

Fonctions de plusieurs variables

Notions abordées

- Limite, continuité de fonctions réelles $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.
 - Théorème du point fixe.
 - Dérivée partielle, dérivée directionnelle et différentiabilité.
 - Fonctions de classe C^1 - Caractérisation via les dérivées partielles.
 - Fonctions de classe C^2 et dérivées d'ordre supérieur.
 - Cas des fonctions à valeurs réelles, théorème de Schwarz.
 - Gradient, Jacobienne, Hessienne.
 - Formules de Taylor.
 - Extrema, point critique.
 - Conditions du premier et second ordre.
 - Cas particulier de la dimension 2.
-
-

Dans toute la suite, p et q désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^p,$$

avec des notations similaires pour $\mathbb{R}^q$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera sans distinction $\|\cdot\|$ les normes associées sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, afin d'alléger les notations.

1 Notions de base

Dans cette partie, Ω désigne un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p$.

1.1 Limite et continuité

Définition 1.1: Limite

On dit qu'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, définie au voisinage de $x_0 \in \Omega$ admet pour **limite** ℓ en x_0 si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \|x - x_0\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Remarque 1.1. Cette définition ne dépend pas de la norme considérée. En effet, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Définition 1.2: Continuité

On dit qu'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, définie au voisinage de x_0 est **continue** en x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

De manière analogue au cas des fonctions réelles, la caractérisation séquentielle de la continuité s'étend au cas des fonctions à plusieurs variables:

Proposition 1.1

Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, définie au voisinage de x_0 est continue en x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω convergeant vers x_0 , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Exemple 1.1.

- 1 - Montrer qu'une fonction constante $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
- 2 - Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = x$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est continue.
- 3 - Montrer que l'application $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$.

A titre d'exercice, on pourra démontrer la généralisation du théorème du point fixe de Picard, vue dans la fiche 1 (on admettra l'existence, reposant sur la notion de suite de Cauchy et ne figurant pas explicitement au programme du concours):

Théorème 1.1: Théorème du point fixe.

Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}^p$ et f une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$ (i.e. $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall x, y \in F$). Alors f admet un unique point fixe α dans F . De plus, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ converge vers α , et on a:

$$\|x_n - \alpha\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_1 - \alpha\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Dérivées partielles, différentiabilité

Définition 1.3: Dérivées partielles

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. Pour $i = 1, \dots, p$, on appelle *dérivée partielle de f* par rapport à x_i en $a = (a_1, \dots, a_p)$ et on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la quantité suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{x_i - a_i}.$$

Exemple 1.2.

1 - Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f : (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R} \quad , \quad g : (x, y) \mapsto x + 2y \in \mathbb{R} \quad , \quad h : (x, y) \mapsto x + 2xy \in \mathbb{R}.$$

2 - Considérer l'Exemple 1.1(3 -) de la partie précédente, et montrer l'existence des dérivées partielles en x et y .

Remarque 1.2. Cette notion s'étend au cas de fonctions $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ en notant $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T$, $\forall x \in \Omega$ et en considérant les dérivées partielles des fonctions $f_j, j = 1, \dots, q$

Comme nous venons de le voir, une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point sans pour autant être continue en ce point. On introduit alors la notion de différentiabilité, plus forte et garantissant la continuité de la fonction au point considéré:

Définition 1.4: Différentiabilité

On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est *différentiable en un point a* de Ω s'il existe une application linéaire $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, notée $d_a f$, telle que

$$f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Exemple 1.3.

- 1 - Une application constante est différentiable en tout point, et sa différentielle est nulle.
- 2 - Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a si et seulement si elle est différentiable en a , et dans ce cas $d_a f : h \rightarrow hf'(a)$.
- 3 - Une application linéaire $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, et admet $d_a L = L$ pour différentielle.

Proposition 1.2

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Définition 1.5: Dérivée directionnelle

Soit $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. On dit que f admet une **dérivée en a suivant v** si l'application $\varphi : t \rightarrow f(a + tv)$ est dérivable en 0. La quantité $\varphi'(0)$ est alors appelée dérivée directionnelle de f en a suivant v .

Exemple 1.4.

