Séries de Fourier

Notions abordées

- *Coefficients de Fourier (formes réelle et complexe).*
- *Définition des sommes partielles de Fourier et série de Fourier.*
- *Résultats principaux sur les coefficients (lien entre forme complexe et réelle, parité, linéarité, lien avec le produit scalaire hermitien).*
- *Théorèmes de convergence : Convergence simple (Dirichlet), formule de Parseval, convergence normale.*
- *Applications : calcul de sommes de séries numériques, Théorème de Féjer ; phénomène de Gibbs.*

On s'intéresse aux intégrales de fonctions définies sur des intervalles du type $[a, b[$ (avec $a < b$, b pouvant être égal à $+\infty$) ou du type $]a, b]$ ($a < b$, a pouvant être égal à $-\infty$).
Dans la suite, E désigne l'ensemble des fonctions réelles $T-$périodiques et continue par morceaux ($T \in \mathbb{R}$).

1 Définitions et résultats fondamentaux

1.1 Définitions - premiers résultats

Définition 1.1

On considère une fonction $f \in E$ ($T-$périodique, continue par morceaux), et on pose $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$. On appelle ***coefficients de Fourier*** de f les réels définis pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$a_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt \quad , \quad b_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt\,.$$

Définition 1.2

- On appelle ***somme partielle de Fourier*** d'ordre n, ou *n-ième somme de Fourier* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x)\right).$$

- La série de fonctions associée aux sommes partielles de Fourier $(S_n(f))$ est appelée ***série de Fourier*** de f. On note $S(f)$ sa somme.

Remarque 1.1. On trouve parfois la définition alternative $a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ (valeur moyenne de f), ce qui évite la division par 2 dans la formule précédente. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on notera simplement (a_k) et (b_k) les coefficients de Fourier, afin d'alléger les notations.

On établit à présent quelques résultats classiques concernant les coefficients de Fourier.

1 - On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}dt$. Montrer que l'on a les relations suivantes, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad , \quad b_k = i(c_k - c_{-k}),$$

et que les sommes partielles de Fourier d'ordre n se réécrivent:

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x}.$$

Le premier résultat découle directement des formules $\cos(k\omega t) = \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2}$ *et* $\sin(k\omega t) = \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i}$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$. *Par suite:*

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x)\right). \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left((c_k + c_{-k})\cos(k\omega x) + i(c_k - c_{-k})\sin(k\omega x)\right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{k\omega x} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}\left(\cos(k\omega x) - i\sin(k\omega x)\right) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{k\omega x} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{ik\omega x}, \end{aligned}$$

d'où le résultat

Remarque 1.2. Les sommes partielles de Fourier sont des cas particuliers de polynômes trigonométriques, c'est à dire des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ s'écrivant sous la forme:

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad , \quad \text{où } (c_k)_{k=-n,\cdots,n} \in \mathbb{C}\,.$$

2 - **(a)** Montrer que pour toute fonction $T-$périodique f, la quantité $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt$ ne dépend pas du réel a.

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)dt &= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt \\ &= \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a f(t)dt \\ &= \int_0^T f(t)dt\,.\end{aligned}$$

Remarque 1.3. Les coefficients de Fourier peuvent donc se réécrire sous la forme d'une intégrale définie sur un intervalle quelconque de longueur T.

(b) En déduire que si f est paire (resp. impaire), les coefficients de Fourier (b_k) (resp. (a_k)) sont nuls.

Soit f une fonction paire. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $g_k(t) = f(t)\sin(k\omega t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction g est impaire, T-périodique et on a:

$$b_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T g_k(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g_k(t)dt = 0\,,$$

Un raisonnement analogue donne la nullité des coefficients (a_k) dans le cas où f est impaire.

