

Intégrale de Riemann

Notions abordées

- Sommes de Darboux, définition de l'intégrabilité au sens de Riemann, exemples.
 - Critères d'intégrabilité (continuité, monotonie, produit et limite uniforme).
 - Linéarité de l'intégrale, relation de Chasles.
 - Résultats de positivité.
 - Théorème fondamental du calcul intégral.
 - Éléments techniques : changement de variable, intégration par parties, formules de la moyenne, théorème de Cauchy-Schwarz.
 - Applications : lien avec l'aire, seconde formule de la moyenne, intégrales de Wallis.
-
-

On s'intéresse à la notion de **Riemann-intégrabilité** de fonctions **bornées** définies sur des intervalles $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pour tous a, b réels vérifiant $a < b$, on notera $\mathbb{S}(a, b)$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire l'ensemble des suites finies du type $\mathfrak{s} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

1 Premières définitions et exemples

1.1 Sommes de Darboux

Définition 1.1: Sommes de Darboux.

Soit f une fonction bornée $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \mathbb{S}(a, b)$, on définit les **sommes de Darboux** inférieure $\mathcal{D}_\mathfrak{s}^-(f)$ et supérieure $\mathcal{D}_\mathfrak{s}^+(f)$ par:

$$\mathcal{D}_\mathfrak{s}^-(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) m_k \quad , \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) ,$$

$$\mathcal{D}_\mathfrak{s}^+(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) M_k \quad , \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) .$$

On dit que $\mathfrak{s}' \in \mathbb{S}(a, b)$ est un **raffinement** de $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a, b)$ si l'ensemble des points qui constituent $\mathfrak{s}$ est inclus dans l'ensemble des points qui constituent $\mathfrak{s}'$. On note alors $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}'$.

Lemme 1.1

$$\sup_{\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a, b)} \mathcal{D}_\mathfrak{s}^-(f) \leq \inf_{\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a, b)} \mathcal{D}_\mathfrak{s}^+(f) .$$

Dem: On considère deux subdivisions $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\}$ et $\mathfrak{s}' = \{y_0 < \dots < y_m\}$ (où $n, m \in \mathbb{N}^*$) d'un intervalle $[a, b]$ telles que $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}'$. Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'élément x_k est donc aussi un élément de l'ensemble $\{y_0, \dots, y_m\}$, et on note $\varphi(k)$ l'entier i vérifiant $x_k = y_i$. En d'autres termes, $y_{\varphi(k)} = x_k$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Notons que par construction φ est croissante et que l'on a $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(n) = m$.

1 - Pour tout $p \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on pose $m'_p = \inf_{x \in [y_{p-1}, y_p]} f(x)$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a:

$$\sum_{p=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (y_p - y_{p-1}) m'_p \geq (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) .$$

Indication : on pourra remarquer que pour tout entier p vérifiant $\varphi(k-1) + 1 \leq p \leq \varphi(k)$, on a $[y_{p-1}, y_p] \subset [x_{k-1}, x_k]$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La suite $(y_i)_{i=0, \dots, m}$ étant croissante, on a:

$$\forall p \in \llbracket \varphi(k-1) + 1, \varphi(k) \rrbracket \quad , \quad y_{p-1}, y_p \in [y_{\varphi(k-1)}, y_{\varphi(k)}] .$$

Par suite:

$$\forall p \in \llbracket \varphi(k-1) + 1, \varphi(k) \rrbracket \quad , \quad \inf_{x \in [y_p, y_{p-1}]} f(x) \geq \inf_{x \in [y_{\varphi(k-1)}, y_{\varphi(k)}]} f(x) .$$

On note alors $m_k = \inf_{x \in [y_{\varphi(k-1)}, y_{\varphi(k)}]} f(x) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ Ainsi:

$$\sum_{p=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (y_p - y_{p-1}) m'_p \geq \sum_{p=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (y_p - y_{p-1}) m_k.$$

$$\text{Or } \sum_{p=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (y_p - y_{p-1}) m_k = m_k \sum_{p=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (y_p - y_{p-1}) = m_k (y_{\varphi(k)} - y_{\varphi(k-1)}) = m_k (x_k - x_{k-1}).$$

2 - En déduire que $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}'}^-(f)$.

Indication :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m (y_p - y_{p-1}) m'_p &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{p=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (y_p - y_{p-1}) m'_p \right) \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{s}'}^-(f) &= \sum_{p=1}^m (y_p - y_{p-1}) m'_p = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{p=\varphi(k-1)+1}^{\varphi(k)} (y_p - y_{p-1}) m'_p \right) \\ &\geq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) m_k = \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f). \end{aligned}$$

3 - Par un raisonnement similaire, montrer que $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) \geq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}'}^+(f)$.

On considère à présent deux subdivisions quelconques $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_2$ de $[a, b]$. On note $\mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2$ la subdivision de $[a, b]$ constituée des points distincts de $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_2$. Notons que $\mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2$ est à la fois un raffinement de $\mathfrak{s}_1$ et un raffinement de $\mathfrak{s}_2$.