- 1 - Montrer qu'une fonction différentiable en a admet des dérivées selon toute direction $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.
- 2 - Montrer que la fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

admet des dérivées selon tout vecteur en tout point mais n'est pas continue.

Définition 1.6: Différentielle

On dit que l'application f est **différentiable** sur Ω si elle est différentiable en tout point de Ω . Dans ce cas, on appelle différentielle de f l'application

$$\begin{aligned} df : \Omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\Omega, \Omega) \\ a &\longmapsto d_a f. \end{aligned}$$

Si de plus df est continue, on dit que f est continûment différentiable, ou encore de classe $\mathcal{C}^1$.

Le lien entre les notions de différentiabilité et les dérivées partielles se fait à travers les propositions suivantes, que l'on pourra démontrer à titre d'exercice:

Proposition 1.3

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Si f est différentiable en $a \in \Omega$, alors f admet des dérivées partielles en a par rapport à x_i pour tout $i = 1, \dots, p$, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_a f(e_i),$$

où e_i est le i – ème vecteur de la base canonique.

Dem: Indication : pour l'existence, utiliser la dérivée directionnelle; puis appliquer $d_a f$ à un vecteur décomposé sur la base canonique.

□

Proposition 1.4

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, admettant des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables en tout point de Ω . Si ces dérivées partielles sont continues en un point $a \in \Omega$, alors f est différentiable en a et on a :

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i,$$

où $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right)^T$ est le gradient de f en a .

Dem: Indication : se placer dans le cadre d'une fonction de deux variables. En notant $a = (a_1, a_2)$, on pourra écrire $f(x, y) - f(a_1, a_2) = f(x, y) - f(x, a_2) + f(x, a_2) - f(a_1, a_2)$ et invoquer les théorème des accroissements finis.

□

Le résultat précédent admet la généralisation suivante:

Proposition 1.5

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, admettant des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables en tout point de Ω . Si ces dérivées partielles sont continues en un point $a \in \Omega$, alors f est différentiable en a et on a :

$$d_a f(h) = Jf(a).h = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(a), h \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_q(a), h \rangle \end{pmatrix},$$

$$\text{où } Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix} \text{ est la } \textbf{Jacobienne} \text{ de } f \text{ au point } a.$$

2 Théorème et inégalité des accroissements finis

Dans cette partie, $\mathcal{O}$ désigne ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$.

2.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.1: Théorème des accroissements finis.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathcal{O}$. Alors, pour tout couple (a, b) de points distincts de $\mathcal{O}$, il existe un point $c \in]a, b[$ que :

$$f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b - a \rangle = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i).$$

Pour démontrer ce résultat, on suppose connu le théorème des accroissements finis pour les fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(a + t(b - a)). \end{aligned}$$

1 - Montrer que φ est continue et dérivable sur $[0, 1]$, avec

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b - a))(b_i - a_i), \quad \forall t \in [0, 1].$$

2 - Conclure.

Le corollaire suivant permet de caractériser les fonctions constantes de classe $\mathcal{C}^1$:

Proposition 2.1

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$, et $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ différentiable sur $\mathcal{O}$. Alors f est constante si et seulement si la matrice jacobienne de f est nulle en tout point de $\mathcal{O}$.

2.2 Inégalité des accroissements finis

2.2.1 Corollaires du théorème des accroissements finis

Définition 2.1: Norme d'une application linéaire

On considère U et V deux espaces vectoriels normés, et on note $\mathcal{L}(U, V)$ l'espace des applications linéaires de U dans V . On définit la norme d'une application linéaire $L \in \mathcal{L}(U, V)$ comme suit:

$$|||L||| = \sup_{x \in U \setminus \{0\}} \frac{\|L(x)\|_V}{\|x\|_U}.$$

Le résultat suivant est un corollaire direct du théorème des accroissements finis vu précédemment.

