Equations différentielles

Notions abordées

- *Équations différentielles linéaires du premier ordre : équation homogène associée, structure de l'ensemble des solutions, théorème de Cauchy-Lipschitz.*
 - *Équations différentielles non linéaires du premier ordre: équations de Bernoulli et Riccati, équations à variables séparées.*
 - *Équations différentielles linéaires du second ordre : équation homogène, structure de l'ensemble des solutions, théorème de Cauchy-Lipschitz. Cas des coefficients constants.*
 - *Systèmes d'équations différentielles (ordre 1 et 2).*
 - *Principes de résolution : méthode de variation de la constante, principe de superposition, recherche de solutions particulières en fonction de l'expression du second membre.*
-
-

Dans toute la suite, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Equations différentielles du premier ordre

1.1 Résultats généraux

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre 1* une équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme:

$$y' + a(t)y = f(t), \quad (\text{E})$$

où $a, f : I \rightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. On note (H) l'équation homogène associée:

$$y' + a(t)y = 0. \quad (\text{H})$$

1 - Équation homogène.

- Justifier que a admet une primitive A sur I .
- Monter que:

$$y \text{ est solution de (H)} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, y(t) = \lambda \exp(-A(t)), \forall t \in I.$$

- (c) Montrer que les solutions de (H) forment un espace vectoriel de dimension 1, dont on donnera une base.

2 - Retour à l'équation (E).

- (a) Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E). Montrer que $y_1 - y_2$ est solution de (H).
(b) En déduire que les solutions de (E) sont de la forme:

$$y = y_p + \lambda \exp(-A(t)),$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$ et y_p est une solution particulière de (E).

3 - Existence et unicité des solutions.

On considère une solution exacte y_p de l'équation (E). Montrer que, pour tout $t_0 \in I$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe une et une seule solution y telle que $y(t_0) = \alpha$.

Remarque 1.1. Nous verrons que ce résultat est un corollaire direct du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles d'ordre 1 (partie II).

1.2 Exercices d'application

Exercice 1.1. *Résolution via la méthode de variation de la constante.* On cherche à résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle:

$$y' - \left(2t - \frac{1}{t}\right) y = 1. \quad (\text{E})$$

- 1 - Montrer que $h : t \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{t} \exp(t^2)$ est une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
2 - On cherche à présent une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)h(t)$, $t > 0$, avec $\lambda \in \mathcal{C}^1(I)$.

- (a) Montrer que y_p est solution de (E) si et seulement si $\lambda'(t) = t \exp(-t^2)$ pour tout $t > 0$.
(b) En déduire une solution particulière de (E).

3 - Donner la forme générale des solutions de (E).

Remarque 1.2. La méthode utilisée dans cet exercice est communément appelée méthode de *variation de la constante*. De manière plus générale, on recherche des solutions particulières sous la forme $y_p = \lambda h$, où h est une solution de l'équation homogène, et $\lambda \in \mathcal{C}^1(I)$.

Exercice 1.2. Recherche de solutions particulières dans le cas des coefficients constants. Dans cet exercice, on cherche à trouver des solutions particulières d'équations linéaires du premier ordre à coefficients constants, en fonction de l'expression du second membre.

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle:

$$y' + ay = f(t), \quad (\text{E})$$

où a est une constante non nulle et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

1 - On suppose que f est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire:

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{k=0}^n c_k t^k,$$

où les $(c_k)_{k=0, \dots, n}$ sont des réels.

(a) Pour tout réel t , on pose $y(t) = \sum_{k=0}^n d_k t^k$, avec $d_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k = 0, \dots, n$.

Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si les coefficients $(d_k)_{k=0, \dots, n}$ sont solution du système:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & a & n \\ 0 & & & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire l'existence et l'unicité d'une solution particulière de (E) sous forme d'un polynôme de degré n .

2 - On suppose à présent que $f(t) = P(t) \exp(-\lambda t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec λ un réel et P un polynôme de degré n .

- (a) On suppose que λ est différent de a . Par un raisonnement similaire au précédent, montrer qu'il existe une unique solution de (E) sous la forme $y(t) = Q(t) \exp(-\lambda t)$, où Q un polynôme de degré n .
- (b) On suppose à présent $\lambda = a$. Montrer qu'il existe une solution de (E) s'écrivant sous la forme $y(t) = Q(t) \exp(-\lambda t)$, avec Q un polynôme de degré $n + 1$.

