Intégrale de Riemann

Notions abordées

- *Sommes de Darboux, définition de l'intégrabilité au sens de Riemann, exemples.*
- *Critères d'intégrabilité (continuité, monotonie, produit et limite uniforme).*
- *Linéarité de l'intégrale, relation de Chasles.*
- *Résultats de positivité.*
- *Théorème fondamental du calcul intégral.*
- *Éléments techniques : changement de variable, intégration par parties, formules de la moyenne, théorème de Cauchy-Schwarz.*
- *Applications : lien avec l'aire, seconde formule de la moyenne, intégrales de Wallis.*

On s'intéresse à la notion de ***Riemann-intégrabilité*** de fonctions **bornées** définies sur des intervalles $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pour tous a, b réels vérifiant $a < b$, on notera $\mathbb{S}(a, b)$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a, b]$, c'est à dire l'ensemble des suites finies du type $\mathfrak{s} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}$.

1 Premières définitions et exemples

1.1 Sommes de Darboux

Définition 1.1: Sommes de Darboux.

Soit f une fonction bornée $[a,b] \to \mathbb{R}$. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $\mathfrak{s} = \{x_0 < \cdots < x_n\} \in \mathbb{S}(a,b)$, on définit les ***sommes de Darboux*** inférieure $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f)$ et supérieure $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f)$ par:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})m_k \quad , \quad m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,,$$

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})M_k \quad , \quad M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\,.$$

On dit que $\mathfrak{s}' \in \mathbb{S}(a,b)$ est un ***raffinement*** de $\mathfrak{s} \in \mathbb{S}(a,b)$ si l'ensemble des points qui constituent $\mathfrak{s}$ est inclus dans l'ensemble des points qui constituent $\mathfrak{s}'$. On note alors $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}'$.

Lemme 1.1

$$\sup_{\mathfrak{s}\in\mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \leqslant \inf_{\mathfrak{s}\in\mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f)\,.$$

1.2 Fonctions Riemann-intégrable

Définition 1.2: Fonction Riemann intégrable

Soit f une fonction bornée $[a,b] \to \mathbb{R}$. On note

$$\mathcal{R}^-(f) = \sup_{\mathfrak{s}\in\mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^-(f) \quad , \quad \mathcal{R}^+(f) = \inf_{\mathfrak{s}\in\mathbb{S}(a,b)} \mathcal{D}_{\mathfrak{s}}^+(f)\,.$$

On dit que f est Riemann intégrable si $\mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f)$. On définit alors l'intégrale de f (au sens de Riemann) par

$$\int_a^b f(t)dt = \mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f)\,.$$

Exemple 1.1.
On se place sur l'intervalle $[0,1]$ et on s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

1 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une subdivision $\mathfrak{s} = \{x_0 = 0 < \cdots < x_n = 1\} \in \mathbb{S}(0,1)$. Donner l'expression des sommes de Darboux (inférieure et supérieure) associées à cette

subdivision.

2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la subdivision $\mathfrak{s}_n$ définie par les points $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$, avec $x_i = i/n$ pour tout i. Calculer les sommes de Darboux associées à cette subdivision.

3 - Montrer que $\mathcal{R}^-(f) = \mathcal{R}^+(f)$. En déduire que la fonction f est Riemann intégrable sur $[0,1]$, avec $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$.

Exemple 1.2. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1 - Soit $\mathfrak{s} = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ une subdivision de $[0,1]$. Montrer que:

$$\mathcal{D}^-_{\mathfrak{s}}(f) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^+_{\mathfrak{s}}(f) = 1\,.$$

2 - En déduire que f n'est pas Riemann intégrable.

2 Critères d'intégrabilité

Théorème 2.1: Monotonie

Toute fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

Théorème 2.2: Continuité

Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable.

Théorème 2.3: Limite uniforme

Si f est la limite uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ Riemann intégrables sur $[a,b]$, alors f est Riemann intégrable sur $[a,b]$.

Théorème 2.4: Produit

Si f et g sont Riemann intégrables sur $[a,b]$, alors leur produit fg l'est aussi.

3 Théorèmes fondamentaux

Théorème 3.1: Linéarité de l'intégrale

L'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel sur lequel l'intégrale définit une application linéaire. En d'autres termes, pour toutes fonctions f et g Riemann intégrables sur $[a, b]$, et pour tous réels α, β, on a:

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt\,.$$

Théorème 3.2: Relations de Chasles

Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$. Alors f est aussi Riemann intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, avec:

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt\,.$$

Théorème 3.3: Positivité de l'intégrale

Soit f positive, Riemann intégrable sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b f(t)dt \geqslant 0\,.$$

Corollaire 3.1

Soient f et g deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$, telles que $f \leqslant g$. On a:

$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt\,.$$

Proposition 3.1

Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$. Alors $|f|$ est aussi Riemann intégrable, et on a:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt\,.$$

Proposition 3.2

Soit f Riemann intégrable sur $[a, b]$, positive, telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors f prend la valeur 0 en tout point où elle est continue.

