(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$ et $r(x) = \int_a^x (x-t) f''(t) dt$. A noter que p est un polynôme d'ordre 1 (en x), et donc $E_R(p) = 0$. Ainsi :

$$E_R(f) = E_R(p+r) = E_R(p) + E_R(r) = E_R(r)\,,$$

d'où le résultat.

On se place à présent sur l'intervalle $[a,b] = [0,1]$, et on s'intéresse aux fonctions de deux variables continues sur $[0,1]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$h : \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\ x\ ,\ t\ ) & \longmapsto & h(x,t) \end{array}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ fixé, on notera $h(\cdot,t)$ la fonction qui à tout $x \in [0,1]$ associe le réel $h(x,t)$.

On admettra enfin que $\int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,t)dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,t)dx\right) dt$ pour toute fonction continue $h : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ (théorème de Fubini).

4 - Montrer que $\int_0^1 E_R(h(\cdot,t))dt = E_R(g)$, où g est la fonction définie par $g(x) = \int_0^1 h(x,t)dt$ pour tout $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 E_R(h(.,t))dt &= \int_0^1 \left[I(h(.,t)) - J(h(.,t))\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^1 h(x,t)dx - h(1/2,t)\right] dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,t)dx\right) dt - \int_0^1 h(1/2,t)dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x,t)dt\right) dx - \int_0^1 h(1/2,t)dt \\
&= \int_0^1 g(x)dx - g(1/2) \\
&= E_R(g)\,.
\end{aligned}$$

5 - Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. On considère la fonction :

$$\begin{array}{rcl}
u(x,t) : [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
(\ x\ ,\ t\ ) & \longmapsto & (x-t)_+ = \begin{cases} x-t \text{ si } x \geqslant t\,, \\ 0 \text{ sinon }\ . \end{cases}
\end{array}$$

(a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\int_0^1 u(x,t)f''(t)dt = \int_0^x (x-t)f''(t)dt\,.$

Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\int_0^1 u(x,t)f''(t)dt = \int_0^1 (x-t)_+ f''(t)dt = \int_0^x (x-t)_+ f''(t)dt + \int_x^1 (x-t)_+ f''(t)dt\,.$$

Par définition, on a $(x-t)_+ = x-t$ si $t \leqslant x$ et 0 sinon. Par conséquent la seconde intégrale est nulle et on a :

$$\int_0^1 u(x,t)f''(t)dt = \int_0^x (x-t)f''(t).$$

(b) En déduire que $E_R(f) = E_R(g)$, où g est la fonction définie par $g(x) = \int_0^1 u(x,t)f''(t)dt$ pour tout $x \in [0,1]$.

*La question **3** appliquée à l'intervalle $[0,1]$ donne dans un premier temps $E_R(f) = E_R(r)$ où $r(x) = \int_0^x (x-t)f''(t)dt$ pour tout $x \in [0,1]$. La question précédente donne alors $g = r$.*

6 - Montrer que $E_R(f) = \int_0^1 E_R(u(\cdot,t))f''(t)dt$.
Indication : On pourra poser $h(x,t) = u(x,t)f''(t)$ et utiliser le résultat de la question (4-).

On sait que $E_R(f) = E_R(g)$ avec $g(x) = \int_0^1 u(x,t)f''(t)dt$ pour tout $x \in [0,1]$. On définit alors :

$$h: \begin{array}{ccc} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\ x\ ,\ t\ ) & \longmapsto & u(x,t)f''(t) \end{array},$$

de sorte que $g = \int_0^1 h(.,t)dt$. D'après la question 4, on sait que $\int_0^1 E_R(h(.,t))dt = E_R(g)$, c'est à dire :

$$E_R(g) = \int_0^1 E_R\big(u(.,t)f''(t)\big)dt\,.$$

Notons qu'à t fixé on a $E_R\big(u(.,t)f''(t)\big) = E_R\left(u(.,t)\right)f''(t)$ par linéarité de E_R. Il vient donc $E_R(g) = \int_0^1 E_R\left(u(.,t)\right)f''(t)dt\,.$

7 - Montrer que, pour $t \in [0,1]$:

$$K(t) := E_R(u(\cdot,t)) = \begin{cases} t^2/2 & \text{si } t \leqslant 1/2\,, \\ (1-t)^2/2 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

K est communément appelé **noyau de Péano** d'ordre 1 associé à la méthode.

Soit $t \in [0,1]$. On a $E_R(u(.,t)) = \int_0^1 (x-t)_+dx - (1/2-t)_+$. Remarquons que :

$$\int_0^1 (x-t)_+dx = \int_0^t (x-t)_+dx + \int_t^1 (x-t)_+dx = \int_t^1 (x-t)dx = \left[\frac{(x-t)^2}{2}\right]_t^1 = \frac{(1-t)^2}{2}\,.$$

Si $t > 1/2$, alors $(1/2-t)_+ = 0$ et donc $E_R(u(.,t)) = \dfrac{(1-t)^2}{2}$.
Si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$, alors $(1/2-t)_+ = 1/2-t$ et donc $E_R(u(.,t)) = \dfrac{(1-t)^2}{2} - (1/2-t) = t^2/2$.

8 - En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a :

$$|E_R(f)| \leqslant \frac{1}{24}\|f''\|_\infty\,.$$

On a :

$$|E_R(f)| = |E_R(g)| = \left|\int_0^1 E_R(u(.,t))f''(t)dt\right| \leqslant ||f''||_\infty \int_0^1 |E_R(u(.,t))|dt$$

Or :

$$\int_0^1 |E_R(u(.,t))| = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} t^2dt + \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 (1-t)^2dt = 1/24\,,$$

d'où le résultat.