Exercice 1.3. *Application - principe de superposition.*

1 - On considère l'équation différentielle

$$y' - y = t^2 \cos(t). \quad (\text{E})$$

- (a) Résoudre l'équation homogène associée.
- (b) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' - y = t^2 e^{it}. \quad (\text{E1})$$

- (c) En déduire une solution particulière de (E).

Remarque 1.3. une méthode équivalente consiste à utiliser le *principe de superposition* pour les équations différentielles linéaires. Dans le contexte de problèmes du premier ordre, il s'énonce de la manière suivante:

Si y_1 est une solution particulière de $y' + a(t)y = f_1(t)$, et y_2 est une solution particulière de $y' + a(t)y = f_2(t)$, alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$ est une solution particulière de l'équation:

$$y' + a(t)y = \lambda f_1(t) + \mu f_2(t).$$

On peut alors s'intéresser à l'équation différentielle suivante:

$$y' - y = t^2 e^{-it}. \quad (\text{E2})$$

et mettre le second membre de (E) sous la forme $t^2 \cos(t) = t^2 \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)$. Ainsi, si y_1 (resp y_2) est une solution particulière de (E1) (resp. (E2)), alors $\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}$ est solution de (E).

2 - En utilisant le principe de superposition, résoudre l'équation différentielle:

$$y' - y = t^2 \operatorname{sh}(2t) + t.$$

2 Équations différentielles non linéaires du premier ordre

On s'intéresse à présent à des équations différentielles du type: $y' = \mathcal{F}(t, y)$, avec $\mathcal{F} : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Notons que le cas des équations linéaires du premier ordre vu précédemment tombe dans ce formalisme, avec $\mathcal{F}(t, y) = f(t) - a(t)y(t)$. Nous avons le résultat suivant:

Théorème 2.1: Cauchy-Lipschitz (local).

Si $\mathcal{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour toute donnée de Cauchy $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{R}$, il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel qu'il existe dans J une unique solution du problème de Cauchy associé. En particulier, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant cette condition est une restriction de cette solution maximale.

Rappel : On dit que y , définie sur J est une *solution maximale* s'il n'existe pas de solution $\hat{y}$, définie sur $\hat{J}$ telle que $J \subsetneq \hat{J}$ et $y, \hat{y}$ coïncident sur J .

Remarque 2.1.

- Ce résultat est toujours valable pour $\mathcal{F} : I \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$.
- Le théorème de Cauchy-Lipschitz reste vrai si $\mathcal{F}$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable.

Les exercices qui suivent fournissent quelques outils utiles à la résolution de certains types d'équations différentielles non linéaires.

Exercice 2.1. Équations à variables séparées. On appelle équation *à variable séparées* toute équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme:

$$y'(t)g(y) = f(t), \tag{E}$$

où g et f sont des fonctions continues respectivement définies sur des intervalles J et I de $\mathbb{R}$. On considère G et F deux primitives respectives de g et f .

1 - Montrer que y est solution de (E) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, G(y(t)) = F(t) + \lambda.$$

2 - **Application.** Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$t^2 y' = \exp(y).$$

Exercice 2.2. *Équations de Bernoulli.* On appelle équation de *Bernoulli* toute équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme:

$$y' + a(t)y + b(t)y^\alpha = 0, \quad (\text{E})$$

où a et b sont des fonctions continues définies sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

1 - On suppose que y ne s'annule pas sur I , et on pose $z = y^{1-\alpha}$. Montrer que z vérifie une équation linéaire du premier ordre.

2 - **Application.** Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle.

$$y' = y^3 - \frac{y}{t}.$$

Exercice 2.3. *Équations de Riccati.* On appelle équation de *Riccati* toute équation différentielle pouvant s'écrire sous la forme:

$$y' + a(t)y + b(t)y^2 = f(t), \quad (\text{E})$$

où a, b et f sont des fonctions continues définies sur $I \subset \mathbb{R}$.

1 - On suppose connue une solution particulière y_p de (E). Montrer que le changement de variable $u = y - y_p$ permet de se ramener à une équation de Bernoulli.