3 - Pour $f, g \in E$, on définit le produit scalaire:

$$< f, g >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\bar{g}(t)dt\,.$$

On a donc $< f, 1 >= \dfrac{a_0}{2}$, $< f, \cos(k\omega t) >= \dfrac{a_k}{2}$, $< f, \sin(k\omega t) >= \dfrac{b_k}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $< f, e^{ik\omega t} >= c_k$. En particulier, les sommes partielles d'ordre n se réécrivent:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} < f, e^{ik\omega t} > e^{ik\omega x}\,.$$

(a) Montrer que $f \in E \mapsto c_n(f) \in \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire, et qu'il en est de même pour $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto b_n(f)$.

Découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale.

(b) Établir que la famille $\left\{e^{ik\omega t}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormée relativement à ce produit scalaire.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On a $< e^{ip\omega t}, e^{iq\omega t} >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T e^{is\omega t}dt$, où l'on a posé $s = p - q$. Si $p = q$, alors $< e^{ip\omega t}, e^{iq\omega t} >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T dt = 1$, et dans la cas contraire:

$$< e^{ip\omega t}, e^{iq\omega t} >= \frac{1}{T}\int_0^T \cos(s\omega t)dt + \frac{i}{T}\int_0^T \sin(s\omega t)dt = 0\,.$$

(c) En déduire que S_n est le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\{e^{ip\omega x}\}_{k=-n\cdots,n}$ (c'est à dire que $< S_n - f, e^{ip\omega x} >= 0$ pour $p = -n\cdots,n$).

Soit $p \in [\![-n, n]\!]$. On a:

$$< S_n, e^{ip\omega x} >= \sum_{k=-n}^{n} < f, e^{ik\omega t} >< e^{ik\omega x}, e^{ip\omega x} >.$$

En vertu de ce qui précède, on a $< e^{ik\omega x}, e^{ip\omega x} >= \delta_{kp}$, où δ_{kp} est le symbole de Kronecker (quantité égale à 1 si $p = k$ et à 0 sinon). On en déduit que seul le terme d'indice p de cette somme est non nul:

$$< S_n, e^{ip\omega x} >=< f, e^{ip\omega t} >,$$

d'où le résultat.

1.2 Principaux résultats de convergence

Théorème 1.1: Dirichlet.

Soit $f \in E$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier définie par les sommes partielles $(S_n(f))$ converge vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, où $f(x^+) = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} x} f(y)$ et $f(x^-) = \lim\limits_{y \overset{<}{\to} x} f(y)$.

Théorème 1.2: Convergence quadratique (égalité de Parseval).

Soit $f \in E$. On a le résultat suivant:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2}\,.$$

Théorème 1.3: Convergence normale.

Si $f \in E$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier $S(f)$ converge normalement vers f.

2 Exercices d'application

Exercice 1. *Application au calcul de sommes de séries numériques.*
On considère la fonction réelle f de période 2π, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1 - Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2 - Calculer $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$.

3 - Monter que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = 0$.

4 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = 4\dfrac{(-1)^k}{k^2}$.
Indication : on pourra procéder par intégrations par parties successives, en commençant par $u = t^2, v' = \cos(kt)$.

5 - Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x)$.

6 - **(a)** Montrer que $S_n(f)(\pi) = \dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{4}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Indication: on pourra utiliser $f(\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(\pi)$.

7 - **(a)** Calculer $S_n(f)(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

8 - **(a)** Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \dfrac{\pi^4}{5}$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^4} = \dfrac{\pi^4}{90}$.
Indication : utiliser la formule de Parseval.

Exercice 2. *Théorème de Féjer.*
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues $2\pi-$périodiques. On considère les sommes partielles de Fourier associées à f, définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \, , \, \forall n \in \mathbb{N} \, ,$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = \dfrac{S_0 + S_1 + \cdots S_n}{n+1}$. L'objectif est de montrer que la suite de fonctions (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^{l} e^{imx} \, .$$

1 - Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} \dfrac{1-\cos(kx)}{1-\cos(x)} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \, , \\ k \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \, . \end{cases}$$

Indication : on pourra commencer par calculer $\displaystyle\sum_{m=-l}^{l} e^{imx} = \sum_{m=0}^{l} e^{imx} + \sum_{m=0}^{l} e^{-imx} - 1.$

2 - Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx$ en fonction de $m \in \mathbb{N}$. En déduire que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)dx = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3 - On fixe à présent $\eta \in]0, \pi[$.