4 - Montrer que l'on a:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1}^-(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2}^-(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2}^+(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_2}^+(f).$$

D'après ce qui précède, on a $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1}^-(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2}^-(f)$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2}^+(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_2}^+(f)$. D'autre part, on a aussi $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f)$ pour toute subdivision $\mathfrak{s} \in \mathcal{S}(a, b)$, ce qui permet de conclure.

5 - En déduire que $\sup_{\mathfrak{s} \in \mathcal{S}(a, b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leq \inf_{\mathfrak{s} \in \mathcal{S}(a, b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f)$.

On déduit de ce qui précède que $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1}^-(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_2}^+(f)$ pour des subdivisions $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_2$ quelconques, ce qui donne le résultat.

□

1.2 Fonctions Riemann-intégrable

Définition 1.2: Fonction Riemann intégrable

Soit f une fonction bornée $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On note

$$\mathcal{R}^-(f) = \sup_{\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \quad , \quad \mathcal{R}^+(f) = \inf_{\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) .$$

On dit que f est Riemann intégrable si $\mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f)$. On définit alors l'intégrale de f (au sens de Riemann) par

$$\int_a^b f(t)dt = \mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f) .$$

Exemple 1.1.

On se place sur l'intervalle $[0, 1]$ et on s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

- 1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une subdivision $\mathfrak{s} = \{x_0 = 0 < \dots < x_n = 1\} \in \mathbb{S}(0, 1)$. Donner l'expression des sommes de Darboux (inférieure et supérieure) associées à cette subdivision.

On a:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) x_{k-1} .$$

On obtient de même $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) x_k$.

- 2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision $\mathfrak{s}_n$ définie par les points $(x_i)_{i=0, \dots, n}$, avec $x_i = i/n$ pour tout i . Calculer les sommes de Darboux associées à cette subdivision.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $x_k - x_{k-1} = 1/n$, et:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_n}^-(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \right) .$$

Un calcul analogue donne $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_n}^+(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)$.

- 3 - Montrer que $\mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f)$. En déduire que la fonction f est Riemann intégrable sur $[0, 1]$, avec $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_n}^-(f) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_n}^+(f) = \frac{1}{2}$. On en déduit que $1/2 \leq \mathcal{R}^-(f) \leq \mathcal{R}^+(f) \leq 1/2$, et donc $\mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f) = 1/2$. Donc f est Riemann-intégrable, avec $\int_0^1 f(t)dt = 1/2$.

Exemple 1.2. On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1 - Soit $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une subdivision de $[0, 1]$. Montrer que:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) = 1.$$

Soit $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \mathbb{S}(0, 1)$. On a:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad , \quad \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$ and $\beta_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. On en déduit que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 0$ et $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 1$, de sorte que:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) = 1.$$

2 - En déduire que f n'est pas Riemann intégrable.

Pour tout $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(0, 1)$, on a $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) = 0$, d'où l'on tire $\mathcal{R}^-(f) = 0$. De même, $\mathcal{R}^+(f) = 1$. Ces deux quantités ne coïncident pas, donc f n'est pas Riemann-intégrable.

2 Critères d'intégrabilité

Théorème 2.1: Monotonie

Toute fonction monotone $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

Dem: Soit f une fonction décroissante sur un intervalle $[a, b]$.

1 - On considère une subdivision de $[a, b]$ quelconque $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \geq \mathcal{R}^+(f) - \mathcal{R}^-(f) \geq 0.$$

Soit $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a, b)$. Par définition de $\mathcal{R}^-(f)$ et $\mathcal{R}^+(f)$, on a

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leq \mathcal{R}^-(f) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) \geq \mathcal{R}^+(f),$$

d'où l'on tire le résultat.

2 - Montrer que:

$$0 \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leq \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) (f(a) - f(b)).$$

On sait déjà que $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \geq 0$. D'autre part:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) (M_k - m_k),$$

où $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ et $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ pour $k = 1, \dots, n$. f étant décroissante, on a $M_k = f(x_{k-1})$ et $m_k = f(x_k)$ pour $k = 1, \dots, n$. D'autre part, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(x_k - x_{k-1}) \leq \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) =: \kappa$. Il vient:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s^+(f) - \mathcal{D}_s^-(f) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) (f(x_{k-1}) - f(x_k)) \\ &\leq \kappa \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \kappa (f(a) - f(b)) . \end{aligned}$$

3 - Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une subdivision $\mathfrak{s}_\varepsilon$ telle que $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^-(f) \leq \varepsilon$.

Indication: distinguer les cas $f(a) = f(b)$ et $f(a) \neq f(b)$, et limiter le pas de discrétisation de $\mathfrak{s}_\varepsilon$: $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$.

Si $f(a) = f(b)$, alors la question précédente permet de conclure que $|\mathcal{D}_s^+(f) - \mathcal{D}_s^-(f)| = 0$ pour toute subdivision $\mathfrak{s} \in \mathcal{S}(a, b)$, et le résultat est vrai.