Théorème 2.2

Soit f une fonction à valeurs réelles différentiable sur un ouvert convexe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|||d_c f||| < \lambda$ pour tout $c \in \mathcal{O}$. Alors, pour tout couple (a, b) de points distincts de $\mathcal{O}$, on a:

$$|f(b) - f(a)| \leq \lambda \|b - a\|.$$

Ce résultat peut se généraliser sous la forme ci-dessous. Ce théorème fournit une première version de l'inégalité des accroissements finis dans le cadre général des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$:

Théorème 2.3

Soit f une fonction différentiable sur un ouvert convexe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$, on ait $|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(c)| < \lambda$ pour tout $c \in \mathcal{O}$. Alors, pour tout couple (a, b) de points distincts de $\mathcal{O}$, on a:

$$\|f(b) - f(a)\|_\infty \leq \lambda \|b - a\|_1.$$

2.2.2 Démonstration directe dans le cas général

Théorème 2.4: Inégalité des accroissements finis.

Soit f une fonction à valeurs réelles différentiable sur un ouvert convexe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$. On a:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{c \in [a, b]} \|d_c f\|.$$

Pour démontrer ce résultat, on définit la fonction:

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ t &\longmapsto f(a + t(b - a)). \end{aligned}$$

1 - Montrer que g est différentiable sur $[0, 1]$, et que l'on a, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$g'(t) = d_{a+t(b-a)} f(b - a).$$

2 - On note $M = \|b - a\| \sup_{c \in [a, b]} \|d_c f\|$. Montrer que $\|g'(t)\| \leq M$.

3 - Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'ensemble

$$I_\varepsilon = \{t \in [0, 1], \|g(t) - g(0)\| \leq t(M + \varepsilon)\}.$$

Montrer que $s_\varepsilon = \sup(I_\varepsilon)$ est bien défini et que c'est un maximum.

4 - On suppose que $s_\varepsilon < 1$.

i.) Montrer que pour $h > 0$ assez petit, on a:

$$\|g(s_\varepsilon + h) - g(s_\varepsilon) - hg'(s_\varepsilon)\| \leq h\varepsilon.$$

ii.) En déduire que $s_\varepsilon + h \in I_\varepsilon$.

5 - Conclure.

3 Dérivées d'ordre supérieur - Formules de Taylor - Extrema

3.1 Dérivées d'ordre supérieur

3.1.1 Généralités

Définition 3.1: Fonction deux fois différentiable.

On dit qu'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est deux fois différentiable sur Ω si elle est différentiable sur Ω et si $df : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ est différentiable sur Ω . On note alors $d^2 f = d(df)$.

Remarque 3.1. Sous réserve d'existence, d^2f est donc une application linéaire continue $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$, que l'on peut identifier à une forme bilinéaire.

Définition 3.2: Fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

On dit qu'une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si elle est deux fois différentiable sur Ω et si d^2f est continue sur Ω .

Remarque 3.2.

i) Par récurrence, on peut définir de manière similaire les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier $k \geq 1$, ainsi que les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

ii) Si f est différentiable sur Ω , on a $d_a f(h) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$ pour tout $a \in \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^p$.

Dire que f est deux fois différentiable équivaut à dire que chaque dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est différentiable sur Ω . Les dérivées partielles associées aux $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, p$ sont les dérivées partielles d'ordre 2 de f , et se notent

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Le résultat suivant fournit une caractérisation pratique des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ au moyen des dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

Proposition 3.1

Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω si et seulement si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en tout point de Ω , et si ses dérivées partielles sont toutes continues sur Ω .

3.1.2 Fonctions à valeurs réelles

Proposition 3.2

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable sur Ω , on a, pour tout $a \in \Omega$ et tout $h, k \in \mathbb{R}^p$:

$$d_a^2 f(h, k) = \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_i k_j.$$

Le résultat suivant garantit que la forme bilinéaire associée à la différentielle d'ordre deux est symétrique. En d'autres termes:

Théorème 3.1: Théorème de Schwarz.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur Ω . Alors toutes les dérivées partielles d'ordre 2 sont définies et on a :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Définition 3.3

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre 2 sont définies en $a \in \Omega$. On appelle **matrice hessienne** de f en a la matrice :

$$H_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.3. $H_a f$ n'est autre que la matrice associée à la forme bilinéaire $d_a^2 f$:

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^p, d_a^2 f(h, k) = {}^t h \cdot H_a f \cdot k.$$

Cette matrice est symétrique, en vertu du théorème de Schwarz.

