Séries entières - Fonctions développables en série entière

Notions abordées

- *Domaine de convergence et rayon de convergence des séries entières*
- *Critères de d'Alembert de de Cauchy*
- *Opérations sur les séries entières*
- *Fonctions développables en séries entières : notions de base, résultats d'existence*
- *Applications : fonctions trigonométriques et exponentielle, logarithme, résolution d'équations différentielles, somme des inverses des carrés*

1 Séries entières

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, avec les conventions $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$.
Dans ce qui suit, pour tout $r > 0$, on note $D_r = \{z \in \mathbb{K}\,,\ |z| < r\}$.

1.1 Rappels de base

1.1.1 Premières définitions - Exemples

Définition 1.1

On appelle ***série entière*** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $z \in \mathbb{K}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1.2

On appelle ***domaine de convergence*** l'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments z de $\mathbb{K}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ converge. On définit alors la ***fonction somme***:

$$\forall z \in \mathcal{D} \quad , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \, .$$

Remarque 1.1. $\mathcal{D}$ est toujours non vide car il contient 0

Exemple 1.1.
• Les polynômes sont des cas particuliers de séries entières, pour lesquels la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. Leur domaine de convergence est $\mathcal{D} = \mathbb{K}$.
• La série entière $\sum z^n$ admet $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{K} \, , \, |z| < 1\}$ pour domaine de convergence, et on a $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.

1.1.2 Rayon de convergence

Théorème 1.1: Théorème d'Abel

Soit $r > 0$. Si la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in D_r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Dem: *Soit $z \in D_r$ et supposons la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée par $M > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n z^n| = |a_n r^n| q^n \leqslant M q^n$, où l'on a posé $q = |z/r|$. En notant alors que $0 < q < 1$, la série de terme général q^n converge. On en déduit que la série de terme général $|a_n z^n|$ converge. En d'autres termes, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente (donc converge).*

□

Corollaire 1.1

L'ensemble

$$\mathcal{B} = \{r \in \mathbb{R}_+ \, , \, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \}$$

est soit un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, soit réduit à $\{0\}$.

Dem: *Il est immédiat que $\mathcal{B}$ contient toujours 0. Si $\mathcal{B} = \{0\}$, il n'y a rien à démontrer. Considérons donc le cas où $\mathcal{B} \neq \{0\}$, et montrons que $\mathcal{B}$ est un intervalle.*
Soit $r > 0$ tel que $r \in \mathcal{B}$. La suite $(a_n r^n)$ est donc bornée. Le théorème précédent implique que pour tout réel s vérifiant $0 \leqslant s < r$, la série $\sum a_n s^n$ converge. En particulier, ceci garantit que $(a_n s^n)$ est bornée, et que donc $s \in \mathcal{B}$. Donc, pour tout $r \in \mathcal{B}$, l'intervalle $[0, r]$ est inclus dans $\mathcal{B}$, ce qui garantit que $\mathcal{B}$ est un intervalle.

$\square$

Définition 1.3

Le ***rayon de convergence*** d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le réel

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \ , \ (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée } \right\} .$$

$\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{K} \, , \, |z| < R\}$ est appelé le ***disque de convergence***.

Théorème 1.2: Théorème d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R.

- si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge.
- si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.
- si $|z| = R$, on ne peut rien conclure.

Dem: *Si $|z| < R$, on considère $r > 0$ tel que $|z| < r < R$. On a $z \in D_r$ et $(a_n r^n)$ est bornée. Le Théorème d'Abel permet de conclure.*
Si $|z| > R$, la suite $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée. Ainsi, le terme général de la série $\sum a_n z^n$ ne tend pas vers 0 : cette série ne peut converger.