2 - **Application.** On cherche à résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante:

$$t^3 y' + y^2 + y t^2 + 2t^4 = 0. \quad (1)$$

- (a) Rechercher une solution particulière y_p sous forme d'un polynôme de degré 2.
- (b) Reformuler l'équation précédente sous forme d'une équation de Riccati. Donner l'équation de Bernoulli associée au changement de variable $u = y - y_p$.
- (c) En déduire les solutions de l'équation (1).

3 Équations différentielles linéaires du second ordre

3.1 Principes généraux

On s'intéresse dans cette partie aux équations différentielles du type:

$$y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t), \quad (\text{E})$$

où b, c et f sont des fonctions continues définies sur $I \subset \mathbb{R}$.

- 1 - Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de $Y' + A(t).Y = F(t)$, où $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ c(t) & b(t) \end{pmatrix}$ et $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$.
- 2 - En déduire que pour tout couple (α_0, β_0) et tout $t_0 \in I$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(t_0) = \alpha_0$ et $y'(t_0) = \beta_0$.
Indication : utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas $d = 2$ (première remarque).
- 3 - En déduire que l'ensemble des solutions du problème homogène

$$y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (\text{H})$$

associé à (E) est un espace vectoriel de dimension 2.

Indication : on pourra considérer les fonctions h_1 et h_2 , solutions de (H) définies sur I , telles que $h_1(t_0) = 1$, $h_1'(t_0) = 0$ et $h_2(t_0) = 0$, $h_2'(t_0) = 1$, où $t_0 \in I$.

3.2 Cas des coefficients constants

On s'intéresse dans cette partie aux équations du type (E) dans le cas où b et c sont des constantes.

- 1 - Montrer qu'une fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(rt)$ avec $r \in \mathbb{K}$ est solution de l'équation homogène (H) si et seulement si r est solution de l'équation:

$$r^2 + br + c = 0.$$

Ce équation est communément appelée *équation caractéristique* associée à l'équation différentielle homogène (H).

- 2 - En déduire le théorème suivant:

Théorème 3.1

On considère l'équation homogène (H) et on note Δ le discriminant du *polynôme caractéristique*: $r^2 + br + c$.

- (i) $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 . Les solutions sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \lambda \exp(r_1 t) + \mu \exp(r_2 t), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- (ii) $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine double réelle r_0 . Les solutions sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \lambda_1 \exp(r_0 t) + \lambda_2 t \exp(r_0 t), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

- (iii) $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\omega$ et $r_2 = \alpha - i\omega$. Les solutions réelles sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \exp(\alpha t) (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)), \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3 - En déduire la forme générale des solutions de (E).

3.3 Exercices d'application

L'objectif principal est de voir comment les principes de résolution précédemment étudiés dans le cas de l'ordre 1 (variation de la constante, principe de superposition, recherche de solutions particulières en fonction de l'expression du second membre...), s'étendent à l'ordre 2.

Exercice 3.1. *Cas des coefficients constants. Recherche de solution particulière.* On considère l'équation différentielle suivante:

$$y'' - 5y' + 6y = 5t \cos(t) + (10t^2 + t + 13/2) \exp(-2t). \quad (\text{E})$$

1 - Résoudre l'équation homogène associée.

2 - Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - 5y' + 6y = 5t \cos(t).$$

Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_1(t) = (at + b) \sin(t) + (ct + d) \cos(t)$, où a, b, c, d sont des réels.

3 - Trouver une solution particulière de l'équation:

$$y'' - 5y' + 6y = (10t^2 + t + 13/2) \exp(-2t).$$

Indication : on pourra chercher une solution particulière sous la forme $y_2(t) = (at^2 + bt + c) \exp(-2t)$, où a, b, c sont des réels.

4 - Montrer qu'il existe une unique solution y de (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 3.2. *Méthode de variation de la constante.* On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}. \quad (\text{E})$$

1 - Résoudre l'équation homogène associée.

2 - On considère λ, μ , deux fonctions dérivables définies sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, vérifiant le système:

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos(t) + \mu'(t) \sin(t) = 0 \\ \lambda'(t) \cos'(t) + \mu'(t) \sin'(t) = \frac{1}{\cos(t)} \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction définie par:

$$y_p(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t) \quad , \quad \forall t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

est solution particulière de l'équation (E).

(b) Déterminer λ, μ vérifiant le système ci-dessus.