Supposons à présent $f(a) > f(b)$, et considérons une subdivision $\mathfrak{s}_\varepsilon$ telle que $\kappa := \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)}$. D'après ce qui précède, on a $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^-(f) \leq \varepsilon$.

4 - Conclusion. En utilisant la question 1 -, on aboutit à:

$$0 \leq \mathcal{R}^+(f) - \mathcal{R}^-(f) \leq \varepsilon ,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $\mathcal{R}^+(f) = \mathcal{R}^-(f)$, c'est à dire f Riemann-intégrable. Ce raisonnement s'applique aussi aux fonctions croissantes.

□

Théorème 2.2: Continuité

Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

Dem: On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. Notons que l'intervalle $[a, b]$ étant fermé borné, f est uniformément continue sur cet intervalle:

$$\forall r > 0, \exists \eta < 0, \forall x, y \in [a, b], |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < r .$$

Etant donnée une subdivision $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \mathcal{S}(a, b)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, on note respectivement $m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ et $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$ les bornes inférieure et supérieure de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1 - Soit $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \mathcal{S}(a, b)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ les bornes m_k et M_k sont atteintes.

f est continue sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ces intervalles étant fermés bornés, on en déduit que f est bornée et atteint ses bornes sur ces intervalles.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la continuité uniforme de f , il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a).$$

2 - Soit $\mathfrak{s}_\varepsilon = \{x_0 < \dots < x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ telle que $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) < \eta$.

Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $M_k - m_k < \varepsilon/(b - a)$.

Soit $\mathfrak{s}_\varepsilon = \{x_0 < \dots < x_n\}$ telle que $\max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) < \eta$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les bornes M_k et m_k étant atteintes, il existe $a_k, b_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tels que $m_k = f(a_k)$ et $M_k = f(b_k)$. Notons que $a_k, b_k \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |b_k - a_k| \leq \eta$. Il vient : $M_k - m_k = |M_k - m_k| = |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon/(b - a)$.

3 - En déduire que $0 \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^-(f) < \varepsilon$.

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^-(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) (M_k - m_k) < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

4 - Conclure. On a vu précédemment que pour tout $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a, b)$:

$$0 \leq \mathcal{R}^+(f) - \mathcal{R}^-(f) \leq \mathcal{D}_s^+(f) - \mathcal{D}_s^-(f).$$

On déduit de la question précédente que $0 \leq \mathcal{R}^+(f) - \mathcal{R}^-(f) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui permet de conclure.

□

Théorème 2.3: Limite uniforme

Si f est la limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ Riemann intégrables sur $[a, b]$, alors f est Riemann intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 2.4: Produit

Si f et g sont Riemann intégrables sur $[a, b]$, alors leur produit fg l'est aussi.

3 Théorèmes fondamentaux

Théorème 3.1: Linéarité de l'intégrale

L'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel sur lequel l'intégrale définit une application linéaire. En d'autres termes, pour toutes fonctions f et g Riemann intégrables sur $[a, b]$, et pour tous réels α, β , on a:

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Théorème 3.2: Relations de Chasles

Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors f est aussi Riemann intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, avec:

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Théorème 3.3: Positivité de l'intégrale

Soit f positive, Riemann intégrable sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0.$$

Dem: Soit f à valeurs positives, Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Pour tout $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \mathbb{S}(a, b)$, on a

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}_\varepsilon}^-(f) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \geq 0$ par positivité de f , et par suite $\mathcal{R}^-(f) = \sup_{\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a, b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \geq 0$. f étant Riemann-intégrable, on a donc $\int_a^b f(t)dt = \mathcal{R}^-(f) \geq 0$.

□

Corollaire 3.1

Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, telles que $f \leq g$. On a:

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Dem: Il suffit de poser $h = g - f \geq 0$ et d'appliquer le résultat précédent. Le résultat est immédiat en utilisant la linéarité de l'intégrale.

□

Proposition 3.1

Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$. Alors $|f|$ est aussi Riemann intégrable, et on a:

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Dem: Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[a, b]$.

Résultat préliminaire.

On considère une subdivision $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \mathbb{S}(a, b)$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note:

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad , \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad , \\ m'_k &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x)| \quad , \quad M'_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x)| \quad . \end{aligned}$$

Dans les questions **1 -**, **2 -**, **3 -**, k désigne un réel fixé dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on suppose $M'_k > m'_k$.

- 1 -** Montrer que pour tout réel strictement positif $\xi < \frac{M'_k - m'_k}{2}$, il existe $a_k, b_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tels que:

$$m'_k \leq |f(a_k)| \leq m'_k + \xi < M'_k - \xi \leq |f(b_k)| \leq M'_k \quad .$$

Notons tout d'abord que $m'_k + \xi < m'_k + \frac{1}{2}(M'_k - m'_k) = \frac{1}{2}(M'_k + m'_k)$ et $M'_k - \xi > M'_k - \frac{1}{2}(M'_k - m'_k) = \frac{1}{2}(M'_k + m'_k)$. On a donc $m'_k + \xi < M'_k - \xi$. D'autre part, $m'_k + \xi$ n'étant pas un minorant de $\{|f(x)|, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, il existe $a_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tel que $m'_k \leq |f(a_k)| \leq m'_k + \xi$. De même, il existe $b_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tel que $M'_k - \xi \leq |f(b_k)| \leq M'_k$, ce qui donne le résultat.