$\square$

1.1.3 Résultats de convergence

Proposition 1.1: Convergence uniforme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence. Plus précisément, pour tout réel r tel que $0 < r < R$, on a:

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists N \in \mathbb{N} \, , \, \forall n \geqslant N \, , \, \forall z \in \mathbb{K} \, , \, |z| \leqslant r \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right| < \varepsilon \, .$$

Proposition 1.2: Critère de d'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors son rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Dem: *On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ non nul:* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \ell|z|$. *On conclut avec le critère d'Abel pour les séries numériques: si $\ell|z| < 1$, alors la série $\sum |a_n z^n|$ converge (et on a convergence absolue de $\sum a_n z^n$) , et si $\ell|z| > 1$, la suite $(|a_n z^n|)$ n'est pas bornée, ce qui proscrit la convergence de $\sum a_n z^n$.*

□

Application 1.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n!}{(n+1)^n} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{(1+1/n)^n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (1+1/n)^{-n} = 1/e$. *Ainsi $R = e$.*

Proposition 1.3: Critère de Cauchy

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors son rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Dem: *Ce résultat se démontre de façon similaire au critère de d'Alembert.*

□

Application 1.2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{1}{n^{\ln n}} z^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \exp\left(\frac{\ln(|a_n|)}{n}\right) = \exp\left(\frac{\ln(1/n^{\ln(n)})}{n}\right) = \exp\left(-\frac{\ln(n^{\ln(n)})}{n}\right) = \exp\left(-\frac{\ln(n)^2}{n}\right)$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)^2}{n} = 0$, *donc on obtient* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, *et ainsi $R = 1$.*

1.1.4 Opérations sur les séries

Théorème 1.3: Somme

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

- Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a = R_b$, alors $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Pour tout $z \in \mathbb{K}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Théorème 1.4: Multiplication scalaire

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et λ un réel non nul. Alors la série $\sum (\lambda a_n) z^n$ admet R pour rayon de convergence.

Théorème 1.5: Produit

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R le rayon de convergence de la série somme produit définie par $\sum c_n z^n$, où l'on a posé $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in \mathbb{K}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) .$$

1.2 Exercices d'application

Exercice 1. *Calcul de rayon de convergence.* Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

1 - $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! z^n$ **2 -** $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n$ **3 -** $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} z^n$ **4 -** $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) z^n$

Exercice 2. *Etude au bord.*

1 - Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

2 - Etudier la convergence en $-R$ et R.

Exercice 3. *Relations entre rayons de convergence. Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose qu'elle converge pour $z = 3i - 4$ et qu'elle diverge pour $z = 5$. Que peut-on dire sur son rayon de convergence ?

2 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha a_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

(a) Montrer que $R_a \geqslant R_b$.

(b) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R_a$. Montrer que la suite $(n^\alpha a_n r^n)$ est bornée. En déduire que $R_a = R_b$.

3 - On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 4. *Convergence d'une somme.*

1 - On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum a_n z^{2n}$. et $\sum a_n z^{2n+1}$.

2 - On considère la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = a_{2p}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum u_p z^p$. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_{2p} z^{2p}$.

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $v_p = a_{2p+1}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum v_p z^p$. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$.

(c) En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

2 Fonctions développables en série entière

2.1 Résultats de base

Définition 2.1

Soit $R > 0$ et f une fonction de $\mathcal{D}_R$ dans $\mathbb{K}$. On dit que f est ***développable en série entière (DSE)*** sur $\mathcal{D}_R$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, convergente sur $\mathcal{D}_R$, telle que

$$\forall z \in \mathcal{D}_R \ , \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 2.1. La fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ pour tout $z \in]-1, 1[$ est développable en série entière sur cet intervalle. On a:

$$\forall\, z \in]-1, 1[\ , \ f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Théorème 2.1

Soit f une fonction réelle développable en série entière sur $]-R, R[$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in]-R, R[$. On a les résultats suivants:

- f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$. Sa dérivée est donnée par:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

- La primitive F de f qui s'annule en 0 converge sur $]-R, R[$ et est donnée par:

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Théorème 2.2

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$. Alors
$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n \text{ avec } a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}\,.$$
La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ est appelée ***développement de Taylor*** de f en 0.

Remarque 2.1. On déduit de ce théorème l'unicité d'un développement série entière : les a_n sont déterminés par $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. On en déduit la propriété suivante:

Corollaire 2.1

On considère une fonction f développable en série entière sur $]-R,R[$. Alors f est une fonction paire (resp. impaire) si et seulement si les a_n de rang impair (resp. pair) sont nuls.