(a) On pose $K_\eta = \dfrac{2}{1-\cos(\eta)}$. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, -\eta] \cup [\eta, \pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $|\varphi_k(x)| \leqslant \dfrac{K_\eta}{k}$.

(b) En déduire que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{|x| \in [\eta,\pi]} \varphi_k(x)dx \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.

Notons à présent que f étant continue et $2\pi-$périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta \in]0, \pi[$ tel que:

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, \quad |y' - y| < \eta \Rightarrow |f(y') - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On définit le produit de convolution de deux fonctions $f_1, \, f_2 \in \mathcal{C}$ par:

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y) f_2(y) dy \, , \, \forall x \in \mathbb{R} \, .$$

4 - **(a)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy\,.$$

*Indication : utiliser la question **2**.*

(b) En déduire que $f * \varphi_k$ converge uniformément vers f.
Indication : on pourra utiliser l'estimation précédente, ainsi que la décomposition $|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leqslant I_1 + I_2$, *avec:*

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\eta} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy \quad \textit{et} \quad I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\in[\eta,\pi]} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy\,.$$

*Utiliser alors la question **3** pour obtenir une estimation sur I_2 et la continuité uniforme de f pour obtenir une estimation sur I_1.*

5 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \varphi_n = C_n$. Conclure.

Exercice 3. *Phénomène de Gibbs.*
On considère la fonction f, $2\pi-$périodique, impaire, définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0, \pi[\,, \\ 0 \text{ si } x = k\pi\,. \end{cases}$$

1 - Calculer les coefficients de Fourier de f.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = S_{2n-1}$ la sommes partielles d'ordre $2n-1$ associées à f. Montrer que:

$$T_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}\,.$$

3 - Montrer que la série de Fourier associée converge simplement vers f. A-t-on convergence uniforme ?

4 - On se donne à présent un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que T_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec:

$$T_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin(2nx)}{\sin(x)} \text{ si } x \notin \pi\mathbb{Z}, \\ \dfrac{(-1)^q 4n}{\pi} \text{ si } x = q\pi\,,\ q \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Indication: on pourra étudier la quantité $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x}$, *puis prendre la partie réelle.*

(b) En déduire que T_n admet $(2n-1)$ extrema locaux sur $]0,\pi[$. Montrer que le premier d'entre eux est un maximum, atteint en $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$. On pose dans la suite $a_n = S_n(x_n)$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0,\pi[$, on a:

$$T_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}dt\,.$$

(d) En déduire que:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2n\sin\left(\dfrac{t}{2n}\right)}dt\,.$$

5 - (a) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi/2]$, on a $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x\,.$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x) - x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}\,.$

(c) Montrer que la fonction h_n, définie sur $[0,\pi/2]$ par

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2n\sin\left(\dfrac{x}{2n}\right)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0\,, \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction h que l'on précisera.

(d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt.$

Correction des exercices

Exercice 1. *Application au calcul de sommes de séries numériques.*
On considère la fonction réelle f de période 2π, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1 - Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\pi, \pi[$ est continue. f étant $2\pi-$périodique, on en déduit que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}\}$. Par ailleurs, on a $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = \pi^2$. On en déduit la continuité de f en π, et par suite sur $\{(2k+1)\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}\}$ par périodicité. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.
Considérons la restriction de f à $[-\pi, \pi]$. Il s'agit d'une fonction dérivable, à dérivée continue sur $]-\pi, \pi[$. De plus, f et f' admettent une dérivée à gauche en $-\pi$ et à droite en π. On en déduit que la restriction de f à $[-\pi, \pi]$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par périodicité, f est donc aussi de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

2 - Calculer $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

Le calcul donne $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 = \dfrac{1}{3}\pi^2$.

3 - Monter que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction g définie par $g(t) = t^2 \sin(kt)$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ est impaire. On en déduit immédiatement que $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = 0$.