- 2 -** En déduire que $|f(b_k)| - |f(a_k)| \geq M'_k - m'_k - 2\xi$.
D'après ce qui précède, $|f(b_k)| \geq M'_k - \xi$ et $-|f(a_k)| \geq -m'_k - \xi$, d'où l'on tire le résultat.

- 3 -** Montrer que $|f(b_k) - f(a_k)| \leq M_k - m_k$.
Se déduit immédiatement des inégalités $m_k \leq f(a_k) \leq M_k$ et $m_k \leq f(b_k) \leq M_k$.

- 4 -** En déduire que $M'_k - m'_k \leq M_k - m_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Si $M'_k = m'_k$, alors on a immédiatement $M_k - m_k \geq M'_k - m'_k = 0$.
Supposons $M'_k > m'_k$. Soit $0 < \xi < \frac{1}{2}(M'_k - m'_k)$. D'après ce qui précède, il existe $a_k, b_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tels que:

$$M'_k - m'_k - 2\xi \leq |f(b_k)| - |f(a_k)| \quad \text{et} \quad |f(b_k) - f(a_k)| \leq M_k - m_k \quad .$$

L'inégalité triangulaire donne $|f(b_k)| - |f(a_k)| \leq |f(b_k) - f(a_k)|$, et donc $M'_k - m'_k - 2\xi \leq M_k - m_k$ pour tout $\xi > 0$ vérifiant $\xi < \frac{1}{2}(M'_k - m'_k)$. On en déduit que $M'_k - m'_k \leq M_k - m_k$.

Retour à la preuve.

- 5 -** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une subdivision $\mathfrak{s}_1 \in \mathbb{S}(a, b)$ et une subdivision $\mathfrak{s}_2 \in \mathbb{S}(a, b)$ telles que:

$$0 \leq \mathcal{R}^-(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1}^-(f) \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_2}^+(f) - \mathcal{R}^+(f) \leq \varepsilon/2 \quad .$$

On sait que $\mathcal{R}^-(f) = \sup_{\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f)$ et $\mathcal{R}^+(f) = \sup_{\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f)$.

$\mathcal{R}^-(f) - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f), \mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a,b)\}$, donc il existe $\mathfrak{s}_1 \in \mathbb{S}(a,b)$ tel que:

$$\mathcal{R}^-(f) - \varepsilon/2 \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1}^-(f) \leq \mathcal{R}^-(f),$$

c'est à dire $0 \leq \mathcal{R}^-(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1}^-(f) \leq \varepsilon/2$. On obtient par un raisonnement analogue l'existence de $\mathfrak{s}_2 \in \mathbb{S}(a,b)$ tel que $0 \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_2}^+(f) - \mathcal{R}^+(f) \leq \varepsilon/2$.

6 - En déduire qu'il existe une subdivision $\mathfrak{s}$ telle que:

$$0 \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leq \varepsilon.$$

Indication: on pourra, par exemple, prendre $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2$.

En prenant $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \cup \mathfrak{s}_2$, on a:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{R}^-(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leq \mathcal{R}^-(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_1}^-(f) \leq \varepsilon/2, \\ 0 &\leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{R}^+(f) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}_2}^+(f) - \mathcal{R}^+(f) \leq \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Par sommation : $0 \leq \mathcal{R}^-(f) - \mathcal{R}^+(f) + \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f)$, et on conclut avec $\mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f)$ qui découle de la Riemann-intégrabilité de f .

7 - Utiliser la question **4** - pour montrer que $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(|f|) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(|f|) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f)$. En déduire que $|f|$ est Riemann intégrable. Posons $\mathfrak{s} = \{x_0 < \dots < x_n\}$. On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(|f|) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(|f|) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) (M'_k - m'_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) (M_k - m_k) = \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f). \end{aligned}$$

La question précédente permet de conclure que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a,b)$ telle que $0 \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(|f|) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(|f|) \leq \varepsilon$, et en utilisant $0 \leq \mathcal{R}_{\mathfrak{s}}^+(|f|) - \mathcal{R}_{\mathfrak{s}}^-(|f|) \leq \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(|f|) - \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(|f|) \leq \varepsilon$, on obtient finalement, $\mathcal{R}_{\mathfrak{s}}^+(|f|) = \mathcal{R}_{\mathfrak{s}}^-(|f|)$, c'est à dire $|f|$ Riemann-intégrable.

8 - Montrer que:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

On sait que $-|f| \leq f \leq |f|$ avec $f, |f|$ toutes deux Riemann-intégrables. Le théorème de comparaison donne:

$$-\int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt,$$

d'où le résultat.