Dem: *En effet, considérons une fonction f paire DSE sur $]-R,R[$. La fonction g définie par $g(z)=f(z)-f(-z)$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, et on a $g(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$. Or f étant paire, g n'est autre que la fonction nulle. On en déduit que $a_{2n+1}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ par unicité du développement. Même raisonnement si f est impaire.*

□

Remarque 2.2. Ce théorème ne fournit pas une condition suffisante : il se peut qu'une fonction admette un développement de Taylor en 0 sans pour autant admettre un développement en série entière sur un intervalle ouvert contenant 0. Un contrexemple classique est fourni par la fonction:
$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\,,\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

En effet, toutes les dérivées de f sont continues en 0, et valent 0. La série de Taylor associée à f est donc nulle. Pour autant, f n'est pas identiquement nulle.

2.2 Théorème fondamental d'existence

Théorème 2.3: Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-R, R[$. Alors, pour tout $z \in]-R, R[$ on a

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + r_n(z)$$

avec

$$r_n(z) = \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

Théorème 2.4

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]-R, R[$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in]-R, R[$:

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant M\lambda^n\,.$$

Alors f est développable en série entière sur $]-R, R[$, et on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\,.$$

Application 2.1.

1 - Montrer que la fonction exp est développable en série entière sur tout intervalle de la forme $]-R, R[$, avec:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

La fonction $\exp$ *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* $]-R, R[$, *avec* $\exp^{(n)} = \exp$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *La fonction* $\exp$ *ainsi que toutes ses dérivées sont donc bornées et on a, pour tout* $x \in]-R, R[$*:*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

2 - Montrer que pour tout x et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire que la fonction sin est développable en série entière sur tout intervalle de la forme $]-R, R[$, avec:

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}\,.$$

La raisonnement s'appuie sur un premier résultat utile : $\sin^{(n)}(x) = \sin(x+n\pi/2)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, qui s'établit par récurrence. On en déduit que* sin *et toutes ses dérivées sont bornées, et pour tout* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k!} x^k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} .$$

3 - Par un raisonnement analogue, montrer que la fonction cos est développable en série entière sur tout intervalle de la forme $]-R,R[$, avec:

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} .$$

Ce résultat s'établit par un procédé analogue au précédent, en s'appuyant sur la formule $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

2.3 Exercices d'application

Exercice 5. *Autour de la fonction exponentielle.*
*Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - Utiliser le développement en série entière de l'exponentielle pour montrer l'égalité suivante:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ , \ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \ .$$

2 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\lambda^n}{n!} x^n$ est infini.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n$. Montrer que $f'(x) = \lambda f(x)$.

3 - Montrer que pour tout x réel, on a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = (x^2 + x)\exp(x) \, .$$

Exercice 6. *Résolution d'équations différentielles.*

*Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

(b) Chercher une solution de l'équation précédente sous forme de série entière, en précisant son rayon de convergence.

(c) En déduire le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$ sur $]-1,1[$.

(d) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \cdots$$

2 - Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant les séries entières:

$$\begin{cases} y'' - xy = 0\,, \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

3 - On considère la fonction f définie par $f(x) = ch(x)\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie A

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1-i)x} + e^{(-1+i)x}\right)$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+i)^n + (1-i)^n + (-1-i)^n + (-1+i)^n = 4(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,.$$

(c) En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!} x^{4q}\,.$$

Partie B

(a) En revenant à l'expression analytique de f, montrer que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

(b) Retrouver le résultat de la question **(c)** de la partie précédente en résolvant cette équation avec les séries entières.

Exercice 7. *Somme des inverses des carrés.*

1 - Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}\,.$$

Indication: on pourra utiliser le fait que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le résultat **1(d)** de l'**exercice 2**.

2 - Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}$ converge normalement sur $[-1,1]$.

Indication: on admettra que $\dfrac{1}{2n+1} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

(a) Utiliser le développement en série entière de la fonction arcsin pour montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(t))dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\,.$$

Indication: on admettra que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)dt = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 8. *Autour du logarithme.*

1 - Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ est développable en série entière sur cet intervalle.

Indication: considérer la série géométrique $\sum(-1)^n x^n$ et utiliser le théorème d'intégration.

