

---

## Interpolation polynomiale

---

### Problématique

À partir des valeurs d'une fonction  $f$  données en certains points  $x_0, \dots, x_n$ , on souhaite

- proposer des algorithmes permettant de construire une fonction  $P$  qui interpole  $f$  aux points  $x_0, \dots, x_n$ , c'est-à-dire telle que  $P(x_i) = f(x_i)$  pour  $i = 0, \dots, n$ .
- évaluer s'il s'agit d'une bonne approximation.

## 1 Rappels sur les polynômes

Dans ce chapitre, nous noterons  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions polynômes réelles. Pour tout élément  $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  et des coefficients  $a_0, \dots, a_n$  appartenant à  $\mathbb{R}$  tels que:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On peut établir sans difficulté que  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel (nous ne le redémontrons pas ici). Nous rappelons ici quelques définitions utiles:

### Définition 1.1

- On appelle **degré** de  $P$  le plus grand entier  $i$  tel que  $a_i \neq 0$ . On le notera  $\deg(P)$ .
- Un **monôme** est un polynôme de la forme  $a_n x^n$  où  $n \in \mathbb{N}$  (en d'autres termes, il n'y a qu'un coefficient non nul).
- Soit  $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  avec  $a_n \neq 0$ . On appelle **terme dominant** le monôme  $a_n x^n$ . Le coefficient  $a_n$  est appelé **coefficient dominant** de  $P$ .
- Si le coefficient dominant d'un polynôme  $P$  est 1, on dit que ce polynôme est **unitaire**.

Nous avons le résultat suivant concernant l'addition et la multiplication de deux polynômes:

### Proposition 1.1

Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes, alors

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \quad \text{et} \quad \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q).$$

Les définitions et la proposition suivantes sont fondamentales en vue des prochains développements:

### Définition 1.2

- Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes. On dit que  $P$  *divise*  $Q$  (ou  $Q$  est un *multiple* de  $P$ ) s'il existe un polynôme  $R$  tel que  $Q(x) = P(x)R(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

### Définition 1.3

- On dit que  $x_0$  est une *racine* de  $P$  si  $P(x_0) = 0$ .
- On dit que  $x_0$  est une racine d'*ordre*  $k$  (ou de *multiplicité*  $k$ ) de  $P$  si  $(x - x_0)^k$  divise  $P$  et que  $(x - x_0)^{k+1}$  ne divise pas  $P$ .

Lorsque  $k = 1$  on parle de racine *simple* et lorsque  $k = 2$  de racine *double*.

### Proposition 1.2

- Un polynôme non nul de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines.
- Si un polynôme de degré  $n$  admet  $n + 1$  racines ou plus, alors c'est le polynôme nul.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous noterons  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Notons que  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . En d'autres termes:

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \deg(P) \leq n\},$$

et pour tout  $P, Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $P + \lambda Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ .

Rappelons que  $\{1, x, \dots, x^n\}$  est une base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ , et que  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  est donc un espace vectoriel de dimension  $n + 1$ . Nous avons la proposition suivante, qui donne une condition suffisante pour qu'une famille de polynômes soit une base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ :

### Proposition 1.3

Toute famille de polynômes  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  échelonnée en degrés (c'est à dire telle que  $\deg(P_i) = i$  pour tout  $i = 0, \dots, n$ ) est une base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1.1.** Soit  $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ . On considère l'application suivante:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\mapsto (P(x_0), P(x_1), P(x_2)). \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\Phi$  est linéaire.
2. Montrer que  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ .
3. En déduire que  $\Phi$  est un isomorphisme (c'est à dire une application linéaire bijective).
4. Reprendre les questions précédentes avec

$$\Psi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$P \mapsto (P(x_0), P'(x_0), P(x_1)).$$

**Exercice 1.2.** Déterminer les polynômes  $P$  vérifiant les relations suivantes:

1.  $P(x^2 + 1) = P(x)$ .
2.  $P(2x + 1) = P(x)$ .
3.  $(P'(x))^2 = 4P(x)$ .

**Exercice 1.3.** Soit  $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\alpha$  est racine d'ordre au moins 2 de  $P$  si et seulement si  $P(\alpha) = 0$  et  $P'(\alpha) = 0$ .

**Exercice 1.4.** Polynômes de Tchebychev. On considère la suite de polynômes  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x).$$

1. Préciser  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Déterminer le terme de plus haut degré de  $P_n$
3. Etudier la parité de  $P_n$
4. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , on a  $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .

**Exercice 1.5.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ . On considère deux réels  $x_0, x_1$  tels que  $P(x_0) = 1$  et  $P(x_1) = 0$ .

1. On définit le polynôme suivant:

$$\widehat{H}(x) = P^2(x)(x - x_0) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Quel est le degré de  $\widehat{H}$  ?

*$P$  étant de degré au plus  $n$ , on a  $P^2 \in \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ , et par suite  $\widehat{H} \in \mathcal{P}_{2n+1}(\mathbb{R})$ .*

- (b) Montrer que  $\widehat{H}(x_1) = \widehat{H}'(x_1) = 0$ .

*$x_1$  étant racine de  $P$ , on a  $\widehat{H}(x_1) = P^2(x_1)(x_1 - x_0) = 0$ . D'autre part,  $\widehat{H}'(x) = 2P(x)P'(x)(x - x_0) + P^2(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , et on conclut en utilisant  $P(x_1) = 0$ .*

- (c) Montrer que  $\widehat{H}(x_0) = 0$  et que  $\widehat{H}'(x_0) = 1$ .

*On a  $\widehat{H}(x_0) = P^2(x_0)(x_0 - x_0) = 0$ . D'autre part, en utilisant la question précédente et le fait que  $P(x_0) = 1$ , on a  $\widehat{H}'(x_0) = 2P(x_0)P'(x_0)(x_0 - x_0) + P^2(x_0) = 1$ .*

2. On considère à présent le polynôme suivant:

$$H(x) = P^2(x)(1 - 2P'(x_0)(x - x_0)) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) Quel est le degré de  $H$  ?

*Notons  $Q(x) = 1 - 2P'(x_0)(x - x_0)$ . On a  $Q \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ . D'autre part,  $P$  étant de degré au plus  $n$ , on a  $P^2 \in \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $H = P^2Q \in \mathcal{P}_{2n+1}(\mathbb{R})$ .*

(b) Montrer que  $H(x_1) = H'(x_1) = 0$ .