□

Proposition 3.2

Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$, positive, telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors f prend la valeur 0 en tout point où elle est continue.

Théorème 3.4: Théorème fondamental

Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$. On considère l'application $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a, b]$ par:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On a les résultats suivants:

- i) F est continue sur $[a, b]$.
- ii) Si f admet une limite l (resp. à gauche, à droite) en $x_0 \in [a, b]$, alors F est dérivable (resp. à gauche, à droite) en x_0 , et on a $F'(x_0) = l$.
- iii) Si f est continue sur $[a, b]$, alors F est dérivable sur $[a, b]$, et F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

4 Eléments Techniques

Proposition 4.1: Changement de variable

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et f continue sur l'intervalle $\varphi([a, b])$. On a:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds.$$

Dem: Commençons par établir que ces deux intégrales sont bien définies. Notons que $J = \varphi([a, b])$ est un intervalle fermé borné par continuité de φ . Ainsi, l'intervalle I d'extrémités $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ est inclus dans J . f étant continue sur J , elle l'est aussi sur I , et donc l'intégrale $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds$ est bien définie.

D'autre part, la fonction $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ est continue sur $[a, b]$ (comme produit et composée de fonctions continues sur $[a, b]$), donc aussi Riemann-intégrable sur cet intervalle.

Considérons alors les fonctions $F : s \in J \mapsto \int_{\varphi(a)}^s f(y)dy$ et $G : s \in [a, b] \mapsto \int_a^s f(\varphi(x))dx$.

D'après le théorème 3.4, F est dérivable sur J , avec $F' = f$. De même, G est dérivable sur $[a, b]$, et on a $G' = f \circ \varphi \cdot \varphi'$. D'autre part, on a $(F \circ \varphi)' = F' \circ \varphi \cdot \varphi' = f \circ \varphi \cdot \varphi' = G'$.

Les fonctions $F \circ \varphi$ et G admettent donc la même dérivée sur $[a, b]$. De plus, $F \circ \varphi(a) = G(a) = 0$, et donc ces deux fonctions sont égales. On conclut avec $F \circ \varphi(b) = G(b)$.

□

Proposition 4.2: Intégration par parties

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Dem: Considérons la fonction ψ définie par $\psi(t) = f(t)g'(t) + f'(t)g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. Cette fonction admet $f.g$ pour primitive, et $f.g - f(a)g(a)$ est l'unique primitive de ψ qui s'annule en a . On a donc :

$$[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (f(t)g'(t) + f'(t)g(t)) dt,$$

d'où le résultat.

□

Proposition 4.3: Première formule de la moyenne.

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec g positive. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

Dem: Voir fiche "Fonctions de la variable réelle".

□

Proposition 4.4: Deuxième formule de la moyenne.

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles, avec f Riemann intégrable et g positive décroissante. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a) \int_a^c f(t)dt.$$

Dem: Voir Exercice 4

□

Théorème 4.1: Cauchy-Schwarz.

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$. On a :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b (f(t))^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b (g(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Dem: Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$.

1 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $(\lambda f + g)^2$ est Riemann intégrable.

$\lambda f + g$ est Riemann-intégrable par linéarité de l'intégrale. Par suite, $(\lambda f + g)^2$ l'est aussi en tant que produit de deux fonctions Riemann-intégrables.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 dt.$$

2 - Montrer que P est un polynôme de degré 2 en λ .

En développant la relation précédente, on obtient $P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, avec $a = \int_a^b (f(t))^2 dt$, $b = 2 \int_a^b f(t)g(t)dt$ et $c = \int_a^b (g(t))^2 dt$.

3 - Montrer que le discriminant de P est négatif ou nul. Conclure.

Pour tout λ , la fonction $(\lambda f + g)^2$ est une fonction à valeurs positives sur $[a, b]$, donc $P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f + g)^2(t)dt \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, P ne peut admettre de discriminant strictement positif (auquel cas P prendrait des valeurs négatives). Ainsi:

$$b^2 - 4ac \leq 0 \Leftrightarrow 4 \left(\int_a^b f(t)g(t)dt \right)^2 - 4 \left(\int_a^b (f(t))^2 \right) \left(\int_a^b (g(t))^2 dt \right) \leq 0,$$

ce qui donne le résultat.

□

5 Exercices d'application

Exercice 1. Calculer les limites des suites suivantes:

$$\begin{array}{lll} 1. & a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} & 2. & b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} & 3. & c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n} \\ 4. & d_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} & 5. & e_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) & 6. & f_n = \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) \end{array}$$

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives. Montrer que:

$$\int_0^1 \ln(f(t))dt \leq \ln\left(\int_0^1 f(t)dt\right).$$

Exercice 3. *Lien avec l'aire.*

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in [a, b]$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe de f entre a et x .