2 - **(a)** Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$.

(b) Montrer que la série précédente converge uniformément sur $[0,1]$.

(c) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,.$$

(d) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \frac{\pi^2}{12}$.

Correction des exercices

Exercice 1. *Calcul de rayon de convergence.* Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

1 - $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n! z^n$ **2 -** $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n$ **3 -** $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n} z^n$ **4 -** $\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(n) z^n$

1 - *On a* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = n+1$. *Le critère de d'Alembert permet de conclure que* $R = 0$.

2 - *On a* $\sqrt[n]{|a_n|} = n$. *Le critère de Cauchy donne alors* $R = 0$.

3 - *On a* $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. *Ainsi :*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = (2n+2)(2n+1)\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}.$$

On en déduit $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4$, *et par suite* $R = 1/4$.

4 - *On peut revenir à la définition du rayon de convergence :* $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. *Si* $r > 1$, *la suite de terme général* $\sin(n)r^n$ *n'est pas bornée, donc* $R \leqslant 1$. *Si* $r < 1$, *la suite de terme général* $\sin(n)r^n$ *tend vers 0 (elle est donc bornée), donc* $R \geqslant 1$. *On en déduit* $R = 1$.

Exercice 2. *Etude au bord.*

1 - Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

Soit $r < 1$. *On a* $-1 < -r^n < \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) r^n < r^n < 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *On en déduit que la suite de terme général* $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) r^n$ *est bornée. Par suite,* $R \geqslant 1$.

Soit $r > 1$. *Rappelons que* $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *d'où l'on tire* $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, *et par suite* $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) r^n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{r^n}{\sqrt{n}}$. *Le critère de comparaison des suites de référence nous donne que* $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{\sqrt{n}} = +\infty$. *On en déduit que la suite* $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) r^n\right)$ *n'est pas bornée, et donc* $R \geqslant 1$.

Au final, $R = 1$.

2 - Etudier la convergence en $-R$ et R.

On étudie le cas $z = 1$. Rappelons que $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *et que la série de terme général* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge. On en déduit que la série* $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ *diverge.*
Considérons le cas $z = -1$. On étudie donc la convergence de la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a* $0 \leqslant \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sin(1)$. *Il s'agit donc d'une série alternée. La fonction* $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ *tend vers 0 en décroissant lorsque x tend vers $+\infty$. On obtient alors la convergence avec le théorème de convergence des séries alternées.*

Exercice 3. *Relations entre rayons de convergence. Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose qu'elle converge pour $z = 3i - 4$ et qu'elle diverge pour $z = 5$. Que peut-on dire sur son rayon de convergence ?

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge, et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge.
Pour $z = 3i - 4$ la série converge. On a $z = 5$, donc $R \geqslant 5$ en vertu de ce qui précède. D'autre part, la série diverge pour $z = 5$, donc le rayon de convergence ne peut être supérieur à 5.
On en déduit que $R = 5$.

2 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha a_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

(a) Montrer que $R_a \geqslant R_b$.

Si $\alpha = 0$, le résultat est immédiat.
Supposons $\alpha > 0$, et posons $b_n = n^\alpha a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Notons alors $\mathcal{B}_a := \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (a_n r^n) \text{est bornée}\}$, de sorte que $R_a = \sup \mathcal{B}_a$, et de même $\mathcal{B}_b := \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } (b_n r^n) \text{est bornée}\}$, de sorte que $R_b = \sup \mathcal{B}_b$.
On a $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, on a $(b_n r^n)$ bornée $\Rightarrow$ $(a_n r^n)$ bornée. Ainsi $\mathcal{B}_b \subset \mathcal{B}_a$, ce qui implique $R_b \leqslant R_a$.