*$x_1$  étant racine de  $P$ , on a immédiatement  $H(x_1) = P^2(x_1)Q(x_1) = 0$ . D'autre part,  $H'(x) = 2P(x)P'(x) \times Q(x) + P^2(x) \times Q'(x)$ , de sorte que  $H'(x_1) = 2P(x_1)P'(x_1) \times Q(x_1) + P^2(x_1) \times Q'(x_1) = 0$ . Il n'est pas nécessaire de calculer  $Q'$ .*

(c) Montrer que  $H(x_0) = 1$  et que  $H'(x_0) = 0$ .

*$H(x_0) = P^2(x_0)(1 - 2P'(x_0)(x_0 - x_0)) = (P(x_0))^2 = 1$ . D'autre part, on a déjà vu que  $H'(x) = 2P(x)P'(x) \times Q(x) + P^2(x) \times Q'(x)$ . On a  $Q(x_0) = 1$  et  $Q'(x) = -2P'(x_0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi:*

$$\begin{aligned} H'(x_0) &= 2P(x_0)P'(x_0) \times Q(x_0) + P^2(x_0) \times Q'(x_0) \\ &= 2P(x_0)P'(x_0) - 2P^2(x_0)P'(x_0) \\ &= 2P'(x_0) - 2P'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

## 2 Interpolation de Lagrange

### 2.1 Généralités

On considère une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, et on se donne  $n + 1$  points distincts de l'intervalle  $[a, b]$ :

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

L'**interpolation** polynomiale consiste à déterminer un polynôme  $P$  qui coïncide avec  $f$  aux points  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ . Les points  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  sont communément appelés **noeuds d'interpolation**, et on dit qu'un tel polynôme  $P$  **interpôle**  $f$  aux noeuds  $x_0, \dots, x_n$ . On peut alors s'interroger sur certains points:

- Quelles sont les conditions d'existence et d'unicité d'un tel polynôme ?
- Quelles sont les différentes méthodes permettant de le(s) construire ?
- Dans quelle mesure un polynôme d'interpolation fournit une bonne approximation de  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$  ?

Avant de traiter les deux derniers points à travers des exemples concrets de méthodes d'interpolation, on peut d'ores et déjà apporter quelques éléments de réponse concernant le premier point. Commençons par traiter un exemple simple.

**Exemple 2.1.** Considérons la fonction

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right),$$

à interpoler aux noeuds  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ . On cherche donc un polynôme  $P$  tel que:

$$P(0) = \sin(0) = 0 \text{ et } P(1) = \sin(\pi/2) = 1.$$

La solution la plus évidente consiste à prendre le polynôme de degré 1 défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $P_1(x) = x$ .

Par ailleurs, on peut vérifier que le polynôme  $P_2(x) = x + x(x - 1) = x^2$  convient aussi, et plus généralement tout polynôme s'écrivant sous la forme  $P(x) = x + x(x - 1)Q(x)$  avec  $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Il n'y a donc pas unicité du polynôme d'interpolation dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

En revanche, si l'on restreint la recherche d'un tel polynôme à l'ensemble des polynômes de degré 1, on vérifie aisément que  $P_1(x) = x$  est la seule possibilité (on laisse cette vérification à titre d'exercice).

**Exemple 2.2.** Le résultat précédent se généralise sans difficulté à une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  et des noeuds d'interpolation  $x_0, x_1$  quelconques. En posant  $P(x) = ax + b$  avec  $a$  et  $b$  réels, les conditions  $P(x_0) = f(x_0)$  et  $P(x_1) = f(x_1)$  donnent lieu au système suivant (d'inconnues  $a$  et  $b$ ):

$$\begin{cases} ax_0 + b = f(x_0), \\ ax_1 + b = f(x_1), \end{cases}$$

et imposent

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{et} \quad b = f(x_0) - x_0 \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

de sorte que

$$P(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0). \quad (1)$$

Il s'agit de l'unique polynôme de degré 1 interpolant  $f$  à ces noeuds. Notons par ailleurs qu'en posant  $L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$  et  $L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$  on obtient l'écriture équivalente:

$$P(x) = f(x_0) \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) + f(x_1) \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right). \quad (2)$$

Remarquons que  $L_0(x_0) = 1$ ,  $L_0(x_1) = 0$  et que  $L_1(x_0) = 0$ ,  $L_1(x_1) = 1$ . La forme (1) est appelée forme de **Newton** et la forme (2) est appelée forme de **Lagrange**. Nous verrons plus tard une généralisation de ces écritures aux polynômes de degré quelconque.

**Exemple 2.3.** Considérons à présent la fonction

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right),$$

et les points d'interpolation  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 1$ . Notons que  $f(-1) = f(1) = 0$  et  $f(0) = 1$ . On cherche un polynôme  $P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tel que  $P(-1) = P(1) = 0$  et  $P(0) = 1$ . Ainsi,  $-1$  et  $1$  sont nécessairement racines de  $P$ , et  $P$  s'écrit sous la forme  $P(x) = \alpha(x-1)(x+1)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La condition  $P(0) = 1$  donne alors  $\alpha = -1$  et donc  $P(x) = (1+x)(1-x)$ .

Un autre moyen de d'établir l'unicité d'un tel polynôme dans  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ : considérons un polynôme  $Q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tel que  $Q(x_i) = f(x_i)$  pour  $i = 0, 1, 2$ . On peut alors construire le polynôme  $R = Q - P$ , qui vérifie, par construction,  $R(x_0) = 0$ ,  $R(x_1) = 0$  et  $R(x_2) = 0$ . Ainsi  $R$  admet trois racines distinctes. Etant de degré 2, c'est donc le polynôme nul, en vertu de la Proposition 1.2. Ceci garantit l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation dans  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ .

Ce résultat se généralise comme suit:

**Théorème 2.1 (Théorème fondamental)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Pour tout choix de noeuds  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une unique fonction polynomiale  $P_n$  de degré inférieur ou égal à  $n$ , qui coïncide avec  $f$  aux  $n + 1$  noeuds: pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on a  $P_n(x_i) = f(x_i)$ .