Théorème 3.4: Théorème fondamental

Soit f Riemann intégrable sur $[a,b]$. On considère l'application $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [a,b]$ par:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

On a les résultats suivants:

i) F est continue sur $[a,b]$.

ii) Si f admet une limite l *(resp. à gauche, à droite)* en $x_0 \in [a,b]$, alors F est dérivable *(resp. à gauche, à droite)* en x_0, et on a $F'(x_0) = l$.

iii) Si f est continue sur $[a,b]$, alors F est dérivable sur $[a,b]$, et F est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

4 Eléments techniques

Proposition 4.1: Changement de variable

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et f continue sur l'intervalle $\varphi([a,b])$. On a:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)ds\,.$$

Proposition 4.2: Intégration par parties

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On a:

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt\,.$$

Proposition 4.3: Première formule de la moyenne.

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$, avec g positive. Il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt\,.$$

Proposition 4.4: Deuxième formule de la moyenne.

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles, avec f Riemann intégrable et g positive décroissante. Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt\,.$$

Théorème 4.1: Cauchy-Schwarz.

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$. On a:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \left(\int_a^b (f(t))^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b (g(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

---

5 Exercices d'application

Exercice 1. Calculer les limites des suites suivantes:

1. $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$
2. $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$
3. $c_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n} \left(n^2 + k^2\right)^{1/n}$
4. $d_n = \displaystyle\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$
5. $e_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$
6. $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$

Exercice 2. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives. Montrer que:

$$\int_0^1 \ln(f(t))dt \leqslant \ln\left(\int_0^1 f(t)dt\right).$$

Exercice 3. *Lien avec l'aire.*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in [a, b]$, on note $\mathcal{A}(x)$ l'aire sous la courbe de f entre a et x.

1 - Montrer que $\mathcal{A}$ définit une fonction dérivable sur $[a, b]$, avec $\mathcal{A}'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

2 - En déduire que $\mathcal{A}(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Exercice 4. *Deuxième formule de la moyenne.* On se place dans les conditions de l'énoncé de la deuxième formule de la moyenne. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les notations $h_n = \dfrac{b-a}{n}$ et $x_k = a + kh_n$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. On pose:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)g(x_k)dt\,.$$

1 - Pour tout $x \in [a,b]$ on pose $A(x) = \displaystyle\int_a^x |f(t)|dt$.

(a) Montrer que A est continue sur $[a,b]$.
Indication : On utilisera le fait que f est Riemann intégrable, donc bornée.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait:

$$\forall x \in [a, b-h_n] \quad , \quad |A(x+h_n) - A(x)| < \varepsilon\,.$$

Indication : A est continue sur $[a,b]$, donc uniformément continue sur cet intervalle.

(c) En déduire que la suite de terme général $a_n = \sup\limits_{x\in[a,b-h_n]} (A(x+h_n) - A(x))$ converge vers 0.

2 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t)|\,(g(x_k) - g(t))\,dt\,.$$

(b) En déduire:

$$\left| R_n - \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_k) - g(x_{k+1}))\,(A(x_{k+1}) - A(x_k))\ .$$

(c) En déduire que la suite (R_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$.
*Indication: utiliser **1 -(c)**.*

3 - Pour tout $x \in [a,b]$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt\,.$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a l'égalité:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(g(x_k) - g(x_{k+1})\right) F(x_{k+1}) + g(b)F(b)\,.$$

(b) On note $m = \inf_{x\in[a,b]} F(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} F(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g(a)m \leqslant R_n \leqslant g(a)M\,,$$

(c) En déduire l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$g(a)F(c) = \int_a^b f(t)g(t)dt\,.$$

Exercice 5. *Intégrales de Wallis (extrait du concours 2009).*

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$.

1 - Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

Indication: on pourra, par exemple, utiliser la changement de variables $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.

2 - Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.
Indication: pour la décroissance, on pourra comparer les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$ *et* $x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. *Pour la stricte décroissance, on pourra raisonner par l'absurde.*

3 - A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $n \geqslant 0$, on a:

$$W_{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) W_n\,.$$

4 - En déduire que, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a:

$$\begin{cases} W_{2p} & = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2} \\ W_{2p+1} & = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

5 - Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a:

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}\,.$$

Indication : on pourra montrer que la suite de terme général $(n+1)W_nW_{n+1}$ *est constante.*

6 - Prouver que, pour tout $n \geqslant 0$, on a:

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1\,,$$

et en déduire que $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} W_{n+1}$.
*Indication : on pourra utiliser les questions **2** et **3**.*

7 - Montrer finalement que $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.