(b) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R_a$. Montrer que la suite $(n^\alpha a_n r^n)$ est bornée. En déduire que $R_a = R_b$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $r < rho < R_a$. On a:

$$b_n r^n = n^\alpha a_n r^n = n^\alpha a_n \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$
$$a_n \rho^n n^\alpha q^n ,$$

avec $q = r/\rho$ et $|q| < 1$. On a $\rho < R_a$, donc $(a_n\rho^n)$ est bornée, et $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha q^n = 0$. On en déduit que $(b_n r^n)$ est bornée, c'est à dire $r \in \mathcal{B}_b$ (et donc $r \leqslant R_b$). Ainsi, $\forall r < R_a$, on a $r \leqslant R_b$, ce qui implique $R_b \geqslant R_a$.
Au final, avec la question précédente, $R_a = R_b$.

3 - On considère une série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Notons S le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$. Soit $\rho \in [0, R[$. La suite $(a_n\rho^n)$ est bornée, et on a, pour tout $r \in \mathbb{R}$:

$$\frac{a_n}{n!} r^n = \frac{a_n}{n!}\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = a_n\rho^n \left(\frac{q^n}{n!}\right) , \tag{3}$$

où l'on a posé $q = r/\rho$. Par comparaison des suites de référence, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$, d'où l'on déduit que $\left(\frac{a_n}{n!} r^n\right)$ est bornée. Au final, $S = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tq } \frac{a_n}{n!}(r^n) \text{est bornée}\right\} = +\infty$.

Exercice 4. *Convergence d'une somme.*

1 - On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum a_n z^{2n}$. et $\sum a_n z^{2n+1}$.

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_n z^{2n} = \sum a_n (z^n)^2$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition de R, on a:
Si $|z|^2 < R$, c'est à dire$|z| < \sqrt{R}$, la série $\sum a_n (z^n)^2$ converge.
Si $|z|^2 > R$, c'est à dire$|z| > \sqrt{R}$, la série $\sum a_n (z^n)^2$ diverge.
On en déduit que $R' = \sqrt{R}$.
On obtient le même résultat pour la série $\sum a_n z^{2n+1}$ par un raisonnement analogue.

2 - On considère la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = a_{2p}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum u_p z^p$. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_{2p} z^{2p}$.

On note R_u le rayon de convergence de $\sum u_p z^p$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a:

$$u_p = a_{2p} = \left(1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p}\right)^{(2p)^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{2p}\right)^{2p}.$$

Or, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2p}\right) = e$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{u_p} = e^2$, et par suite $R_u = 1/e^2$.
D'après ce qui précède, le rayon de convergence de la série $\sum u_p z^{2p} = \sum a_{2p} z^{2p}$ est $\sqrt{R_u} = 1/e$.

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $v_p = a_{2p+1}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum v_p z^p$. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$.

On note R_v le rayon de convergence de $\sum v_p z^p$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} v_p = a_{2p+1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1}\right)^{(2p+1)^2} &= \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{4p^2+4p+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{2p+1} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{2p(2p+1)}. \\ &= \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2p+1} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{2p(2p+1)} \end{aligned}$$

Il vient:

$$\sqrt[p]{v_p} = \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2+1/p} \left[\left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{2p+1}\right]^2.$$

On a $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2p}{2p+1}\right)^{2+1/p} = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^{2p+1} = 1/e$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{v_p} = 1/e^2$.
Au final, $R_v = e^2$, et on en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum v_p z^{2p+1} = \sum a_{2p+1} z^{2p+1}$ est égal à $\sqrt{R_v} = e$.

(c) En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

D'après le théorème relatif à la somme de deux séries entières, on en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum u_p^{2p} + \sum v_p z^{2p+1}$ est $R = \min(e, 1/e) = 1/e$, et la décomposition $\sum a_n z^n = \sum a_{2p} z^{2p} + \sum a_{2p+1} z^{2p+1}$ a un sens pour tout $z \in D_r$.

Exercice 5. *Autour de la fonction exponentielle.*

*Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - Utiliser le développement en série entière de l'exponentielle pour montrer l'égalité suivante:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\ .$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. *On a* $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{a_n}$ *et* $\exp(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{y^k}{k!}}_{b_n}$. *Ainsi* $\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_n$ *avec:*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n\ .$$

On en déduit: $\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$.

2 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\lambda^n}{n!} x^n$ est infini.