Remarque 3.1. *Il s'agit de la méthode de **variation de la constante** pour les équations du second ordre. De manière plus générale, on recherche des solutions particulières sous la forme $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$, où y_1 et y_2 sont des solutions indépendantes de l'équation homogène, et $\lambda, \mu \in C^1(I)$ définies à partir du système:*

$$\begin{cases} \lambda' y_1(t) + \mu' y_2(t) = 0 \\ \lambda' y_1'(t) + \mu' y_2'(t) = f(t) \end{cases} ,$$

f étant le second membre de l'équation.

3 - En déduire les solutions de (E).

Exercice 3.3. *Équation homogène du deuxième ordre.* On considère l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$6ty^2 - (y')^2 + yy'' = 0. \quad (\text{E})$$

- 1 - On suppose que y ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, et on pose $z = \frac{y'}{y}$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z .
- 2 - En déduire la forme générale des solutions de (E).

4 Systèmes d'équations différentielles

Exercice 4.1. *Système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre.* On considère le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x' &= x + 2y + z \\ y' &= y + z \\ z' &= -y + 3z \end{cases} \quad (\text{E})$$

- 1 - On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Écrire le système précédent sous la forme $U' = AU$, avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.
- 2 - Écrire A sous la forme $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire supérieure.
- 3 - On pose $V = P^{-1}U$. Montrer que $U' = AU$ si et seulement si $V' = TV$, puis résoudre le système différentiel $V' = TV$.
- 4 - En déduire les solutions de (E).

Exercice 4.2. *Système différentiel linéaire du premier ordre avec second membre.* On considère le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} x' &= 2tx - y + t \cos(t) \\ y' &= x + 2ty + t \sin(t) \end{cases} \quad (\text{E})$$

- 1 - On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Écrire le système précédent sous la forme $U' = AU + F$, avec $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

2 - Diagonaliser A .

3 - En déduire que les solutions de l'équation homogène sont de la forme:

$$h(t) = \lambda h_1(t) + \mu h_2(t),$$

avec $h_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \exp(t^2)$ et $h_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \exp(t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et λ, μ des constantes réelles.

4 - Chercher une solution particulière sous la forme:

$$\begin{pmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix} = \lambda(t)h_1(t) + \mu(t)h_2(t),$$

où $\lambda, \mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ sont des fonctions réelles.

Remarque 4.1. *cette approche généralise la méthode de **variation de la constante** aux systèmes.*

5 - En déduire la forme générale des solutions de l'équation (E).

Exercice 4.3. *Système différentiel linéaire du second ordre.* On considère le système différentiel suivant:

$$\begin{cases} y' &= -6x + 2y \\ x'' &= -3x + y - 2x' \end{cases} \quad (\text{E})$$

1 - On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \end{pmatrix}$. Écrire le système précédent sous la forme $U' = AU$, avec $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

2 - Montrer que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 - En déduire les solutions de l'équation (E).

Correction des exercices

FICHE 6 : EQ. DIFFERENTIELLES

I. Eqs. diff. linéaires du premier ordre

A. Résultats généraux.

1- Eq. homogène:

(a) a est une fⁿ continue $I \rightarrow \mathbb{K}$: elle admet une primitive sur I .

(b) y solutⁿ de (H) $\Leftrightarrow y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad \forall t \in I$

$$\Leftrightarrow \exp(A(t))(y'(t) + a(t)y(t)) = 0 \quad \text{avec } y'(t) = y''(t)$$

$$\Leftrightarrow G'(t) = 0 \quad \text{" avec } G(t) = y(t) \exp(A(t))$$

$$\Leftrightarrow G \equiv \lambda, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad y(t) = \lambda \exp(-A(t)) \quad \forall t \in I$$

(c) Notons $h: t \in I \rightarrow \exp(-A(t))$.

D'après ce qui précède, toute solⁿ y de (H) s'écrit sous la forme $y = \lambda h$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. On en déduit que $\mathcal{S}_H$ est un e.v. de dim 1, dont une base est donnée par g .

2- (a) $\begin{cases} y_1'(t) + a(t)y_1(t) = f(t) \\ y_2'(t) + a(t)y_2(t) = f(t) \end{cases} \Rightarrow y_1(t)y_2'(t) + a(t)(y_1(t) \cdot y_2'(t)) = 0 \Rightarrow y = y_1 - y_2$ est solⁿ de (H)

(b) Soit y_p une sol. part. de (E).