3.1.3 Formules de Taylor

Les résultats suivants sont une généralisation des formules connues pour les fonctions réelles à valeur dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2: Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $(a, h) \in \Omega^2$ tels que $[a, a + h] \subset \Omega$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. On a :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{d_a^j f(h, \dots, h)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d_{a+th}^{k+1} f(h, \dots, h) dt.$$

Théorème 3.3: Formule de Taylor-Lagrange.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $(a, h) \in \Omega^2$ tels que $[a, a + h] \subset \Omega$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $k + 1$ fois différentiable sur Ω . Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{d_a^j f(h, \dots, h)}{j!} + \frac{d_{a+\theta h}^{k+1} f(h, \dots, h)}{(k+1)!}.$$

Théorème 3.4: Formule de Taylor-Young.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $(a, h) \in \Omega^2$ tels que $[a, a + h] \subset \Omega$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, k fois différentiable sur Ω . On a:

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{d_a^j f(h, \dots, h)}{j!} + o(\|h\|^k).$$

Exemple 3.1. Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor-Young s'écrit:

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i} f(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(a) h_i h_j + o(\|h\|^2),$$

ce qui peut se réécrire:

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2),$$

où $Q_a f(h) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} f(a) h_i h_j = {}^T h \cdot H_a f \cdot h$ désigne la forme quadratique associée à la hessienne de f en a .

3.2 Extrema

3.2.1 Premières définitions

Définition 3.4: Minimum local et global.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet un **minimum local** en $a \in \Omega$ s'il existe un voisinage V de a tel que:

$$\forall x \in V, f(x) \leq f(a).$$

On dira que ce minimum est **global** si

$$\forall x \in \Omega, f(x) \leq f(a).$$

Un minimum est dit strict si les inégalités sont strictes, c'est à dire si $f(x) < f(a)$ pour $x \neq a$.

Remarque 3.4.

- i) L'existence d'un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$ équivaut à l'existence d'un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in \Omega, \|x - a\| < r \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.
- ii) Les notions de maximum local et global peuvent se définir de manière similaire, ou bien en considérant la fonction $-f$.

Définition 3.5: Point critique.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que a est un *point critique* de f si toutes les dérivées partielles de f sont nulles en a .

3.2.2 Extrema et différentielle

Proposition 3.3: Condition nécessaire d'extremalité locale.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si f admet un extremum local en $a \in \Omega$, alors a est un point critique de Ω .

Dem: Indication : pour $h > 0$ suffisamment petit, on pourra considérer la fonction réelle φ définie sur $] -1, 1[$ par $\varphi(t) = f(a + th)$ pour tout $t \in] -1, 1[$.

□

Remarque 3.5. Cette condition n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'un extremum local.

3.2.3 Extrema et différentielle seconde

Théorème 3.5

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

- i) Si f admet un minimum local en un point $a \in \Omega$, alors $d_a^2 f$ est positive (i.e. la forme bilinéaire associée à la hessienne, définie par $Q_a f(h) = {}^T h \cdot H_a f \cdot h$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ vérifie $Q_a f(h) \geq 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p$.)
- ii) Si $Q_a f$ est définie positive (i.e. $Q_a f(h) > 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$), alors f admet un minimum local strict en a .

Dem: Indications

- i) Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, considérer la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a + th)$. Montrer que $g''(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + th) h_i h_j$, et utiliser la condition nécessaire du second ordre pour l'existence d'un minimum pour les fonctions de la variable réelle.
- ii) On admettra qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $Q_a f(h) > \alpha \|h\|^2$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ (ce résultat peut se démontrer par des arguments de compacité, ou bien d'algèbre linéaire). Utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 vue précédemment.

□

Sous les mêmes conditions, le cas particulier de la dimension 2 se formule de la façon suivante, avec les notations de Monge:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad , \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad , \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) .$$

Théorème 3.6

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $a \in \Omega$ un point critique de f

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f admet un minimum local en a .
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local en a .
- Si $rt - s^2 < 0$, alors f n'admet pas d'extremum en a .
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.