4 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 4\dfrac{(-1)^k}{k^2}$.
Indication : on pourra procéder par intégrations par parties successives, en commençant par $u = t^2, v' = \cos(kt)$.

On effectue une première intégration par parties $u = t^2, v' = \cos(kt)$:
$\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = -\dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2t \dfrac{\sin(kt)}{k} dt + \left[t^2 \dfrac{\sin(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\dfrac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) dt.$
On effectue alors une nouvelle intégration par parties $u = t, v' = \sin(kt)$:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt) dt &= \frac{2}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(kt)}{k} dt - \frac{2}{k\pi} \left[-t \frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[-\frac{\sin(kt)}{k^2} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k\pi} \left[t \frac{\cos(kt)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} . \end{aligned} \tag{1}$$

Le premier terme de droite dans l'égalité précédente étant nul, on en déduit: $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)dt = \dfrac{2}{k\pi}\left[t\dfrac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{2}{k\pi}\left(2\dfrac{\pi}{k}\cos(k\pi)\right) = 4\dfrac{(-1)^k}{k^2}$. *(On rappelle que* $\cos(k\pi) = (-1)^k$*).*

5 - Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x)$.

Il s'agit de voir qu'on est dans les conditions d'application du théorème de Dirichlet (cf question 2.1, f est 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Par suite, f étant continue en tout point, on a bien $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(f(x))$ pour tout réel x.

6 - **(a)** Montrer que $S_n(f)(\pi) = \dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{4}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathcal{F}_n(f(\pi)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\pi) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(k\pi)$. On utilise alors le fait que les coefficients $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont nuls et les questions 2.2 et 2.4 :

$$\mathcal{F}_n(f(\pi)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{n} 4\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k^2}\,.$$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Indication: on pourra utiliser $f(\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(\pi)$.

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}_n(f(\pi)) = \dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{4}{k^2}$. La fonction f étant continue en π, la suite $\big(\mathcal{F}_n(f(\pi))\big)$ converge vers $f(\pi)$. Or $f(\pi) = \pi^2$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{F}_n(f(\pi)) = \dfrac{1}{3}\pi^2 + 4\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{3}\pi^2 + 4S(2)$. On en déduit que $\pi^2 = \dfrac{1}{3}\pi^2 + 4S(2)$, c'est à dire $S(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

7 - **(a)** Calculer $S_n(f)(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathcal{F}_n(f(0)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\cos(0) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k = \dfrac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k^2}$.

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Comme dans la question précédente, f étant continue en 0, la suite $\big(\mathcal{F}_n(f(0))\big)$ converge vers $f(0) = 0$. D'autre part,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(f(0)) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{+\infty}(-1) \times \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{1}{3}\pi^2 - 4T(2).$$

Ainsi $\frac{1}{3}\pi^2 - 4T(2) = 0$, *d'où l'on tire le résultat.*

8 - **(a)** Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi^4}{5}$.

Le calcul donne: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi^5}{5}\right) = \frac{\pi^4}{5}$.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Indication : utiliser la formule de Parseval.

f *étant continue par morceaux et* 2π*-périodique, la formule de Parseval s'applique, et on a* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|a_n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2$. *En utilisant la question précédente, en déduit:*

$$\frac{\pi^4}{5} = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(4\frac{(-1)^k}{k^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}.$$

On en déduit que $S(4) = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 2. *Théorème de Féjer.*

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues $2\pi-$périodiques. On considère les sommes partielles de Fourier associées à f, définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots S_n}{n+1}$. L'objectif est de montrer que la suite de fonctions (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l} e^{imx}\,.$$

1 - Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}\frac{1-\cos(kx)}{1-\cos(x)} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}\,, \\ k \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Indication : on pourra commencer par calculer $\displaystyle\sum_{m=-l}^{l} e^{imx} = \sum_{m=0}^{l} e^{imx} + \sum_{m=0}^{l} e^{-imx} - 1$.