Soit y une autre sol. de (E). Alors $y = y_p + h$ avec $h = y - y_p$, sol. de (H).

$$\text{Donc } y(t) = y_p(t) + \lambda \exp(-A(t)), \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

3- On voit que les solutⁿ sont de la forme $y(t) = y_p(t) + \lambda \exp(-A(t))$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et y_p est une sol. part. de (E).

D'autre part, $y(t_0) = \alpha \Leftrightarrow y_p(t_0) + \lambda \exp(-A(t_0)) = \alpha \Leftrightarrow \lambda = (y_p(t_0) \exp(A(t_0)))^{-1} (\alpha - y_p(t_0))$.

Il existe donc qu'une seule de λ satisfaisant cette condition. Il en résulte l'existence et l'unicité d'une telle solutⁿ y .

FICHE 6 : EQ. DIFFERENTIELLES

II Eq. diff. non linéaires du premier ordre

Exercice 1: eq. à var. séparées: $y'(t) g(y) = f(t)$

G prim. de g . F prim. de f .

1- Il s'agit simplement de constater que:

$$y'(t) g(y) = f(t) \Leftrightarrow (G(y))' = F'(t)$$

$$\Leftrightarrow G(y) = F(t) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, G(y(t)) = F(t) + \lambda \quad \forall t \in I$$

2- Cette équation se réécrit:

$$y' \exp(-y) = \frac{1}{t^2}, \quad t \in]0, +\infty[\quad (E)$$

On connaît des primitives de $t \mapsto \exp(-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$,
 donc par $G(t) = -\exp(-t)$ et $F(t) = -\frac{1}{t} \quad \forall t \in]0, +\infty[$.

Donc, y est solut. de (E) $\Leftrightarrow (G(y))' = F'(t)$

$$\Leftrightarrow G(y) = F(t) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, -\exp(-y(t)) = -\frac{1}{t} + \lambda, \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}, -y(t) = \ln\left(\frac{1}{t} + \beta\right), \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

$$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R}, y(t) = -\ln\left(\frac{1}{t} + \beta\right), \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

On en déduit que les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = -\ln\left(\frac{1}{t} + \beta\right), \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad \text{où } \beta \in \mathbb{R}$$

Exercice 2:

eq. de Bernoulli:

$$y' + a(t)y + b(t)y^\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

1- Si $y \neq 0$ sur I , alors l'eq. devient:

$$\frac{y'}{y} + a(t) + b(t)y^{\alpha-1} = 0$$

Posons alors $z = y^{1-\alpha}$; on a $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y} y^{1-\alpha} = (1-\alpha)\frac{y'}{y} z$,d'où l'on tire: $z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y} z$. L'eq. se réécrit:

$$\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) \frac{z'}{z} + a(t) + \frac{b(t)}{z} = 0, \text{ ou encore: } \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) z' + a(t)z + b(t) = 0$$

2- $y' = y^3 - \frac{y}{t}$ sur $]0, +\infty[$.

$$y' = y^3 - \frac{y}{t} \Leftrightarrow y' + \frac{y}{t} - y^3 = 0. \rightarrow \text{cas } \alpha=3, a(t)=\frac{1}{t}, b=-1$$

Il s'agit d'une eq. de Bernoulli. En posant $z = y^{-2}$, on se ramène à

$$\text{l'équation: } \frac{1}{2}z' + \frac{1}{t}z - 1 = 0 \quad (E).$$

$$-\frac{1}{2} \times 2t + \frac{2t^2}{t} = 0$$

→ Résolution de (E):

$$z' - \frac{2}{t}z = -2$$

• Problème homogène: les solutions sont de la forme λt^2 , $\lambda \in \mathbb{R}$.• Recherche d'une sol. particulière: variation de la constante. On cherche y_p sous la forme: $y_p(t) = \lambda(t)t^2$. y_p sol. de (E) $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda' t^2 - \frac{1}{2} \times 2t\lambda + \frac{1}{t} \times \lambda t = 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda' t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda' = -\frac{2}{t^2}$$

On peut prendre $\lambda(t) = \frac{2}{t}$, d'où l'on tire $y_p(t) = 2t$.

$$\text{Vérif: } -\frac{1}{2}y_p' + \frac{1}{t}y_p = -\frac{1}{2} \times (2) + \frac{1}{t} \times 2t = -1 + 2 = 1 \text{ ok}$$