$P_n$  est appelé le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de  $f$  associé aux noeuds  $x_0, \dots, x_n$ .

**Proof:** La démonstration repose sur le résultat suivant:

**Lemme 2.1**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier naturel, et  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$  des réels deux à deux distincts. L'application linéaire définie ci-dessous est un isomorphisme:

$$\Phi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n)).$$

Commençons par établir le lemme, qui n'est autre qu'une généralisation de l'Exercice 1.1 au cas de  $n + 1$  points.

Nous laissons la linéarité de  $\Phi$  à titre exercice.

L'application  $\Phi$  est une application linéaire entre deux espaces vectoriels ayant même dimension (c'est à dire  $n + 1$ ). Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit donc de montrer qu'elle est injective.

Soit  $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\Phi(P) = 0$ . On a donc  $P(x_0) = 0, \dots, P(x_n) = 0$ . Ainsi,  $P$  est un polynôme de degré  $n$  admettant  $n + 1$  racines: c'est donc le polynôme nul. On en déduit

que  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ , et donc l'injectivité de  $\Phi$ .

La preuve du théorème est une conséquence immédiate du lemme. En effet, considérons  $(f(x_0), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Le caractère bijectif de  $\Phi$  établi précédemment garantit qu'il existe un unique élément  $P_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  tel que  $\Phi(P_n) = (f(x_0), \dots, f(x_n))$ , c'est à dire tel que  $P_n(x_i) = f(x_i)$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ . ■

## 2.2 Polynômes de Lagrange et forme de Newton

L'existence et l'unicité étant établies, il reste à étudier comment construire le polynôme d'interpolation en pratique. L'un des résultats les plus connus repose sur les *Polynômes de Lagrange*.

### Théorème 2.2 (Polynômes de Lagrange)

Avec les notations du théorème fondamental, on a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x), \quad (3)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , où les polynômes de Lagrange sont définis par:

$$L_i(x) = \frac{\prod_{0 \leq k \leq n, k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{0 \leq k \leq n, k \neq i} (x_i - x_k)},$$

pour tout  $i = 0, \dots, n$ .

**Proof:** Remarquons d'abord que  $L_i \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  pour tout  $i = 0, \dots, n$  (produit de  $n$  polynômes de degré 1), de sorte que  $P_n$  est aussi un polynôme de degré au plus  $n$ . La démonstration du théorème repose sur le fait que:

$$L_i(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $i = 0, \dots, n$ . Le symbole  $\delta_{ik}$  est appelé symbole de **Kronecker**. Une fois ceci établi, on a:

$$P_n(x_k) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x_k) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\delta_{ik} = f(x_k)$$

pour tout  $k = 0, \dots, n$ , de sorte que  $P_n$  est bien le polynôme interpolateur de Lagrange de  $f$  aux noeuds  $x_0, \dots, x_n$ . ■

Notons que nous avons déjà vu un premier exemple dans le cas  $n = 1$ , avec la forme générale des deux polynômes de Lagrange associés aux noeuds  $x_0$  et  $x_1$  (voir l'Exemple 2.2):

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{et} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

**Exemple 2.4.** On considère la fonction

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (4)$$
$$x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$$

Donner les polynômes de Lagrange ainsi que polynôme d'interpolation associés aux noeuds suivants:

- $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$ . On a:  
$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}(x - 1),$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(x + 1).$$

On obtient:

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = -\frac{1}{4}(x - 1) + \frac{1}{4}(x + 1) = \frac{1}{2}.$$

- $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$ . On a:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1/2}{-1/2} = -2(x - 1/2),$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x}{1/2} = 2x.$$

On obtient:

$$P(x) = f(0)L_0(x) + f(1/2)L_1(x) = -2(x - 1/2) + \frac{1}{1 + 1/4} \times 2x = -\frac{2}{5}x + 1.$$

- $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . On a:

$$L_0(x) = \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left( \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) = \left( \frac{x}{-1} \right) \left( \frac{x - 1}{-1 - 1} \right) = \frac{1}{2}x(x - 1),$$

On vérifie que l'on a bien  $L_0(x_0) = 1$  et que  $L_0(x_1) = L_0(x_2) = 0$ .

$$L_1(x) = \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left( \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) = \left( \frac{x - (-1)}{-(-1)} \right) \left( \frac{x - 1}{-1} \right) = -(x + 1)(x - 1),$$

$$L_2(x) = \left( \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) = \left( \frac{x - (-1)}{1 - (-1)} \right) \left( \frac{x}{1} \right) = \frac{1}{2}x(x + 1).$$

On obtient:

$$\begin{aligned} P(x) &= f(-1)L_0(x) + f(0)L_1(x) + f(1)L_2(x) \\ &= \frac{1}{4}x(x - 1) - (x + 1)(x - 1) + \frac{1}{4}x(x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 1. \end{aligned}$$

On vérifie que l'on a en effet  $P(-1) = f(-1) = 1/2$ ,  $P(0) = f(0) = 1$  et  $P(1) = f(1) = 1/2$ .

La forme de Lagrange (3) n'est pas souvent utilisée en pratique. En effet, chacun des polynômes de Lagrange dépend de l'ensemble des points d'interpolation  $x_0, \dots, x_n$ , ce qui proscrit une construction de type "*proche en proche*" du polynôme interpolateur, c'est à dire que l'on ne peut construire le polynôme interpolateur aux points  $x_0, \dots, x_n$  en fonction du polynôme interpolateur aux points  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . La forme de Newton que nous allons étudier à présent permet de rajouter des points d'interpolation sans avoir à recalculer tous les polynômes d'interpolation.

**Exemple 2.5.****Cas d'un seul point  $x_0$** 

Commençons par étudier le cas le plus simple, celui d'un seul point d'interpolation  $x_0$ . Le polynôme d'interpolation  $P_0$  est donc de degré 0, autrement dit une constante, égale à  $f(x_0)$ . En d'autres termes:

$$P_0(x) = f(x_0),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Cas de deux points  $x_0, x_1$** 

Rajoutons à présent un noeud  $x_1$ . En se basant sur (1), nous avons vu que le polynôme d'interpolation  $P_1$  peut s'écrire:

$$P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0),$$

En notant  $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ , et en remarquant que  $f(x_0)$  n'est autre que  $P_0(x)$ , on a :

$$P_1(x) = P_0(x) + f[x_0, x_1] (x - x_0).$$

On a donc rajouté un point d'interpolation  $x_1$  sans modifier le polynôme d'interpolation de rang inférieur (c'est à dire  $P_0$ , associé à  $x_0$  seulement). L'idée est de généraliser ce procédé à des degrés arbitraires.