1 - Montrer que $\mathcal{A}$ définit une fonction dérivable sur $[a, b]$, avec $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

2 - En déduire que $\mathcal{A}(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Exercice 4. *Deuxième formule de la moyenne.* On se place dans les conditions de l'énoncé de la deuxième formule de la moyenne. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les notations $h_n = \frac{b-a}{n}$ et $x_k = a + kh_n$ pour $0 \leq k \leq n$. On pose:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g(x_k)dt.$$

1 - Pour tout $x \in [a, b]$ on pose $A(x) = \int_a^x |f(t)|dt$.

(a) Montrer que A est continue sur $[a, b]$.

Indication : On utilisera le fait que f est Riemann intégrable, donc bornée.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait:

$$\forall x \in [a, b - h_n] \quad , \quad |A(x + h_n) - A(x)| < \varepsilon.$$

Indication : A est continue sur $[a, b]$, donc uniformément continue sur cet intervalle.

(c) En déduire que la suite de terme général $a_n = \sup_{x \in [a, b-h_n]} (A(x + h_n) - A(x))$ converge vers 0.

2 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)| (g(x_k) - g(t)) dt.$$

(b) En déduire:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) (A(x_{k+1}) - A(x_k)).$$

(c) En déduire que la suite (R_n) converge vers $\int_a^b f(t)g(t)dt$.

Indication: utiliser 1 - (c).

3 - Pour tout $x \in [a, b]$ on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a l'égalité:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) F(x_{k+1}) + g(b)F(b).$$

(b) On note $m = \inf_{x \in [a, b]} F(x)$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} F(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(a)m \leq R_n \leq g(a)M,$$

(c) En déduire l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$g(a)F(c) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Exercice 5. *Intégrales de Wallis (extrait du concours 2009).*

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$.

1 - Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

Indication: on pourra, par exemple, utiliser la changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - x$.

2 - Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.

Indication: pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.

3 - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $n \geq 0$, on a:

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right) W_n.$$

4 - En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a:

$$\begin{cases} W_{2p} &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

5 - Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Indication : on pourra montrer que la suite de terme général $(n+1)W_n W_{n+1}$ est constante.

6 - Prouver que, pour tout $n \geq 0$, on a:

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1,$$

et en déduire que $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_{n+1}$.

Indication : on pourra utiliser les questions 2 et 3.

7 - Montrer finalement que $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

Correction des exercices

Exercice 1. Calculer les limites des suites suivantes, de terme général:

$$\begin{array}{lll} 1. & a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} & 2. & b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} & 3. & c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n} \\ 4. & d_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} & 5. & e_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) & 6. & f_n = \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) \end{array}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathfrak{s}_n = \{0 < 1/n < \dots < 1\}$. On a $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + k^2/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + k^2/n^2}$.

On considère alors la fonction f définie par $f(x) = 1/(1 + x^2)$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a alors $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$. f étant positive décroissante, a_n correspond à la somme de Darboux inférieure associée à la subdivision $\mathfrak{s}_n$.

Par suite, f étant Riemann-intégrable (car continue), on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_0^1 f(t) dt$.

2. On vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$ avec f définie par $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Par un raisonnement analogue au précédent, on en déduit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \int_0^1 \frac{t}{1 + t^2} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $c_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n} = \frac{1}{n^2} \left(\prod_{k=1}^n (n^2 + k^2) \right)^{1/n}$.

On a $\prod_{k=1}^n (n^2 + k^2) = \prod_{k=1}^n n^2 (1 + k^2/n^2) = (n^2)^n \prod_{k=1}^n (1 + (k/n)^2)$. Il vient:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n^2} \times n^2 \prod_{k=1}^n (1 + (k/n)^2)^{1/n} = \exp \left(\frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n (1 + (k/n)^2) \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right) \right) = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \right), \end{aligned}$$

où $f(x) = \ln(1+x^2)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \exp(I)$ où $I = \int_0^1 f(t)dt$.

Pour déterminer I , on vérifie que la fonction F définie par $F(x) = x \ln(1+x^2) + 2 \tan^{-1}(x) - 2x$ est une primitive de f .

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $d_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}} = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{1/n} \times \left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n}$.

D'une part, $\frac{(2n)!}{n!} = \prod_{k=1}^n (n+k) = \prod_{k=1}^n n(1+k/n) = n^n \prod_{k=1}^n (1+k/n)$, et d'autre part $\left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n} = \frac{1}{n}$. On en déduit que

$$d_n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n (1+k/n)\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)\right)$$

avec $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) = \int_0^1 f(t)dt = 2 \ln(2) - 1$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par remarquer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k/n^2 \in [0, 1] \subset [0, \pi/2]$. Ainsi, en exploitant l'estimation $x - x^3/6 \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$k/n^2 - \frac{1}{6} (k/n^2)^3 \leq \sin(k/n^2) \leq k/n^2.$$

Par suite :

$$u_n := \sum_{k=1}^n \sin(k/n) \left(k/n^2 - \frac{1}{6} (k/n^2)^3\right) \leq e_n \leq \sum_{k=1}^n \sin(k/n) \cdot \frac{k}{n^2} =: v_n$$

On a $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k/n) \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$ avec $f(x) = x \sin(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, dont une

primitive est $F(x) = \sin(x) - x \cos(x)$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \int_0^1 f(t)dt = \sin(1) - \cos(1)$.