Les sol. de (E) sont donc de la forme $z(t) = 2t + \lambda t^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'eq. de Bernoulli sont de la forme:

$$z = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{z} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1}{z}} \quad y(t) = z(t)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2t + \lambda t^2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vérif } (\lambda=0): y(t) = \frac{1}{\sqrt{2t}}; y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2}$$

$$y' + \frac{y}{t} - y^3 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) t^{-3/2} = 0 \text{ ok}$$

Les solut^s de (a) sont de la forme:

$$z(t) = -\frac{1}{t^2} + \lambda \frac{1}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On en déduit les solut^s de (a):

$$u(t) = \frac{1}{\lambda - \frac{1}{t^2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{t}{\lambda - \frac{1}{t}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in]0, \frac{1}{\lambda}[\text{ ou } t \in]\frac{1}{\lambda}, +\infty[$$

$$u' - \frac{1}{t}u + \frac{1}{t^3}u^2 = \frac{(\lambda - \frac{1}{t}) - t(\frac{1}{t^2})}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} - \frac{1}{(\lambda - \frac{1}{t})}$$

$$+ \frac{1}{t^3} \left(\frac{t}{\lambda - \frac{1}{t}} \right)^2$$

$$= \frac{\lambda - 2/t}{(\lambda - 1/t)^2} - \frac{1}{(\lambda - 1/t)} + \frac{1}{t(\lambda - 1/t)^2}$$

$$\rightarrow \lambda(\lambda - \frac{1}{t}) - t(\lambda - \frac{1}{t}) + 1$$

$$= -2 + 1 + 1 = 0$$

Puis les solutions de (1):

$$y(t) = u(t) + y_p(t) = \frac{t}{\lambda - \frac{1}{t}} - t^2, \quad t \in]0, \frac{1}{\lambda}[\cup]\frac{1}{\lambda}, +\infty[, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Vérif:

$$y' = \frac{\lambda - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \times t}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} - 2t = \frac{\lambda - \frac{1}{t} - \frac{1}{t}}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} - 2t = \frac{(\lambda - 2/t)}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} - 2t$$

$$t^3 y' + y^3 + y t^2 + 2t^4 = \frac{t^3(\lambda - 2/t)}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} - 2t^4 + \left(\frac{t}{\lambda - \frac{1}{t}} - t^2 \right)^2 + \left(\frac{t}{\lambda - \frac{1}{t}} - t^2 \right) t^2 + 2t^4$$

$$= \frac{t^3(\lambda - 2/t)}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} - 2t^4 + \frac{t^2}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} - \frac{2t^3}{(\lambda - \frac{1}{t})} + t^4 + \frac{t^3}{(\lambda - \frac{1}{t})} - t^4 + 2t^4$$

$$= \frac{1}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} \left(t^3 \lambda - 2t^3 + t^2 - 2t^3(\lambda - \frac{1}{t}) + t^3(\lambda - \frac{1}{t}) \right)$$

$$= \frac{1}{(\lambda - \frac{1}{t})^2} \left(\frac{t^3 \lambda - 2t^3 \lambda + t^3 \lambda}{0} - \frac{2t^2 + t^2 + 2t^2 - t^2}{0} \right) = 0 \quad \text{OK}$$

FICHE 6 : EQ. DIFFERENTIELLES

III Eq. diff linéaires du second ordre

Exercice 1: $y'' - 5y' + 6y = 5t \cos(t) + (10t^2 + t + \frac{13}{2})e^{-2t}$

1- $P(r) = r^2 - 5r + 6$ $r_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = 2$
 $\Delta = 25 - 24 = 1$ $r_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} = 3$

Les sol. de l'éq. homogène sont donc de la forme: $h(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2- On cherche une sol. particulière de l'éq. $y'' - 5y' + 6y = 5t \cos(t)$ sous la forme: $y_1(t) = (at+b) \sin(t) + (ct+d) \cos(t)$.