Soit $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On a:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-l}^{l} e^{imx} &= \sum_{m=0}^{l} e^{imx} + \sum_{m=0}^{l} e^{-imx} - 1 \\
&= \frac{1-e^{i(l+1)x}}{1-e^{ix}} + \frac{1-e^{-i(l+1)x}}{1-e^{-ix}} - 1 \\
&= \frac{(1-e^{i(l+1)x})(1-e^{-ix}) + (1-e^{-i(l+1)x})(1-e^{+ix}) - 2(1-\cos(x))}{2(1-\cos(x))} \\
&= \frac{2-(e^{ix}+e^{-ix}) + (e^{ilx}+e^{-ilx}) - (e^{i(l+1)x}+e^{-i(l+1)x}) - 2(1-\cos(x))}{2(1-\cos(x))} \\
&= \frac{\cos(lx)-\cos((l+1)x)}{1-\cos(x)}\,.
\end{aligned}$$

On en déduit:

$$\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l} e^{imx} = \frac{1-\cos(kx)}{1-\cos(x)}\,.$$

Le cas $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ s'obtient aisément par un calcul direct.

2 - Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}dx$ en fonction de $m \in \mathbb{N}$. En déduire que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)dx = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Un calcul élémentaire donne que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}dx$ *est nulle pour $m \neq 0$ et vaut 2π pour $m = 0$. On a donc:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x)dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} 2\pi = 1\,.$$

3 - On fixe à présent $\eta \in]0,\pi[$.

(a) On pose $K_\eta = \dfrac{2}{1-\cos(\eta)}$. Montrer que pour tout $x \in [-\pi,-\eta] \cup [\eta,\pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $|\varphi_k(x)| \leqslant \dfrac{K_\eta}{k}$.

Soit $x \in [-\pi,-\eta] \cup [\eta,\pi]$, $k \in \mathbb{N}$. On a $|1-\cos(kx)| \leqslant 2$ et $\cos(x) < \cos(\eta) < 1$ (et par suite $1-\cos(x) > 1-\cos(\eta) > 0$). Par suite:

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{k}\left|\frac{1-\cos(kx)}{1-\cos(x)}\right| \leqslant \frac{K_\eta}{k}\,.$$

(b) En déduire que $\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\in[\eta,\pi]} \varphi_k(x)dx \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.

Considérons $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède, pour k suffisamment grand, on aura $|\varphi_k(x)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [-\pi, -\eta] \cup [\eta, \pi]$, et par suite:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|x|\in[\eta,\pi]} \varphi_k(x)dx\right| \leqslant \varepsilon\,,$$

ce qui permet de conclure.

Notons à présent que f étant continue et $2\pi-$périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta \in]0, \pi[$ tel que:

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}\,, \quad |y' - y| < \eta \Rightarrow |f(y') - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

On définit le produit de convolution de deux fonctions f_1, $f_2 \in \mathcal{C}$ par:

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y)f_2(y)dy\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

4 - (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy\,.$$

Indication : utiliser la question 2.

D'après la question 2, on a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_k(y)dy = f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(y)dy = f(x)\,,$$

de sorte que

$$(f * \varphi_k)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x))\,\varphi_k(y)dy\right)\,.$$

Par suite:

$$\begin{aligned}|(f * \varphi_k)(x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-y) - f(x))\,\varphi_k(y)dy\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)|\,\varphi_k(y)dy\,,\end{aligned}$$

(φ_k est à valeurs positives).

(b) En déduire que $f * \varphi_k$ converge uniformément vers f.
Indication : on pourra utiliser l'estimation précédente, ainsi que la décomposition $|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leqslant I_1 + I_2$, avec:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\eta} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy \quad \textit{et} \quad I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\in[\eta,\pi]} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy\,.$$

Utiliser alors la question 3 pour obtenir une estimation sur I_2 et la continuité uniforme de f pour obtenir une estimation sur I_1.