On démontre ensuite que $u_n = v_n + w_n$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$, ce qui permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \sin(1) - \cos(1).$$

6. Ce cas se traite d'une façon similaire au cas précédent.

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln(f(t))dt \leq \ln\left(\int_0^1 f(t)dt\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère u_n , la somme de Riemann de $\ln \circ f$ associée à la subdivision régulière $\mathfrak{s}_n = \{0 < 1/n < \dots < 1\}$. On a $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(f(k/n))$. On définit ensuite v_n la

somme de Riemann de f associée à cette même subdivision : $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n)$. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^1 \ln(f(t)) dt \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \int_0^1 f(t) dt.$$

Par suite, en utilisant la concavité de la fonction $\ln$:

$$\ln(v_n) = \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(f(k/n)) = u_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(v_n) \geq u_n$. On note alors que le théorème de composition des limites donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(v_n) = \ln \left(\int_0^1 f(t) dt \right)$, ce qui permet de conclure.

Exercice 3. Lien avec l'aire.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in [a, b]$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe de f entre a et x .

- 1 - Montrer que $\mathcal{A}$ définit une fonction dérivable sur $[a, b]$, avec $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Soit $x_0 \in]a, b[$, et soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$. Notons que f étant continue, elle atteint ses bornes sur $[x, x+h]$. On a :

$$\mathcal{A}(x) + h \cdot \min_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) \leq \mathcal{A}(x+h) \leq \mathcal{A}(x) + h \cdot \max_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x),$$

d'où l'on déduit

$$\min_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq \max_{x \in [x_0, x_0+h]} f(x).$$

Par continuité de f , on obtient $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x_0)$ via le théorème des gendarmes. De même : $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = f(x_0)$, d'où l'on déduit que $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 , avec $\mathcal{A}'(x_0) = f(x_0)$.

Un raisonnement similaire permet de conclure que $\mathcal{A}$ est dérivable à droite en a et à gauche en b .

- 2 - En déduire que $\mathcal{A}(b) = \int_a^b f(t) dt$.

$\mathcal{A}$ est la primitive de f qui s'annule en a : on en déduit que pour tout $x \in [a, b]$, $\mathcal{A}(x) = \int_a^x f(t) dt$. Par suite, $\mathcal{A}(b) = \int_a^b f(t) dt$.

Exercice 4. *Deuxième formule de la moyenne.* On se place dans les conditions de l'énoncé de la deuxième formule de la moyenne (f Riemann intégrable et g positive décroissante).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les notations $h_n = \frac{b-a}{n}$ et $x_k = a + kh_n$ pour $0 \leq k \leq n$. On pose:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g(x_k)dt.$$

1 - Pour tout $x \in [a, b]$ on pose $A(x) = \int_a^x |f(t)|dt$.

(a) Montrer que A est continue sur $[a, b]$.

Indication : On utilisera le fait que f est Riemann intégrable, donc bornée.

Soit $x \in]a, b[$. Soit $h > 0$ tel que $x + h \in [a, b]$. Notons que f est bornée par un réel $M > 0$ sur $[a, b]$. On a:

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} |f(t)|dt \leq M \int_x^{x+h} dt = Mh.$$

On en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} A(x+h) = A(x)$, et A est donc continue en x . On montre de même la continuité de A aux bornes de l'intervalle.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait:

$$\forall x \in [a, b - h_n] \quad , \quad |A(x + h_n) - A(x)| < \varepsilon.$$

Indication : A est continue sur $[a, b]$, donc uniformément continue sur cet intervalle.

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de A , on a:

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \eta \Rightarrow |A(x) - A(y)| < \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, on a $h_n = (b-a)/n$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $h_n < \eta$ pour tout $n \geq N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a: $\forall x \in [a, b - h_n], |x + h_n - x| = h_n < \eta$, et donc $|A(x + h_n) - A(x)| < \varepsilon$.*

(c) En déduire que la suite de terme général $a_n = \sup_{x \in [a, b-h_n]} (A(x + h_n) - A(x))$ converge vers 0.

D'après ce qui précède, on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, t.q., n \geq N \Rightarrow (|A(x + h_n) - A(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b - h_n]) ,$$

ce qui équivaut à $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, b-h_n]} (A(x + h_n) - A(x)) = 0$.

2 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)| (g(x_k) - g(t)) dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g(x_k)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)| |g(x_k) - g(t)| dt. \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, $g(t) \leq g(x_k)$ car g est décroissante. On en déduit:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)| (g(x_k) - g(t)) dt.$$

(b) En déduire:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) (A(x_{k+1}) - A(x_k)).$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour tout $t \in [x_k, x_{k+1}]$, on a $0 \leq g(x_{k+1}) \leq g(t) \leq g(x_k)$, et donc $0 \leq g(x_k) - g(t) \leq g(x_k) - g(x_{k+1})$. D'autre part, on a $A(x_{k+1}) - A(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)| dt$. On en déduit:

$$\begin{aligned} \left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)| (g(x_k) - g(x_{k+1})) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)| dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) (A(x_{k+1}) - A(x_k)). \end{aligned}$$

(c) En déduire que la suite (R_n) converge vers $\int_a^b f(t)g(t)dt$.