On a: $y_1(t) = (at+b) \sin(t) + (ct+d) \cos(t)$

$$y_1'(t) = a \sin(t) + (at+b) \cos(t) - (ct+d) \sin(t) + c \cos(t)$$

$$= (-ct + a - d) \sin(t) + (at + b + c) \cos(t)$$

$$y_1''(t) = -c \sin(t) + \cos(-ct + a - d) + a \cos(t) - (at + b + c) \sin(t)$$

$$= -(at + b + 2c) \sin(t) + (-ct + 2a - d) \cos(t)$$

$$y_1''(t) - 5y_1'(t) + 6y_1(t) = \sin(t) (t(-a + 5c + 6a) - b - 2c - 5(a - d) + 6b) + \cos(t) (t(-c - 5a + 6c) + 2a - d - 5(b + c) + 6d)$$

$$= \sin(t) ((5a + 5c)t - 5a + 5b - 2c + 5d)$$

$$+ \cos(t) ((5c - 5a)t + 2a - 5b - 5c + 5d)$$

On en tire:
$$\begin{cases} 5a + c = 0 \\ 5(c - a) = 5 \\ -5a + 5b - 2c + 5d = 0 \\ 2a - 5b - 5c + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}; a = -\frac{1}{2} \\ 5(b + d) = 1 - \frac{5}{2} \\ 5(d - b) = 1 + \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}; a = -\frac{1}{2} \\ 10d = 2 \\ 10b = -\frac{10}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}; a = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{5}; b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit que $y_1(t) = 2 \left[(t + \frac{2}{5}) \cos(t) - (t + 1) \sin(t) \right]$

3- On cherche une solution particulière de l'éq. $y'' - 5y' + 6y = (10t^2 + t + \frac{13}{2})e^{-2t}$ sous la forme $y_2(t) = (at^2 + bt + c)e^{-2t}$

Exercice 2

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(t)} \quad (E)$$

1. Eq. homogène. $h(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. (a) On pose: $y_p(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$

$$y_p'(t) = \lambda' \cos - \lambda \sin + \mu' \sin + \mu \cos$$
$$= -\lambda \sin + \mu \cos \quad (\lambda' \cos + \mu' \sin = 0)$$

$$y_p''(t) = -\lambda' \sin - \lambda \cos + \mu' \cos - \mu \sin$$
$$= \frac{1}{\cos} - \lambda \cos - \mu \sin \quad (-\lambda' \sin + \mu' \cos = \frac{1}{\cos})$$

Il vient: $y_p'' + y_p = \frac{1}{\cos} - (\lambda \cos + \mu \sin) + (\lambda \cos + \mu \sin) = \frac{1}{\cos}$

Donc y_p est une sol. part. de (E)

$$(b) \quad \begin{cases} \lambda' \cos + \mu' \sin = 0 \\ -\lambda' \sin + \mu' \cos = \frac{1}{\cos} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda' \cos \sin + \mu' \sin^2 = 0 \\ -\lambda' \sin \cos + \mu' \cos^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \mu' = 1.$$

La première ligne donne alors: $\lambda' = -\frac{\sin}{\cos}$, et on peut prendre

$$\lambda(t) = \ln(|\cos(t)|). \quad \text{Ainsi, } y_p(t) = \ln(\cos(t)) \cos(t) + t \sin(t) \text{ est sol. part. de (E).}$$
$$= \ln(\cos(t)), \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

3 Les sol. de (E) sont de la forme:

$$y(t) = y_p(t) + \lambda \cos(t) + \mu \sin(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

FICHE 6 : EQ. DIFFERENTIELLES

IV Systèmes

Exercice 1: ordre 1, coeff constants, sans second membre

$$(S) \begin{cases} x' = x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$$

1. $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. (x, y, z) solution de (S) $\Leftrightarrow AU = U'$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\det(A - \lambda \text{id}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$

$\rightarrow$ Sous-espace propre associé à 1: $AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = x \\ y + z = y \\ -y + 3z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z = 0 \\ x \text{ libre} \end{cases}$

vecteur propre $\mu_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Sous-espace propre associé à 2: $AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2x \\ y + z = 2y \\ -y + 3z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = x \\ z = y \end{cases}$

vecteur propre $\mu_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{id})) = 1$.

La dim. du s.-esp. propre n'est pas égal à l'ordre de mult. de la racine: A n'est pas diagonalisable.

$\rightarrow$ Prenons $\mu_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mu_2 - 2\mu_1 + 2\mu_3$.

Ainsi, si l'on note $\mathcal{B} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$, $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a: $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id})$
 $= P \cdot T \cdot P^{-1}$ avec $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Un calcul rapide donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $V = P^{-1}U$. $U' = AU \Leftrightarrow U' = PTP^{-1}U \Leftrightarrow (P^{-1}U)' = T(P^{-1}U) \Leftrightarrow V' = TV$.