Si $\lambda = 0$, *alors la série converge (seul le premier terme est non nul).*
Si $\lambda \neq 0$, *on a* $\frac{|\lambda|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|\lambda|^n} = \frac{|\lambda|}{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On déduit du critère de Cauchy que* $R = +\infty$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n$. Montrer que $f'(x) = \lambda f(x)$.

D'après le théorème de dérivation des séries entières, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} x^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n = \lambda f(x)\ .$$

3 - Montrer que pour tout x réel, on a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = (x^2 + x)\exp(x)\ .$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{n(n-1)}{n!} + \frac{n}{n!}\right] x^n = \sum_{n=1}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^{n+2}}{n!} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^{n+1}}{n!} \\
&= x^2 \sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!} + x \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} .
\end{aligned}$$

On reconnait dans le second membre les $N-2$ et $N-1$ premiers termes de la série entière exp*, de rayon de convergence infini. On peut donc passer à la limite $N \to +\infty$ dans les égalités précédentes, ce qui donne le résultat.*

Exercice 6. *Résolution d'équations différentielles.*
*Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \,, \\ y(0) = 1 \,. \end{cases} \tag{4}$$

On a bien $f(0) = 1^\alpha = 1$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. On a donc $(1+x)f'(x) = \alpha(1+x)^\alpha = \alpha(x)$.

(b) Chercher une solution de l'équation précédente sous forme de série entière, en précisant son rayon de convergence.

On cherche une solution de 4 développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R \geqslant 0$ (où R sera déterminé ultérieurement) : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Notons que pour tout $x \in]-R, R[$ on a $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, et:

$$\begin{aligned}
(1+x)f'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} n a_n (1+x) x^{n-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} n a_n x^n \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{k=1}^{+\infty} n a_n x^n
\end{aligned}$$

Remarquons que ces sommes sont toutes bien définies dans le rayon de convergence de f. On en déduit que

$$(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n\right) x^n \, .$$

On en déduit que $(n+1)a_{n+1} + na_n - \alpha a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire $a_{n+1} = \left(\dfrac{\alpha - n}{n+1}\right) a_n$. Par récurrence, on en déduit que:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{\alpha-(n-1)}{n}\right)\left(\frac{\alpha-(n-2)}{n-1}\right)\cdots\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\alpha a_0 \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} a_0 \, . \end{aligned}$$

Notons que $f(0) = 1$ donne $a_0 = 1$. Dans la suite, on notera $p_n(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha-(n-1))$. Il vient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = \dfrac{p_n(\alpha)}{n!}$ et $a_0 = 1$. Il reste à présent à déterminer le rayon de convergence de f.
Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $p_n(\alpha) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) = 0$ pour tout entier n tel que $n \geqslant \alpha+1$. f est alors un polynôme, et le rayon de convergence est donc infini.
Supposons $\alpha \notin \mathbb{N}$. On a

$$\left|\frac{p_{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}\frac{n!}{p_n(\alpha)}\right| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))} \times \frac{n!}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \, .$$

On en déduit $R = 1$. Par unicité des solutions de (4), on obtient donc:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n \, ,$$

cette égalité étant valable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, ou sur $]-1,1[$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$.

(c) En déduire le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$ sur $]-1,1[$.

On s'intéresse au cas $\alpha = 1/2$. Dans ce cas le rayon de convergence de f est $R = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} p_n(1/2) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(1 \times (1-2) \times (1-4) \times \cdots \times (1-2(n-1))\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\left(1 \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_n x^n \, ,$$

avec $u_n = \dfrac{1}{n!}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\left(1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \cdots$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} p_n(-1/2) &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(-1\times(-1-2)\times(-1-4)\times\cdots\times(-1-2(n-1))\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\left(1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{2\times 4\times\cdots\times 2n} = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{2^n n!} \\ &= \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}n!} \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, $(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_n x^n$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$ on a:

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\,.$$

2 - Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant les séries entières:

$$\begin{cases} y'' - xy = 0\,, \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{5}$$