Soit $\varepsilon > 0$. En se référent à ce qui précède, on note $\eta > 0$ le réel strictement positif associé à la continuité uniforme de f. On a donc $|f(y') - f(y)| < \varepsilon/2$ pour tout y, y' tels que $|y - y'| < \eta$. Il vient:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\eta} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\eta} \varphi_k(y)\varepsilon/2dy \leqslant \varepsilon/2\,.$$

D'autre part:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\in[\eta,\pi]} |f(x-y) - f(x)|\varphi_k(y)dy \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{|y|\in[\eta,\pi]} \varphi_k(y)dy\,.$$

D'après la question 3, on aura donc $I_2 \leqslant \varepsilon/2$ pour k suffisamment grand, ce qui permet de conclure.

5 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \varphi_n = C_n$. Conclure.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned}(f * \varphi_n)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\varphi_k(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)e^{imy}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l} e^{imx}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-imu}du\,,\end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = x - y$. Rappelons alors que le coefficient de Fourier complexe d'ordre m de f est donné par:

$$c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-imy}dy\,,$$

et donc:

$$(f * \varphi_n)(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=-l}^{l} c_m(f)e^{imx} = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} S_l(f)(x)\,,$$

d'où le résultat.

Exercice 3. *Phénomène de Gibbs.*

On considère la fonction f, $2\pi-$périodique, impaire, définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in]0,\pi[\,, \\ 0 \text{ si } x = \in \pi\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

1 - Calculer les coefficients de Fourier de f.

La fonction f étant impaire, les coefficients de Fourier (a_n) sont nuls. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nt)dt \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(\cos(0)-\cos(-n\pi)\right) - \frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi)-\cos(0)\right) \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(2-2(-1)^n\right) , \end{aligned}$$

de sorte que $b_n(f) = 0$ si n est pair et $b_n(f) = \dfrac{4}{n\pi}$ si n est impair.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = S_{2n-1}$ la sommes partielles d'ordre $2n-1$ associées à f. Montrer que:

$$T_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left((2k-1)x\right)}{2k-1} .$$

$$T_n(x) = S_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{2n-1} b_k(f)\sin(kx) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin\left((2p-1)x\right)}{2p-1} .$$

3 - Montrer que la série de Fourier associée converge simplement vers f. A-t-on convergence uniforme ?

Puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge en tout point $x \in \mathbb{R}$ vers la demi-somme des limites à gauche et à droite de f en x. En les points où f est continue, cette demi-somme est égale à $f(x)$. Si $x = k\pi$ avec $x \in k\pi$, cette demi-somme est égale à 0, et donc vaut aussi $f(k\pi)$. Bien sûr, la convergence ne saurait être uniforme, puisque f n'est pas continue alors que chaque somme partielle de la série de Fourier l'est.

4 - On se donne à présent un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que T_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec:

$$T_n'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin(2nx)}{\sin(x)} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z}, \\ \dfrac{(-1)^q 4n}{\pi} & \text{si } x = q\pi ,\ q \in \mathbb{Z} . \end{cases}$$

Indication: on pourra étudier la quantité $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i(2k-1)x}$, puis prendre la partie réelle.

T_n est dérivable comme somme finie de fonctions dérivables, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=1}^{n} \cos((2p-1)x) = \frac{4}{\pi} Re\left(\sum_{p=1}^{n} e^{i(2p-1)x}\right).$$

D'autre part, si $x \neq \pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} e^{i(2p-1)x} &= e^{-ix}\sum_{p=1}^{n} e^{2ipx} \\ &= e^{-ix}\frac{e^{2ix}-e^{i(2n+2)x}}{1-e^{2ix}} \\ &= \frac{e^{-ix}e^{i(n+2)x}}{e^{ix}}\frac{e^{-inx}-e^{inx}}{e^{-ix}-e^{ix}} \\ &= e^{inx}\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}.\end{aligned}$$

Par suite, en prenant la partie réelle de la quantité précédente:

$$T_n'(x) = \frac{4}{\pi}\frac{\cos(nx)\sin(nx)}{\sin(x)} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(2nx)}{\sin(x)}.$$

Si maintenant $x = q\pi$ avec $q \in \mathbb{Z}$, un calcul direct donne $T_n'(x) = (-1)^q\frac{4n}{\pi}$.

