Séries entières - Fonctions développables en série entière

Notions abordées

- *Domaine de convergence et rayon de convergence des séries entières*
- *Critères de d'Alembert de de Cauchy*
- *Opérations sur les séries entières*
- *Fonctions développables en séries entières : notions de base, résultats d'existence*
- *Applications : fonctions trigonométriques et exponentielle, logarithme, résolution d'équations différentielles, somme des inverses des carrés*

1 Séries entières

Dans cette partie, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, avec les conventions $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{0} = +\infty$.
Dans ce qui suit, pour tout $r > 0$, on note $D_r = \{z \in \mathbb{K}\,,\ |z| < r\}$.

1.1 Rappels de base

1.1.1 Premières définitions - Exemples

Définition 1.1

On appelle ***série entière*** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $z \in \mathbb{K}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1.2

On appelle ***domaine de convergence*** l'ensemble $\mathcal{D}$ des éléments z de $\mathbb{K}$ tels que la série $\sum a_n z^n$ converge. On définit alors la ***fonction somme***:

$$\forall z \in \mathcal{D} \quad , \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \, .$$

Remarque 1.1. $\mathcal{D}$ est toujours non vide car il contient 0

Exemple 1.1.

• Les polynômes sont des cas particuliers de séries entières, pour lesquels la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang. Leur domaine de convergence est $\mathcal{D} = \mathbb{K}$.

• La série entière $\sum z^n$ admet $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{K} \, , \, |z| < 1\}$ pour domaine de convergence, et on a $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.

1.1.2 Rayon de convergence

Théorème 1.1: Théorème d'Abel

Soit $r > 0$. Si la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in D_r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Corollaire 1.1

L'ensemble

$$\mathcal{B} = \{r \in \mathbb{R}_+ \, , \, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \}$$

est soit un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0, soit réduit à $\{0\}$.

Définition 1.3

Le ***rayon de convergence*** d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le réel

$$R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \, , \, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \} \, .$$

$\mathcal{D}_R = \{z \in \mathbb{K} \, , \, |z| < R\}$ est appelé le ***disque de convergence***.

Théorème 1.2: Théorème d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R.

- si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge.
- si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.
- si $|z| = R$, on ne peut rien conclure.

1.1.3 Résultats de convergence

Proposition 1.1: Convergence uniforme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence. Plus précisément, pour tout réel r tel que $0 < r < R$, on a:

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant N\,,\ \forall z \in \mathbb{K}\,,\ |z| \leqslant r \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \right| < \varepsilon\,.$$

Proposition 1.2: Critère de d'Alembert

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors son rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Application 1.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$.

Proposition 1.3: Critère de Cauchy

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors son rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Application 1.2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{1}{n^{\ln n}} z^n$.

1.1.4 Opérations sur les séries

Théorème 1.3: Somme

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

- Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a = R_b$, alors $R \geqslant R_a$.

Pour tout $z \in \mathbb{K}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Théorème 1.4: Multiplication scalaire

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et λ un réel non nul. Alors la série $\sum (\lambda a_n) z^n$ admet R pour rayon de convergence.

Théorème 1.5: Produit

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R le rayon de convergence de la série somme produit définie par $\sum c_n z^n$, où l'on a posé $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $R \geqslant \min(R_a, R_b)$, et pour tout $z \in \mathbb{K}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) .$$

1.2 Exercices d'application

Exercice 1. *Calcul de rayon de convergence.* Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

1 - $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! z^n$ **2 -** $\sum_{n=0}^{+\infty} n^n z^n$ **3 -** $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} z^n$ **4 -** $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n) z^n$

Exercice 2. *Etude au bord.*

1 - Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

2 - Etudier la convergence en $-R$ et R.

Exercice 3. *Relations entre rayons de convergence. Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose qu'elle converge pour $z = 3i - 4$ et qu'elle diverge pour $z = 5$. Que peut-on dire sur son rayon de convergence ?

2 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On considère les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha a_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

(a) Montrer que $R_a \geqslant R_b$.

(b) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < R_a$. Montrer que la suite $(n^\alpha a_n r^n)$ est bornée. En déduire que $R_a = R_b$.

3 - On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$.

Exercice 4. *Convergence d'une somme.*

1 - On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum a_n z^{2n}$. et $\sum a_n z^{2n+1}$.

2 - On considère la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = a_{2p}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum u_p z^p$. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_{2p} z^{2p}$.

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $v_p = a_{2p+1}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum v_p z^p$. En déduire le rayon de convergence de la série $\sum a_{2p+1} z^{2p+1}$.