Indication: utiliser 1-(c).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$0 \leq A(x_{k+1}) - A(x_k) = A(x_k + h_n) - A(x_k) \leq \sup_{x \in [a, b-h_n]} (A(x + h_n) - A(x)) = a_n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq a_n \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) = a_n (g(a) - g(b)).$$

D'après la question 1-(c), la suite (a_n) converge vers 0, ce qui permet de conclure.

3 - Pour tout $x \in [a, b]$ on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a l'égalité:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) F(x_{k+1}) + g(b)F(b).$$

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g(x_k)dt = \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) (F(x_{k+1}) - F(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)F(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)F(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)F(x_{k+1}) - \underbrace{g(a)F(a)}_{=0} - \sum_{k=1}^n g(x_k)F(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)F(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})F(x_{k+1}) + g(b)F(b) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) F(x_{k+1}) + g(b)F(b) \end{aligned}$$

(b) On note $m = \inf_{x \in [a, b]} F(x)$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} F(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(a)m \leq R_n \leq g(a)M,$$

D'après ce qui précède, g étant décroissante positive, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) m + g(b)m \leq R_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1})) M + g(b)M,$$

c'est à dire $g(a)m \leq R_n \leq g(a)M$.

(c) En déduire l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$g(a)F(c) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Par passage à la limite dans l'équation précédente, on en déduit:

$$g(a)m \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq g(a)M.$$

On conclut avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 5. *Intégrales de Wallis (extrait du concours 2009).*

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$.

1 - Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

Indication: on pourra, par exemple, utiliser le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $\varphi : x \in [0, \pi/2] \mapsto \pi/2 - x \in [0, \pi/2]$. Cette fonction est continue et réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ sur $[0, \pi/2]$. En effectuant le changement de variable $t = \pi/2 - x = \varphi(x)$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx = \int_{\pi/2}^0 \cos^n(\pi/2 - t)(-dt) = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

2 - Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.

Indication: pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\cos^{n+1}(x) - \cos^n(x) = \cos^n(x)(\cos(x) - 1) \leq 0$.

On en déduit que $\int_0^{\pi/2} (\cos^{n+1}(x) - \cos^n(x)) dx \leq 0$, c'est à dire $W_{n+1} \leq W_n$. D'autre part, la fonction $\cos^{n+1} - \cos^n$ étant de signe constant, on a $W_{n+1} = W_n \Leftrightarrow \cos^{n+1}(x) = \cos^n(x)$ pour tout $x \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde. On en déduit la stricte décroissance de (W_n) .

3 - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $n \geq 0$, on a:

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right) W_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $\sin$ et $\cos^{n+1}$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut effectuer une intégration par parties pour obtenir:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos^{n+1}(x)dx = [\sin(x) \cos^{n+1}(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot (n+1)(-\sin(x)) \cos^n(x)dx \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^n(x)dx \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \cos^n(x)dx = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx - (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)dx \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

4 - En déduire que, pour tout entier $p \geq 0$, on a :

$$\begin{cases} W_{2p} &= \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} &= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

Notons que $W_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = 1$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$.
On a :

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} W_0 \\ &= \frac{(2p-1) \times (2p-3) \cdots \times 1}{(2p) \times (2p-2) \cdots \times 2} \pi/2 \\ &= \frac{2p \times (2p-1) \times (2p-2) \times (2p-3) \cdots \times 1}{[(2p) \times (2p-2) \cdots \times 2]^2} \pi/2 \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Le résultat concernant W_{2p+1} se montre via des calculs analogues.

5 - Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Indication : on pourra montrer que la suite de terme général $(n+1)W_n W_{n+1}$ est constante.

D'après la question 3, on a $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où l'on tire $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$. La suite de terme général $(n+1)W_{n+1}W_n$ est donc constante. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = W_1 W_0 = \frac{1}{2}$, d'où le résultat.

6 - Prouver que, pour tout $n \geq 0$, on a :

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1,$$

et en déduire que $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_{n+1}$.

Indication : on pourra utiliser les questions 2 et 3.

Remarquons tout d'abord que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (intégrale d'une fonction continue positive non nulle). Par suite, la suite (W_n) étant strictement décroissante, on a, $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où l'on tire $W_{n+2}/W_n < W_{n+1}/W_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$, ce qui donne l'estimation demandée. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} W_{n+1}/W_n = 1$, c'est à dire $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_{n+1}$.

7 - Montrer finalement que $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

*D'après ce qui précède, $\frac{\pi}{2(n+1)} = W_{n+1}W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} W_n^2$, d'où l'on tire $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}}$,
et par suite $W_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En particulier, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$.*