**Cas de trois points  $x_0, x_1, x_2$** 

Considérons donc un troisième noeud  $x_2$ , et cherchons un polynôme  $P_2$  de degré inférieur ou égal à 2 qui interpole  $f$  aux noeuds  $x_0, x_1, x_2$  sous la forme  $P_2 = P_1 + Q$  avec  $\deg(Q) \leq 2$ . On a:

$$P_2(x_0) = P_1(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad P_2(x_1) = P_1(x_1) = f(x_1),$$

donc  $Q(x_0) = 0$  et  $Q(x_1) = 0$ . Le polynôme  $Q$  étant de degré 2, il s'écrit donc sous la forme  $Q(x) = a(x - x_0)(x - x_1)$ , où  $a$  est une constante réelle. D'autre part, en utilisant  $P_2(x_2) = f(x_2) = P_1(x_2) + Q(x_2)$ , et  $P_2(x_1) = f(x_1) = P_1(x_1)$ :

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x_2 - x_0) + a(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ f(x_1) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x_1 - x_0) \end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième égalité à la première, on obtient

$$f(x_2) - f(x_1) = f[x_0, x_1](x_2 - x_1) + a(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

En posant  $f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ , le calcul donne:

$$a = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}.$$

Ceci nous pousse à définir  $f[x_0, x_1, x_2] := \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ , de sorte que:

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0) (x - x_1) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1] (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0) (x - x_1). \end{aligned}$$

On remarque donc que l'on peut encore rajouter un noeud d'interpolation sans modifier les polynômes interpolateurs  $P_0$  (qui dépend uniquement de  $x_0$ ) et  $P_1$  (qui ne dépend que de  $x_0$  et  $x_1$ ) calculés précédemment. Cette construction itérative se généralise sous la forme du théorème suivant:

**Théorème 2.3 (Polynômes de Newton)**

Avec les notations du théorème fondamental, on a

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

où les coefficients sont calculés en utilisant l'algorithme des *différences divisées*:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= f(x_0) \\ f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &\vdots \\ f[x_0, \dots, x_n] &= \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.6.** On considère à nouveau la fonction (4):

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned} \tag{5}$$

et les noeuds de l'Exemple 2.4:

- $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 1$ . On a:  
 $f[x_0] = f(x_0) = 1/2$ , et  
 $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1/2 - 1/2}{2} = 0$ .

Il vient:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = 1/2.$$

- $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$ . On a:  
 $f[x_0] = f(x_0) = 1$ , et  
 $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{4/5 - 1}{1/2} = 2/5$ .

Il vient:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) = 1 - \frac{2}{5}x.$$

On retrouve bien le polynôme obtenu avec les polynômes de Lagrange.

- $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . On a:

$$f[x_0] = f(x_0) = 1/2, \text{ et}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1/2}{0 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1/2 - 1}{1 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1/2 - 1/2}{2} = -1/2. \text{ Il vient:}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1/2 + \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}x(x + 1) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 1. \end{aligned}$$

Encore une fois il s'agit bien du polynôme obtenu avec les polynômes de Lagrange.

## 2.3 Estimation de l'erreur

On cherche ici à avoir une idée de l'erreur commise lorsqu'on interpole une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  avec son polynôme de Lagrange associé.

**Exemple 2.7.** Commençons par traiter un premier exemple. Considérons une fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , que l'on interpole aux noeuds  $-1$  et  $1$ . Notons  $P$  le polynôme interpolateur de Lagrange associé. Rappelons qu'il s'agit de l'unique polynôme de degré 1 tel que

$$P(-1) = f(-1) \quad , \quad P(1) = f(1).$$

Fixons à présent  $t \in ]-1, 1[$ , et considérons le polynôme  $Q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  qui interpole  $f$  aux noeuds  $-1, t, 1$ :

$$Q(-1) = f(-1) \quad , \quad Q(t) = f(t) \quad , \quad Q(1) = f(1).$$

On introduit alors le polynôme  $R = Q - P$ .  $Q$  étant de degré au plus 2 et  $P$  de degré au plus 1,  $R$  est de degré au plus 2, et de plus,  $R$  et  $Q$  admettent la même dérivée seconde, qui est une constante. Par ailleurs,  $R(-1) = R(1) = 0$  car  $P$  et  $Q$  coïncident en ces points. Le polynôme  $R$  s'écrit nécessairement sous la forme:

$$R(x) = c(x - 1)(x + 1) \quad , \quad \forall x \in [-1, 1],$$

où  $c$  est une constante réelle. Notons que, en dérivant deux fois, on obtient  $R'' = 2c$ , et donc on a aussi  $Q'' = 2c$ .

On considère maintenant la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x) - Q(x)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ . Comme  $f$  et  $Q$  coïncident en  $-1, t$  et  $1$ , on a  $g(-1) = g(t) = g(1) = 0$ . Ainsi,  $g$  s'annule trois

fois sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . La fonction  $g$  étant continue et dérivable sur  $[-1, 1]$  (car somme d'un polynôme et d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ), le théorème de Rolle, appliqué successivement aux intervalles  $[-1, t]$  et  $[t, 1]$  assure l'existence de  $\xi_1 \in ]-1, t[$  et  $\xi_2 \in ]t, 1[$  tels que  $g'(\xi_1) = 0$  et  $g'(\xi_2) = 0$ . En appliquant le même raisonnement à  $g'$ , on obtient l'existence d'un réel  $\xi \in ]\xi_1, \xi_2[$  tel que  $g''(\xi) = 0$ . Ainsi, en rappelant que  $Q''$  est constant, égal à  $2c$ :

$$g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = Q''(\xi) \Leftrightarrow f''(\xi) = 2c.$$

Au final:

$$|f(t) - P(t)| = \underbrace{|Q(t) - P(t)|}_{R(t)} = |c|(t-1)(t+1) = \frac{1}{2}|f''(\xi)|(t-1)(t+1).$$

On aboutit ainsi à l'estimation suivante:

$$\sup_{t \in [-1, 1]} |f(t) - P(t)| \leq \frac{1}{2} M_2(f) \sup_{x \in [-1, 1]} |\pi_1(x)|,$$

où  $M_2(f) = \sup_{\xi \in [-1, 1]} |f^{(2)}(\xi)|$ , et le polynôme  $\pi_1$  est défini par  $\pi_1(x) = (x-1)(x+1)$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ .

Ce résultat se généralise pour une interpolation dans  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  comme suit (ce résultat sera démontré en TD).

### **Théorème 2.4 (Erreur d'interpolation)**

Supposons la fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , et que  $P_n$  est le polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction  $f$ , associé aux noeuds  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ . Alors on a

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(f) \sup_{x \in [a, b]} |\pi_n(x)|,$$

avec  $\pi_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$  et  $M_{n+1}(f) = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$ .

Deux éléments sont essentiels dans cette estimation:

D'une part la régularité de la fonction  $f$  (et en particulier les bornes sur ses dérivées  $M_{n+1}$ ), et d'autre part la quantité  $\sup_{x \in [a, b]} |\pi_n(x)|$  (que l'on note aussi  $\|\pi_n\|_\infty$ ), qui dépend du choix des noeuds.

Dans certains cas, les estimations sur ces deux quantités ne sont pas suffisantes pour gagner la compétition avec le terme  $(n+1)!$  présent au dénominateur. En d'autres termes, ce résultat ne garantit pas la convergence uniforme de  $P_n$  vers  $f$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ : augmenter le nombre de points ne suffira pas à obtenir de bonnes estimations. Dans le cas de points équidistants, ce phénomène, communément appelé *phénomène de Runge*, peut être mis en évidence à travers un exemple classique, basé sur la fonction définie par  $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$  pour  $x \in [-1, 1]$ . Avec des points équidistants, lorsque  $\alpha$  est assez petit,  $P_n$  ne converge pas

uniformément vers  $f_\alpha$ . En particulier, pour  $n$  grand, on observe de fortes oscillations aux bords de l'intervalle, et l'amplitude de ces oscillations va augmenter si on augmente  $n$ .

Concernant le terme  $\pi_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$ , ce polynôme peut lui aussi être sujet à de nombreuses oscillations et donc aussi difficile à borner. L'erreur commise va dépendre de la longueur de l'intervalle considéré  $[a, b]$  et de la répartition des noeuds sur cet intervalle. Une stratégie pour affiner l'estimation consiste donc à choisir des noeuds d'interpolation de manière à minimiser la quantité  $\|\pi_n\|_\infty$ . A cet effet, on introduit les *points de Tchebychev*, que nous verrons en TD.

**Exercice 2.1.** Il s'agit d'adapter l'analyse effectuée dans le préambule (Exemple 2.7) dans le cas de trois points d'interpolation. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . On considère son polynôme d'interpolation de Lagrange  $P$  aux noeuds  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$  et  $x_2 = 1$ .

1. Soit  $t \in [0, 1]$ , distincts des noeuds  $x_0, x_1, x_2$ . Pour fixer les idées, on supposera  $t \in ]0, 1/2[$ . On note  $Q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  le polynôme interpolateur de Lagrange de  $f$  aux noeuds  $0, t, 1/2$  et  $1$ . On définit la fonction  $g$  par  $g(x) = f(x) - Q(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

(a) Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  et que  $g'$  s'annule trois fois sur  $[0, 1]$ .

(b) Montrer qu'il existe  $\xi \in [0, 1]$  tel que  $g^{(3)}(\xi) = 0$ .

(c) Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $Q(x) - P(x) = c\pi(x)$ , où  $\pi(x) = x(x-1/2)(x-1)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

(d) Montrer que  $c = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}$ .

2. En déduire l'estimation d'erreur suivante:

$$\sup_{t \in [-1, 1]} |f(t) - P(t)| \leq \frac{1}{12} M_3(f),$$

où  $M_3(f) = \sup_{\xi \in [-1, 1]} |f^{(3)}(\xi)|$ .

## 2.4 Interpolation par intervalles

Au lieu d'une interpolation globale sur l'intervalle  $[a, b]$ , une stratégie consiste d'abord à subdiviser l'intervalle puis utiliser une méthode d'interpolation de bas degré sur chaque sous-intervalle. Cette méthode fournit généralement de meilleurs résultats en pratique et peut être un palliatif au phénomène de Runge. La convergence est obtenue en diminuant le pas de la subdivision. La fonction interpolante est alors polynomiale par morceaux (polynomiale sur chaque sous-intervalle).

**Exemple 2.8. Interpolation affine par morceaux.** Illustrons la procédure à travers un exemple simple : l'interpolation affine par morceaux. On se donne une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et une subdivision  $a = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$  de l'intervalle  $[a, b]$ . Plutôt que d'interpoler globalement  $f$  en ces noeuds, on va considérer chaque sous intervalle  $[y_j, y_{j+1}]$ ,  $j = 0, \dots, N-1$  séparément et construire les polynômes interpolateurs  $P_{j,1}$  de  $f$  aux noeuds  $y_j$  et  $y_{j+1}$ . On a donc, pour tout  $j = 0, \dots, N-1$ ,

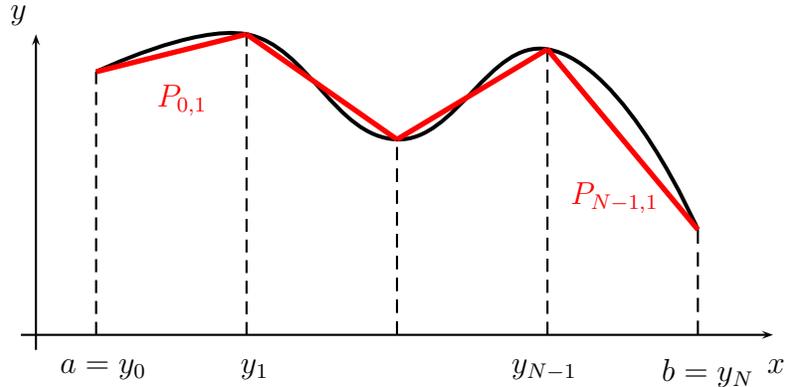


Figure 1: *Interpolation affine par morceaux.*

$$P_{j,1}(x) = f(y_j) + \frac{(x - y_j)}{(y_{j+1} - y_j)} f(y_{j+1}),$$

et on peut donc interpoler  $f$  par une fonction affine par morceaux définie pour tout  $x \in [a, b]$  par (voir Figure 1):

$$\hat{P}_{N,1}(x) = P_{j,1}(x) \quad \text{si } x \in [y_j, y_{j+1}].$$

Dans l'écriture  $\hat{P}_{N,1}$ , l'indice "N" fait référence au nombre de noeuds d'interpolation initiaux et l'indice "1" au degré d'approximation choisi dans chaque sous-intervalle. Dans ce contexte, rien n'empêche de considérer des approximations d'ordre plus élevé sur chacun des sous-intervalles  $[y_j, y_{j+1}]$ .