(c) En déduire le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

2 Fonctions développables en série entière

2.1 Résultats de base

Définition 2.1

Soit $R > 0$ et f une fonction de $\mathcal{D}_R$ dans $\mathbb{K}$. On dit que f est ***développable en série entière (DSE)*** sur $\mathcal{D}_R$ s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, convergente sur $\mathcal{D}_R$, telle que

$$\forall z \in \mathcal{D}_R \ , \ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Exemple 2.1. La fonction définie par $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ pour tout $z \in]-1, 1[$ est développable en série entière sur cet intervalle. On a:

$$\forall\, z \in]-1,1[\ , \ f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Théorème 2.1

Soit f une fonction réelle développable en série entière sur $]-R, R[$. On pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in]-R, R[$. On a les résultats suivants:

- f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$. Sa dérivée est donnée par:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

- La primitive F de f qui s'annule en 0 converge sur $]-R, R[$ et est donnée par:

$$F(z) = \int_0^z f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Théorème 2.2

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$. Alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ avec } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ est appelée ***développement de Taylor*** de f en 0.

Remarque 2.1. On déduit de ce théorème l'unicité d'un développement série entière : les a_n sont déterminés par $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. On en déduit la propriété suivante:

Corollaire 2.1

On considère une fonction f développable en série entière sur $]-R, R[$. Alors f est une fonction paire (resp. impaire) si et seulement si les a_n de rang impair (resp. pair) sont nuls.

Remarque 2.2. Ce théorème ne fournit pas une condition suffisante : il se peut qu'une fonction admette un développement de Taylor en 0 sans pour autant admettre un développement en série entière sur un intervalle ouvert contentant 0. Un contrexemple classique est fourni par la fonction:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.2 Théorème fondamental d'existence

Théorème 2.3: Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-R, R[$. Alors, pour tout $z \in]-R, R[$ on a

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + r_n(z)$$

avec

$$r_n(z) = \int_0^z \frac{(z-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

Théorème 2.4

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in]-R,R[$:

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant M\lambda^n \, .$$

Alors f est développable en série entière sur $]-R,R[$, et on a, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \, .$$

Application 2.1.

1 - Montrer que la fonction exp est développable en série entière sur tout intervalle de la forme $]-R,R[$, avec:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \, .$$

2 - Montrer que pour tout x et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire que la fonction sin est développable en série entière sur tout intervalle de la forme $]-R,R[$, avec:

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1} \, .$$

3 - Par un raisonnement analogue, montrer que la fonction cos est développable en série entière sur tout intervalle de la forme $]-R,R[$, avec:

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \, .$$

2.3 Exercices d'application

Exercice 5. *Autour de la fonction exponentielle.*
*Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - Utiliser le développement en série entière de l'exponentielle pour montrer l'égalité suivante:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \, , \; \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \, .$$

2 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\lambda^n}{n!} x^n$ est infini.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n$. Montrer que $f'(x) = \lambda f(x)$.

3 - Montrer que pour tout x réel, on a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n = (x^2 + x)\exp(x)\,.$$

Exercice 6. *Résolution d'équations différentielles.*
*Les questions **1**, **2** et **3** sont indépendantes.*

1 - Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie par $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases} \tag{1}$$

(b) Chercher une solution de l'équation précédente sous forme de série entière, en précisant son rayon de convergence.

(c) En déduire le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$ sur $]-1,1[$.

(d) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} + \cdots$$

2 - Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant les séries entières:

$$\begin{cases} y'' - xy = 0\,, \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

3 - On considère la fonction f définie par $f(x) = ch(x)\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie A

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1-i)x} + e^{(-1+i)x}\right)$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+i)^n + (1-i)^n + (-1-i)^n + (-1+i)^n = 4(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\,.$$

(c) En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!} x^{4q} .$$

Partie B

(a) En revenant à l'expression analytique de f, montrer que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

(b) Retrouver le résultat de la question **(c)** de la partie précédente en résolvant cette équation avec les séries entières.

Exercice 7. *Somme des inverses des carrés.*

1 - Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1} .$$

Indication: on pourra utiliser le fait que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le résultat **1(d)** de l'**exercice 2**.

2 - Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n+1}$ converge normalement sur $[-1, 1]$.

Indication: on admettra que $\dfrac{1}{2n+1} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

(a) Utiliser le développement en série entière de la fonction arcsin pour montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \arcsin(\sin(t)) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} .$$

Indication: on admettra que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 8. *Autour du logarithme.*

1 - Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ est développable en série entière sur cet intervalle.

Indication: considérer la série géométrique $\sum(-1)^n x^n$ et utiliser le théorème d'intégration.

2 - **(a)** Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$.

(b) Montrer que la série précédente converge uniformément sur $[0,1]$.

(c) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

(d) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}$.