(b) En déduire que T_n admet $2n-1$ extrema locaux sur $]0,\pi[$. Montrer que le premier d'entre eux est un maximum, atteint en $x_n = \frac{\pi}{2n}$. On pose dans la suite $a_n = T_n(x_n)$.

On déduit de ce qui précède qu'en chaque point de la forme $k\pi/2n$ avec $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, la fonction T_n' s'annule et change de signe, ce qui signifie qu'on est en présence d'un extrema local. Il s'agit des seuls points de l''intervalle $]0,\pi[$ en lesquels la dérivée s'annule. Le premier d'entre eux est $x_n = \pi/2n$. On a $T_n'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in]0, x_n[$, de sorte qu'il correspond à un maximum local.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0,\pi[$, on a:

$$T_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}dt.$$

La fonction T_n' étant continue, le théorème fondamental du calcul intégral permet d'écrire:

$$T_n(x) - T_n(0) = \int_0^x S_n'(t)dt,$$

et donc en particulier $T_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}dt$ pour tout $x \in [0,\pi[$.

(d) En déduire que:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{2n\sin\left(\frac{t}{2n}\right)}dt.$$

Le calcul donne:

$$a_n = T_n(x_n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2n} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}dt\,,$$

de sorte que le changement de variable $u = 2nt$ donne le résultat demandé.

5 - **(a)** Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$.

La fonction $\sin$ *est concave sur l'intervalle* $[0, \pi/2]$. *Ainsi, son graphe est situé au dessus de chacune de ses cordes, en particulier celle reliant le point* $(0, 0)$ *au point* $(\pi/2, 1)$, *d'équation* $y = \dfrac{2}{\pi}x$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x) - x| \leqslant \dfrac{|x|^3}{6}$.

Il s'agit d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\sin$ *à l'ordre* 3 *en* 0.

(c) Montrer que la fonction h_n, définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{2n\sin\left(\dfrac{x}{2n}\right)} \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0\,, \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction h que l'on précisera.

On sait que $\sin(t/2n) \underset{n\to\infty}{\backsim} t/2n$. *On en déduit la convergence simple de* (h_n) *vers la fonction h définie sur* $[0, \pi/2[$ *par*

$$h(x) = \begin{cases} \sin(t)/t \textit{ si } x \neq 0, \\ 1 \textit{ si } x = 0\,. \end{cases}$$

D'autre part, on a, pour tout $t \in]0, \pi]$:

$$\begin{aligned} |h_n(t) - h(t)| &= \left|\frac{\sin(t)}{2n\sin(t/2n)} - \frac{\sin(t)}{t}\right| \\ &= \frac{2n|\sin(t)| \times |\sin(t/2n) - (t/2n)|}{|2nt\sin(t/2n)|}\,. \end{aligned}$$

On a d'une part $|\sin(t)| \leqslant 1$, $|\sin(t/2n) - (t/2n)| \leqslant \dfrac{t^3}{8n^3}$, *et d'autre part, avec* $t \in]0, \pi] \Rightarrow t/2n \in]0, \pi/2n]$:

$$2nt\sin(t/2n) \geqslant 2nt \times \frac{2}{\pi} \times \frac{t}{2n} = \frac{2t^2}{\pi}\,,$$

ce qui donne: $|h_n(t) - h(t)| \leqslant 2n \times \dfrac{t^3}{8n^3} \times \dfrac{\pi}{2t^2} = \dfrac{\pi t}{8n^2} \leqslant \dfrac{\pi^2}{8n^2}$, *et permet de conclure que* (h_n) *converge uniformément vers* h.

(d) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt$.

On a $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h_n(t)dt$. *Or, la suite de fonctions* (h_n) *converge uniformément vers* h *sur* $[0,\pi]$. *On peut donc permuter la limite et l'intégrale, ce qui donne:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}dt\,.$$