Le cadre général est donné par définition suivante:

### Définition 2.1

Considérons une subdivision  $a = y_0 < y_1 < \dots < y_N = b$  de l'intervalle  $[a, b]$ .

Sur chaque sous-intervalle  $[y_j, y_{j+1}]$ , on se donne les  $n+1$  noeuds  $x_{j,0}, x_{j,1}, \dots, x_{j,n-1}, x_{j,n}$ . Soit  $P_{j,n}$  le polynôme interpolateur de Lagrange de  $f$  aux noeuds  $x_{j,0}, \dots, x_{j,n}$ . On pose alors  $\hat{P}_{N,n}(x) = P_{j,n}(x)$  pour tout  $x \in [y_j, y_{j+1}]$ , et  $j \in \{0, \dots, N-1\}$ . La fonction  $\hat{P}_{N,n}$  est **l'interpolant de degré  $n$  par intervalles** de  $f$ .

Nous admettrons le théorème suivant, qui repose essentiellement sur le Théorème 2.4.

### **Théorème 2.5**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et supposons  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$ . Il existe  $C_n \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \hat{P}_{N, n}(x)| \leq C_n \sup_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)| h^{n+1},$$

où  $h = \max_{0 \leq j \leq N-1} (y_{j+1} - y_j)$  est le pas de la subdivision.

## **3 Autres types d'interpolation**

Nous avons précédemment vu des méthodes d'interpolation basées sur les valeurs de  $f$  aux noeuds d'interpolation. Il est toutefois possible de construire des méthodes d'interpolation faisant intervenir les valeurs de  $f$  et/ou de ses dérivées en ces noeuds.

**Exemple 3.1. Interpolation de Hermite : cas de deux points.** Considérons par exemple une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et dérivable sur  $[a, b]$ , et deux noeuds  $x_0, x_1 \in [a, b]$ . On cherche un polynôme  $P$  tel que:

$$Q(x_0) = f(x_0) \quad , \quad Q'(x_0) = f'(x_0) \quad , \quad Q(x_1) = f(x_1) \quad , \quad Q'(x_1) = f'(x_1). \quad (6)$$

### **Existence et unicité**

En se basant sur la preuve du Théorème 2.1, on introduit l'application:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (P(x_0), P'(x_0), P(x_1), P'(x_1)). \end{aligned}$$

Cette application est linéaire (la démonstration est similaire à celle du Lemme 2.1, voir aussi l'Exercice 1.1). Montrons à présent que son noyau ne contient que le polynôme nul. Soit  $R \in \text{Ker}(\Psi)$ . On a:

$$R(x_0) = R'(x_0) = R(x_1) = R'(x_1) = 0,$$

ce qui signifie que  $x_0$  et  $x_1$  sont toutes deux racines double de  $R$ . Ainsi,  $R$  est divisible par  $(x - x_0)^2$  et par  $(x - x_1)^2$  (voir l'Exercice 1.3). Étant de degré au plus 3, c'est donc le polynôme nul. On en déduit que  $\Psi$  est injective, et par suite, étant donné l'égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée, bijective.

L'application  $\Psi$  est donc un isomorphisme. Ceci garantit l'existence et l'unicité d'un polynôme  $Q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  satisfaisant les conditions (6) (l'élément de  $(f(x_0), f'(x_0), f(x_1), f'(x_1))$  de  $\mathbb{R}^4$  admet un seul et unique antécédent par  $\Psi$ ).

### **Construction du polynôme d'interpolation**

Pour construire le polynôme  $Q$ , on applique le résultat de l'Exercice 3.1 aux polynômes de Lagrange associé aux noeuds  $x_0$  et  $x_1$ :

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} .$$

Plus précisément, on considère les polynômes suivants:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= L_0(x)^2(1 - 2L'_0(x_0)(x - x_0)) \quad , & H_1(x) &= L_1(x)^2(1 - 2L'_1(x_1)(x - x_1)) \quad , \\ \widehat{H}_0(x) &= L_0(x)^2(x - x_1) \quad , & \widehat{H}_1(x) &= L_1(x)^2(x - x_0) . \end{aligned}$$

Notons d'abord que d'après l'Exercice 3.1, chacun de ces polynômes est d'ordre 3. On définit alors:

$$Q(x) = f(x_0)H_0(x) + f'(x_0)\widehat{H}_0(x) + f(x_1)H_1(x) + f'(x_1)\widehat{H}_1(x) . \quad (7)$$

Vérifions que  $Q$  vérifie les conditions (6). Rappelons que d'après l'Exercice 3.1, on a (on peut le vérifier directement avec les expressions analytiques):

$$H_0(x_0) = 1 \quad , \quad \widehat{H}_0(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad H_1(x_0) = \widehat{H}_1(x_0) = 0 \quad ,$$

ce qui donne immédiatement

$$Q(x_0) = f(x_0) .$$

Un raisonnement analogue donne de même  $Q(x_1) = f(x_1)$ . Par ailleurs, on a:

$$Q'(x) = f(x_0)H'_0(x) + f'(x_0)\widehat{H}'_0(x) + f(x_1)H'_1(x) + f'(x_1)\widehat{H}'_1(x) \quad ,$$

ainsi que les relations suivantes, issues elles aussi de l'Exercice 3.1:

$$H'_0(x_0) = 0 \quad , \quad \widehat{H}'_0(x_0) = 1 \quad \text{et} \quad H'_1(x_0) = \widehat{H}'_1(x_0) = 0 \quad ,$$

qui donnent

$$Q'(x_0) = f'(x_0) \quad ,$$

et on vérifie que  $Q'(x_1) = f'(x_1)$  par un raisonnement analogue.