On cherche une solution f DSE sur $]-R,R[$ avec $R>0$. Pour tout $x \in]-R,R[$, on a $xf(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n$, $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ et $f''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$. Par suite, la condition $f''-xf=0$ se réécrit $\sum_{k=1}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_{n-1})\right]x^n + 2a_2 = 0$. Remarquons alors que $f(0)=1 \Rightarrow a_0 = 1$, $f'(0)=0 \Rightarrow a_1 = 0$, et que les solutions de (5) vérifient $f''(0) = 0$, d'où l'on tire $a_2 = 0$. Par suite, en utilisant $a_{n+2} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$a_{3n+1} = 0 \quad , \quad a_{3n+2} = 0 \quad , \quad a_{3n} = \frac{1\times 4\times\cdots\times(3n-2)}{(3n)!}.$$

Au final, pour tout $x \in]-R, R[$:$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{3n}x^{3n} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_n(x^3)^n$, avec $b_n = a_{3n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $b_0 = 1$. On montre que $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1}/b_n = 0$, de sorte que le critère de Cauchy permet de conclure $R = +\infty$.

3 - On considère la fonction f définie par $f(x) = ch(x)\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie A

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1-i)x} + e^{(-1+i)x}\right)$.

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ et $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$. On en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\right).$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+i)^n + (1-i)^n + (-1-i)^n + (-1+i)^n = 4(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\lambda_n = (1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n$. En utilisant $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $-1+i = \sqrt{2}e^{3i\pi/4}$, on aboutit à un premier résultat intermédiaire: $\lambda_n = 2(\sqrt{2})^n\left(\cos(n\pi/4) + \cos(3n\pi/4)\right)$. On vérifie ensuite que $\cos(n\pi/4) + \cos(3n\pi/4) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

(c) En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!} x^{4q}.$$

En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n}{n!} x^n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{n!} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \cos(n\pi/4)\cos(n\pi/2)}{n!} x^n \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(\sqrt{2})^{2p}\cos(p\pi/2)}{(2p)!} x^{2p} \\
&= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^{4q}\cos(q\pi)}{(4q)!} x^{4q} = \sum_{q=0}^{+\infty} (-1)^q \frac{2^{2q}}{(4q)!} x^{4q}
\end{aligned}$$

Partie B

(a) En revenant à l'expression analytique de f, montrer que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

En calculant les dérivées successives de la fonction f définie par $f(x) = ch(x)\cos(x)$, on aboutit à $f^{(4)}(x) = -4\cosh(x)\cos(x)$, ce qui donne le résultat.

(b) Retrouver le résultat de la question **(c)** de la partie précédente en résolvant cette équation avec les séries entières.

On cherche des solutions paires sous forme de série entière: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$ avec $R > 0$, avec les conditions $f(0) = 1$ et $f''(0) = 0$. On a $f^{(4)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4}x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$. On en déduit qu'une fonction paire est solution de $f^{(4)} + 4f = 0$ avec les conditions $f(0) = 1$ et $f''(0) = 0$ si et seulement si $a_0 = 1$ ($f(0) = 1$), $a_1 = a_3 = 0$ (f est paire), $a_2 = 0$ ($f''(0) = 0$) et $(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+4} + 4a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 4$.
On en déduit que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $a_{4q+1} = a_{4q+2} = a_{4q+3} = 0$. D'autre part, $a_4 = -\frac{4}{4!}$, $a_8 = \frac{4^2}{8!}$. On vérifie par récurrence que $a_{4q} = (-1)^q \frac{4^q}{(4q)!}$, de sorte que l'on retombe sur le développement trouvé précédemment.

Exercice 7. *Somme des inverses des carrés.*

1 - Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}.$$

Indication: on pourra utiliser le fait que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le résultat **1(d)** de l'**exercice 2**.

On pose $g : t \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $f : t \in]-1, 1[\mapsto arcsin(t)$. On a $f'(t) = g(t)$ pour tout $t \in]-1, 1[$. La fonction f correspond à la primitive de g qui s'annule en 0. Rappelons alors que pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}$. D'après le théorème donnant la primitive d'une série entière, on sait qu'une primitive de g est donnée par la fonction G définie par

$$G(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \tag{6}$$

pour tout $t \in]-1, 1[$. Or $G(0) = 0$, de sorte que $G = f$, ce qui permet de conclure.

2 - Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}$ converge normalement sur $[-1,1]$.

