Intégrales généralisées

Notions abordées

- *Notion d'intégrale généralisée : définitions et exemples.*
- *Critères de comparaison pour les fonctions à valeurs positives (majoration, équivalence).*
- *Intégrales de Riemann et de Bertrand.*
- *Critères de convergence (convergence absolue, théorème d'Abel ...).*
- *Applications :*
  -Convergence des intégrales du type $\int_a^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ *et* $\int_a^{+\infty} f(t)\cos(t)dt$ *avec* f *positive décroissante.*
  -Convergence et calcul de $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$.

On s'intéresse aux intégrales de fonctions définies sur des intervalles du type $[a, b[$ (avec $a < b$, b pouvant être égal à $+\infty$) ou du type $]a, b]$ ($a < b$, a pouvant être égal à $-\infty$).

1 Premières définitions et exemples

Définition 1.1: Intégrabilité locale.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est ***localement intégrable*** sur I si elle est Riemann intégrable sur tout sous-intervalle fermé borné de I.

Définition 1.2: Intégrales généralisées.

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$ avec $b \leqslant +\infty$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ ***converge*** si la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour tout $x \in [a, b[$ admet une limite ℓ lorsque x tend vers b. Cette limite est alors notée

$$\ell = \int_a^b f(t)dt\,,$$

et est appelée l'***intégrale généralisée*** (ou ***impropre***) de f sur $[a, b[$. Dans le cas où F n'admet pas de limite en b, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ ***diverge***.

On définit de manière analogue l'intégrale généralisée sur des intervalles de la forme $]a, b]$ avec $a \geqslant -\infty$.

Application 1.1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \exp(-t)dt$ converge.

Application 1.2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge.

Application 1.3. On considère la fonction $f : t \in]0, 1] \mapsto t\ln(t) - t$.

1 - Calculer f'.

2 - En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge.

2 Critères de comparaison

Proposition 2.1: Majoration

Soient f et g localement intégrables sur $[a, b[$, telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$. Alors:

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge, et on a: $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$
- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Application 2.1. *Convergence de l'intégrale gaussienne.* Soit $\lambda > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t^2)dt$ converge.
Indication : on pourra poser $g : t \mapsto \exp(-\lambda t)$ *et utiliser la propriété précédente sur* $[1, +\infty[$.

Proposition 2.2: Equivalence

Soient f et g localement intégrables et positives sur $[a, b[$. Si f et g sont équivalentes en b alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Application 2.2. *Convergence de l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt$.

1 - Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ converge.

2 - En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt$ converge.

A titre d'exercice, il pourra être intéressant de démontrer les théorèmes suivants (*on pourra s'inspirer des preuves proposées pour les séries numériques*).

Proposition 2.3: Intégrales de Riemann.

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.
- L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$.

Proposition 2.4: Intégrales de Bertrand.

- L'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}dt$ converge en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta}dt$ converge en 0 ssi $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

3 Autres critères de convergence

Les résultats qui suivent reposent sur le critère de Cauchy (hors programme) et peuvent être admis.

Proposition 3.1

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$, avec b fini.

- Si f est bornée sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
- Si f admet une limite à gauche finie en b, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Application 3.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) dt$ converge.

Définition 3.1: Convergence absolue

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est dite ***absolument convergente*** si l'intégrale de $|f|$ converge.

Application 3.2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-t}dt$ converge absolument.

Proposition 3.2

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$. Si $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument sur $[a, b[$ alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge sur $[a, b[$, et on a

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt\,.$$

Définition 3.2

Une intégrale convergente qui n'est pas absolument convergente est dite semi-convergente.

Application 3.3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ est absolument convergente.

Indication : on pourra utiliser le fait que $\left|\frac{\ln(t)}{1+t^2}\right| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ *et* $\left|\frac{\ln(t)}{1+t^2}\right| \underset{t\to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$.

Application 3.4. On cherche à établir que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ n'est pas absolument convergente.

1 - Montrer que, pour tout réel $x > 1$, on a:

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt = \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(2)}{2} + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{2t^2} dt \,.$$

Indication : on pourra effectuer une intégration par parties.

2 - En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge.

3 - Montrer que, pour tout réel $x > 1$, on a:

$$\int_1^x \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| dt \geqslant \frac{1}{2}\int_1^x \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

Indication : on pourra utiliser $|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t)$ pour tout réel $t \geqslant 1$, et linéariser $\sin^2(t)$.

4 - Conclure.

Remarque : nous verrons dans l'Exercice 1 que cette intégrale converge. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}$ est semi-convergente.

Proposition 3.3: Critère d'Abel

Soient f, g localement intégrables sur $[a, +\infty[$, vérifiant:

(i) f est positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, et a pour limite 0 en $+\infty$.

(ii) Il existe une constante M telle que

$$\forall x, y \in [a, +\infty[\,, \left|\int_x^y g(t) dt\right| \leqslant M \,.$$

Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$ converge.

---

4 Exercices d'application

Exercice 1. *Un résultat général de convergence.* Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant:

Proposition 4.1

Soit a un réel et f une fonction positive décroissante sur $[a,+\infty[$, admettant 0 pour limite en $+\infty$. Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\cos(t)dt$ convergent.

On se concentre uniquement sur les intégrales du type $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$, l'autre cas se traitant de manière similaire.

1 - Montrer que la fonction $h : t \mapsto f(t)\sin(t)$ est localement intégrable sur $[a,+\infty[$.

2 - Montrer que pour tout entier k vérifiant $k\pi > a$, on a

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} h(t)dt = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin(t)|dt\,.$$

3 - On note à présent k_0 le plus petit entier k vérifiant $k\pi > a$. Pour tout réel x vérifiant $x > k_0\pi$, on notera $n(x)$ l'unique entier tel que

$$n(x)\pi \leqslant x < (n(x)+1)\pi\,.$$

(a) Soit $x > k_0\pi$. On pose $\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{n(x)\pi}^{x} h(t)dt$. Montrer que

$$|\varepsilon(x)| \leqslant \pi f\left(n(x)\pi\right).$$

(b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$.

4 - On pose, pour tout $k \geqslant k_0$: $v_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)|\sin(t)|dt$.

(a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant k_0}$ tend vers 0 en décroissant.

(b) Montrer que, pour tout $x > (k_0+1)\pi$, on a

$$\int_a^x h(t)dt = \int_a^{k_0\pi} h(t) + \sum_{k=k_0}^{n(x)-1} (-1)^k v_k + \varepsilon(x)\,.$$

(c) Conclure.

Remarque 4.1. On déduit immédiatement de cette propriété que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge. Nous avons précédemment établi que cette intégrale n'était pas absolument convergente. En d'autres termes, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est semi-convergente.

Exercice 2. *Convergence et calcul de* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$.

On note $f : t \in]0, \pi/2] \longmapsto \ln(\sin(t))$.

1 - Montrer que pour tout $t \in]0, \pi/2]$, $f(t) = \ln\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right) + \ln(t)$.

2 - En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)dt$ converge. On notera I la valeur de cette intégrale.
Indication : utiliser ***A.3-*** *et* ***C.1-****.*

3 - Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi/2]$, on a:

$$\int_x^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt = \int_0^{\pi/2-x} \ln(\cos(t))dt\,.$$

En déduire que $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$.

4 - Montrer que $2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt - \frac{\pi}{2}\ln(2)$.
Indication : on pourra écrire $2I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$*, puis utiliser le fait que* $2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$ *pour tout réel* t*.*

5 - Montrer, par un changement de variable approprié, que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt \quad \text{et} \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(t))dt = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt = I\,.$$

6 - En déduire que $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.