Ce résultat se généralise de la façon suivante, et sera étudié plus en détails en TD :

### **Théorème 3.1 (Interpolation de Hermite)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour tout choix de noeuds  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une unique fonction polynomiale  $Q_n$  de degré inférieur ou égal à  $2n+1$ , telle que  $Q_n$  et  $Q'_n$  coïncident avec  $f$  et  $f'$  respectivement, aux noeuds  $x_0, \dots, x_n$ : pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on a  $Q_n(x_i) = f(x_i)$  et  $Q'_n(x_i) = f'(x_i)$ .

$Q_n$  est appelé le polynôme d'interpolation de Hermite de  $f$  associé aux noeuds  $x_0, \dots, x_n$ .

### **Proposition 3.1**

On peut écrire  $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)H_i(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i)\widehat{H}_i(x)$ , où les polynômes  $H_i$  et  $\widehat{H}_i$

vérifient: pour tous  $i, \ell \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$\begin{cases} H_i(x_\ell) = \delta_{i\ell}, \\ H'_i(x_\ell) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{H}_i(x_\ell) = 0, \\ \hat{H}'_i(x_\ell) = \delta_{i\ell}. \end{cases}$$

Ils sont donnés par

$$\begin{aligned} H_i(x) &= L_i(x)^2 (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)), \\ \hat{H}_i(x) &= L_i(x)^2 (x - x_i). \end{aligned}$$

Nous verrons en TD que si  $f$  est une fonction réelle définie sur intervalle  $[a, b]$  de classe  $\mathcal{C}^{2n+2}$ , alors pour tout  $x \in [a, b]$ , il existe un réel  $\xi \in [a, b]$  tel que:

$$|f(x) - Q_n(x)| = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k)^2.$$

On en déduit le résultat suivant:

### **Théorème 3.2**

Dans les conditions du Théorème (3.1), si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{2n+2}$ , alors on a l'estimation d'erreur suivante:

$$|f(x) - Q_n(x)| = \frac{M_{2n+2}(f)}{(2n+2)!} |\pi_n(x)|^2,$$

avec  $\pi_n(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$  pour tout  $x \in [a, b]$  et  $M_{2n+2}(f) = \sup_{\xi \in [a, b]} |f^{(2n+2)}(\xi)|$ .

**Exercice 3.1. Interpolation de Hermite.** Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite de la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin(\pi x/2). \end{aligned}$$

associé aux noeuds  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 1$ .

*Il s'agit de déterminer les polynômes  $H_0, H_1, \hat{H}_0$  et  $\hat{H}_1$ . Pour ce faire, nous aurons besoin des polynômes de Lagrange  $L_0$  et  $L_1$ :*

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 1}{0 - 1} = 1 - x \\ L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 0}{1 - 0} = x. \end{aligned}$$

Par suite, avec  $L'_0 = -1$  et  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= L_0^2(x) (1 - 2L'_0(x_0)(x - x_0)) \\ &= (1 - x)^2 (1 + 2x), \\ \hat{H}_0(x) &= L_0^2(x) (x - x_0) = x(1 - x)^2. \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= L_1^2(x) (1 - 2L_1'(x_1)(x - x_1)) \\ &= x^2 (1 - 2(x - 1)) = x^2 (-2x + 3) , \\ \widehat{H}_1(x) &= L_1^2(x)(x - x_1) = x^2(x - 1) . \end{aligned}$$

On a  $f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos(\pi x/2)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Ainsi:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1 \quad , \quad f'(0) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad f'(1) = 0 .$$

Au final:

$$\begin{aligned} Q(x) &= f(x_0)H_0(x) + f'(x_0)\widehat{H}_0(x) + f(x_1)H_1(x) + f'(x_1)\widehat{H}_1(x) \\ &= \frac{\pi}{2}\widehat{H}_0(x) + H_1(x) \\ &= \frac{\pi}{2}x(1-x)^2 + x^2(-2x+3) \end{aligned}$$

En mettant  $Q$  sous forme canonique :  $Q(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)x^3 + (3 - \pi)x^2 + \frac{\pi}{2}x$ . On vérifie alors que:  $Q(0) = 0$ ,  $Q(1) = 1$ ,  $Q'(0) = \frac{\pi}{2}$  et  $Q'(1) = 0$ .

**Exercice 3.2. Un autre type d'interpolation** Soit  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. (a) Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tel que

$$P(0) = f(0), \quad P'(1) = f'(1), \quad P'(-1) = f'(-1).$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto (P(0), P'(1), P'(-1)). \end{aligned}$$

On vérifie que cette application est linéaire. Par ailleurs, soit  $P \in \text{Ker}(\Psi)$ . On a donc:

$$P(0) = 0 \quad , \quad P'(1) = 0 \quad , \quad P'(-1) = 0, \quad (8)$$

avec  $P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Ainsi,  $-1$  et  $1$  sont des racines de  $P'$ , et  $P'$  est divisible par  $(x - 1)(x + 1)$ . Si  $P'$  n'est pas nul, il est donc de degré 2, ce qui implique que  $P$  est de degré 3 et contredit  $P \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Donc  $P'$  est nécessairement le polynôme nul, et par suite  $P$  est constant. La condition  $P(0) = 0$  implique alors que  $P$  est lui aussi nul. Au final,  $\text{Ker}(\Psi) = 0$ , et  $\Psi$  est injective. Compte tenu de l'égalité des dimensions des espaces de départ et d'arrivée,  $\Psi$  est un isomorphisme, ce qui garantit l'existence et l'unicité d'un tel polynôme.

- (b) Ecrire ce polynôme sous la forme  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , en exprimant  $a$ ,  $b$  et  $c$  en fonction de  $f'(-1)$ ,  $f(0)$  et  $f'(1)$ .