Indication: on admettra que $\displaystyle\frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [-1,1] \mapsto \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n\|_\infty = p_n$, où $p_n = \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. D'autre part, $\lim_{n\to\infty} n^{3/2} p_n = 1$, ce qui signifie que $p_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{3/2}}$. Par suite, $\frac{1}{n^{3/2}}$ étant le terme général d'une série de Riemann convergente, on en déduit la convergence de la série de terme général p_n, c'est à dire la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $[-1,1]$. On notera S la somme de cette série. Les fonctions f_n, $n \in \mathbb{N}$ étant continues sur $[-1,1]$, on en déduit que S est continue, en particulier en 1. On a donc $\lim_{x\to 1^-} S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, et d'autre part $\lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} arcsin(x) = arcsin(1)$ d'après ce qui précède. Un raisonnement analogue en -1 permet d'étendre le résultat (6) à l'intervalle $[-1,1]$.

(a) Utiliser le développement en série entière de la fonction arcsin pour montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(t))dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Indication: on admettra que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)dt = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

On pose $g_n : t \in [0,\pi/2] \to f_n \circ \sin$. Par un raisonnement similaire au précédent, on montre que la série $\sum g_n$ converge normalement sur $[0,\pi/2]$. En particulier, $\sum g_n$ converge aussi uniformément et les fonctions g_n sont continues sur cet intervalle. Par conséquent, le théorème d'intégration des séries de fonctions s'applique et on a :

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n \sin^{2n+1}(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On a $\int_0^{\pi/2} arcsin(\sin(t))dt = \int_0^{\pi/2} tdt = \pi^2/8$. *On en tire immédiatement* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. *D'autre part, on a* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. *En posant* $s = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, *l'égalité précédente se réécrit* $s = \frac{1}{4}s + \frac{\pi^2}{8}$, *ce qui donne le résultat.*

Exercice 8. *Autour du logarithme.*

1 - Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ est développable en série entière sur cet intervalle.

Indication: considérer la série géométrique $\sum(-1)^n x^n$ et utiliser le théorème d'intégration.

Pour tout tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. *On en déduit que pour tout* $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. *Ainsi, la fonction* f *est DSE sur* $]-1,1[$. *Par le théorème d'intégration des séries entières, on en déduit que la fonction* G *définie pour* $x \in]-1,1[$ *par* $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *est la primitive de* f *vérifiant* $G(0) = 0$.

D'autre part, on a aussi, pour tout $x \in]-1,1[$, $\ln'(1+x) = \frac{1}{1+x}$ *et* $\ln(1) = 0$. *On en déduit que* $G(x) = \ln(1+x)$ *pour tout* $x \in]-1,1[$.

2 - (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$.

Découle directement de la question précédente : $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *pour* $x \in]0,1[$.

(b) Montrer que la série précédente converge uniformément sur $[0,1]$.

Pour $x \in [0,1]$ *fixé,* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ *est une série alternée dont la valeur absolue du terme général tend vers* 0 *en décroissant. On en déduit la convergence simple de la série sur* $[0,1]$ *dans un premier temps. On note ensuite, pour* $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k+1}$. *Le théorème des séries alternées donne alors que* $|R_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On en déduit que le reste d'ordre* n *de la série converge uniformément vers* 0, *et par suite la convergence uniforme de la série sur* $[0,1]$.

(c) Montrer que
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,.$$

La série $\sum f_n$ *converge uniformément, et les fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont continues. Le théorème de continuité des séries de fonctions permet d'obtenir la continuité de la somme* S *en* 0 *et en* 1*. On obtient donc:*

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$
$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1\,.$$

Ceci permet d'étendre l'égalité $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ *valable sur* $[0,1]$*. Par suite, par le théorème de permutation somme/intégrale:*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^1 t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,.$$

(d) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \frac{\pi^2}{12}$.

On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} + \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 0$ *si* k *est pair,* $2/k^2$ *si* k *est impair. On note* $s_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $s_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ *et* $s = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.
On a $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^2}{k^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^2}$, *c'est à dire* $\frac{\pi^2}{6} + s = 2\frac{\pi^2}{8}$, *d'où l'on tire le résultat.*