Exercice 2:

$$\begin{cases} x' = 2tx - y + t \cos(t) \\ y' = x + 2ty + t \sin(t) \end{cases} \quad (E)$$

1- $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (x, y) solution de (E) $\Leftrightarrow U' = AU + F$ avec $F = \begin{pmatrix} t \cos(t) \\ t \sin(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2t & -1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix}$

2- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = (2t - \lambda)^2 + 1 = (2t - \lambda - i)(2t - \lambda + i)$.

Deux valeurs propres complexes: $2t - \lambda$ et $2t + \lambda$.

Un calcul élémentaire donne $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2t - i & 0 \\ 0 & 2t + i \end{pmatrix}$. Par suite, le système homogène s'écrit:

$$\begin{aligned} U' &= AU &\Leftrightarrow U' &= (PDP^{-1})U &\Leftrightarrow (P^{-1}U)' &= D(P^{-1}U) \\ & &\Leftrightarrow V' &= DV &\text{ avec } V &= P^{-1}U. \end{aligned}$$

3- On pose alors $V = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. $V' = DV \Leftrightarrow \begin{cases} u' = (2t - i)u \\ v' = (2t + i)v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = \lambda e^{t(2t - i)} \\ v(t) = \mu e^{t(2t + i)} \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

On retourne aux variables d'origine: $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = PV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{t^2} \begin{pmatrix} \lambda e^{-it} & \mu e^{it} \\ i\lambda e^{-it} & -i\mu e^{it} \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

On recherche les solutions réelles de l'équation homogène:

$$\begin{aligned} x(t) = \bar{x}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \lambda e^{-it} + \mu e^{it} = \bar{\lambda} e^{it} + \bar{\mu} e^{-it} \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \bar{\mu} \end{aligned}$$

De même, on a $y(t) = \bar{y}(t) \Leftrightarrow \lambda = \bar{\mu}$

Au final: $\lambda = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
 $\mu = a - ib$

$$\begin{aligned} \text{Il vient: } x(t) &= e^{t^2} \left[(a+ib)e^{-it} + (a-ib)e^{it} \right] = e^{t^2} \left[a(e^{it} + e^{-it}) - ib(e^{it} - e^{-it}) \right] \\ &= e^{t^2} \left[2a \cos(t) + 2b \sin(t) \right] \\ y(t) &= e^{t^2} \left[i(a+ib)e^{-it} - i(a-ib)e^{it} \right] = e^{t^2} \left[-b e^{-it} - b e^{it} + ia e^{-it} - ia e^{it} \right] \\ &= e^{t^2} \left[-b(e^{it} + e^{-it}) - ia(e^{it} - e^{-it}) \right] \\ &= e^{t^2} \left[-2b \cos(t) + 2a \sin(t) \right] \end{aligned}$$

Les solut. de l'éq. homogène sont donc de la forme: $u(t) = \lambda \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} e^{t^2} + \mu \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} e^{t^2}$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 3:

$$(E) \quad \begin{cases} y' = -6x + 2y \\ x'' = -3x + y - 2x' \end{cases}$$

1- $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \end{pmatrix}$, (x, y) solution de (E) $\Leftrightarrow U' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -6x + 2y \\ -3x + y - 2x' \end{pmatrix} = AU$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2- $\det(A - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -6 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & 2-\lambda \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -\lambda(2-\lambda)(-2-\lambda) + (-6 - (-3 \times (2-\lambda)))$$
$$= -\lambda(-4 + \lambda^2) - 3\lambda$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 4) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

$$E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6+6 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6+4 \\ -3+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$
$$E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6+12 \\ -3+6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; on a $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = PDP^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

3- $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \end{pmatrix}$ solution de (E) $\Leftrightarrow U' = AU \Leftrightarrow U' = PDP^{-1}U \Leftrightarrow (P^{-1}U)' = D(P^{-1}U)$
 $\Leftrightarrow V' = DV$ avec $V = P^{-1}U$.

On résout le système $V' = DV$, d'inconnues $V = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$:

$$V' = DV \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ v' = -v \\ w' = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \lambda_1 \\ v = \lambda_2 e^{-t} \\ w = \lambda_3 e^t \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Il vient: $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \end{pmatrix} = PV = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 e^{-t} + 6\lambda_3 e^t \\ -\lambda_2 e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{pmatrix}$

On retrouve que x' satisfait la première équation.