*Remarquons d'abord que  $P(0) = f(0) \Rightarrow c = f(0)$ . Par suite, on a  $P'(x) = 2ax + b$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , ce qui mène au système:*

$$\begin{cases} -2a + b &= f'(-1) \\ 2a + b &= f'(1) \end{cases}$$

*On aboutit à  $b = \frac{1}{2}(f'(-1) + f'(1))$  et  $c = \frac{1}{4}(f'(1) - f'(-1))$ .*

2. Soit  $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ . Montrer que  $p(0) = p'(1) = p'(-1) = 0$  si et seulement si  $p(t) = \lambda\pi(t)$ , où  $\lambda$  est un nombre réel arbitraire et  $\pi(t) = t^3 - 3t$ .

*Si  $p(t) = \lambda(t^3 - 3t)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il est facile de vérifier que  $p(0) = p'(1) = p'(-1) = 0$ . Intéressons nous à la réciproque, et considérons  $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tel que  $p(0) = p'(1) = p'(-1) = 0$ . Comme nous l'avons vu dans la question précédente, si  $p'(1) = p'(-1) = 0$ , alors  $p'$  est divisible par  $(t-1)(t+1) = t^2 - 1$ . En d'autres termes  $p$  étant de degré au plus 2, on a  $p'(t) = \kappa(t^2 - 1)$  avec  $\kappa$  une constante réelle.*

*Par conséquent, après intégration,  $p(t) = \kappa\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + c$  avec  $c \in \mathbb{R}$ . La condition  $p(0) = 0$  impose alors  $c = 0$ , et par suite, en posant  $\lambda = \kappa/3$ , on a  $p(t) = \lambda(t^3 - 3t)$*

3. Soit  $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . On pose  $Q_x(t) = P(t) + \lambda_x\pi(t)$ , pour tout  $t \in [-1, 1]$  avec  $\lambda_x = \frac{f(x) - P(x)}{\pi(x)}$ .

- (a) Soit  $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tel que  $p(0) = p(x) = p'(1) = p'(-1) = 0$ . Montrer que  $p'$  s'annule en au moins trois points distincts de l'intervalle  $[-1, 1]$ . En déduire que  $p' = p = 0$ .

*On a  $p(0) = p(x) = 0$ .  $p$  étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le théorème de Rolle s'applique et fournit l'existence d'un réel  $\xi \in ]0, x[$  (ou  $]x, 0[$  si  $x < 0$ ) tel que  $p'(\xi) = 0$ . Donc  $p'$  s'annule en trois points distincts de l'intervalle  $[-1, 1]$ . Or,  $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ , et donc  $p' \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Ayant trois racines distinctes, c'est donc le polynôme nul. Par suite,  $p$  est constant, et on conclut en utilisant  $p(0) = 0$ .*

- (b) Montrer que  $Q_x$  est l'unique polynôme  $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  tel que  $q(0) = f(0)$ ,  $q(x) = f(x)$ ,  $q'(1) = f'(1)$ ,  $q'(-1) = f'(-1)$ .

*On commence par établir que  $Q_x$  satisfait bien les conditions demandées. Rappelons ici que  $x$  est un réel non nul fixé dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , que  $P$  satisfait les conditions (8), et que  $\pi(t) = t^3 - 3t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Remarquons aussi que  $\pi'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et donc  $\pi'(1) = \pi'(-1) = 0$ . On a*

donc:

$$\begin{aligned} Q_x(0) &= P(0) + \lambda_x \pi(0) = f(0), \\ Q_x(x) &= P(x) + \lambda_x \pi(x) = P(x) + \left( \frac{f(x) - P(x)}{\pi(x)} \right) \pi(x) = f(x), \\ Q'_x(1) &= P'(1) + \lambda_x \pi'(1) = P'(1), \\ Q'_x(-1) &= P'(-1) + \lambda_x \pi'(-1) = P'(-1). \end{aligned}$$

Concernant l'unicité, considérons un polynôme  $R \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$  satisfaisant les mêmes conditions. On définit alors  $p = Q_x - R$ , de sorte que  $p(0) = p(x) = p'(1) = p'(-1) = 0$ . La question précédente permet de conclure que  $p = 0$ , c'est à dire  $R = Q_x$ , ce qui garantit l'unicité.

- (c) On pose  $g_x(t) = f(t) - Q_x(t)$ . On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^3$ . Montrer qu'il existe  $\theta \in ]-1, 1[$  tel que  $g_x^{(3)}(\theta) = 0$ .

Par construction, on a  $g_x(x) = 0$  et  $g_x(0) = 0$ . La régularité de  $f$  permet d'appliquer le théorème de Rolle qui donne alors l'existence d'un réel  $\alpha \in ]-1, 1[$  tel que  $g'_x(\alpha) = 0$ . Ainsi,  $g'_x$  s'annule en trois points distincts de l'intervalle  $] - 1, 1[$ . On peut alors appliquer une nouvelle fois le théorème de Rolle pour montrer que  $g''_x$  s'annule en deux points distincts de l'intervalle  $] - 1, 1[$ , puis une dernière fois pour avoir l'annulation de  $g_x^{(3)}$  en un point  $\theta \in ] - 1, 1[$ .

- (d) En déduire que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{3} \sup_{t \in [-1, 1]} |f^{(3)}(t)|.$$

On commence par remarquer que  $f(x) = Q_x(x)$ , donc  $f(x) - P(x) = Q_x(x) - P(x) = \lambda_x \pi(x)$ . D'autre part,  $Q_x$  étant de degré au plus 3, sa dérivée troisième est constante, égale à  $6\lambda_x$ . Par conséquent:

$$g_x^{(3)}(\theta) = 0 \Leftrightarrow f_x^{(3)}(\theta) - Q_x^{(3)}(\theta) = 0 \Leftrightarrow f_x^{(3)}(\theta) = 6\lambda_x.$$

En second lieu, une étude de fonctions basique permet d'établir que  $-2 \leq \pi(t) \leq 2$  pour tout  $t \in [-1, 1]$ . Il vient:

$$|f(x) - P(x)| = |Q_x(x) - P(x)| = |\lambda_x| |\pi(x)| \leq 2 \times \frac{1}{6} |f_x^{(3)}(\theta)|.$$

En notant  $M_3(f) = \sup_{t \in [-1, 1]} |f^{(3)}(t)|$ , on a donc

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{M_3(f)}{3},$$

et le caractère arbitraire de  $x$  dans l'intervalle  $[-1, 1]$  permet de conclure (l'erreur est nulle pour  $x = 0$ ).