

Séries de Fourier

Notions abordées

- Coefficients de Fourier (formes réelle et complexe).
 - Définition des sommes partielles de Fourier et série de Fourier.
 - Résultats principaux sur les coefficients (lien entre forme complexe et réelle, parité, linéarité, lien avec le produit scalaire hermitien).
 - Théorèmes de convergence : Convergence simple (Dirichlet), formule de Parseval, convergence normale.
 - Applications : calcul de sommes de séries numériques, Théorème de Féjer ; phénomène de Gibbs.
-
-

On s'intéresse aux intégrales de fonctions définies sur des intervalles du type $[a, b[$ (avec $a < b$, b pouvant être égal à $+\infty$) ou du type $]a, b]$ ($a < b$, a pouvant être égal à $-\infty$). Dans la suite, E désigne l'ensemble des fonctions réelles T -périodiques et continue par morceaux ($T \in \mathbb{R}$).

1 Définitions et résultats fondamentaux

1.1 Définitions - premiers résultats

Définition 1.1

On considère une fonction $f \in E$ (T -périodique, continue par morceaux), et on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On appelle *coefficients de Fourier* de f les réels définis pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$a_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt \quad , \quad b_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt .$$

Définition 1.2

- On appelle *somme partielle de Fourier* d'ordre n , ou n -ième somme de Fourier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos(k\omega x) + b_k(f) \sin(k\omega x)).$$

- La série de fonctions associée aux sommes partielles de Fourier $(S_n(f))$ est appelée *série de Fourier* de f . On note $S(f)$ sa somme.

Remarque 1.1. On trouve parfois la définition alternative $a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ (valeur moyenne de f), ce qui évite la division par 2 dans la formule précédente. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, on notera simplement (a_k) et (b_k) les coefficients de Fourier, afin d'alléger les notations.

On établit à présent quelques résultats classiques concernant les coefficients de Fourier.

- 1 - On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$. Montrer que l'on a les relations suivantes, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad , \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) ,$$

et que les sommes partielles de Fourier d'ordre n se réécrivent:

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ik\omega x} .$$

Remarque 1.2. Les sommes partielles de Fourier sont des cas particuliers de polynômes trigonométriques, c'est à dire des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ s'écrivant sous la forme:

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad , \quad \text{où } (c_k)_{k=-n, \dots, n} \in \mathbb{C} .$$

- 2 - (a) Montrer que pour toute fonction T -périodique f , la quantité $\int_a^{a+T} f(t) dt$ ne dépend pas du réel a .

Remarque 1.3. Les coefficients de Fourier peuvent donc se réécrire sous la forme d'une intégrale définie sur un intervalle quelconque de longueur T .

- (b) En déduire que si f est paire (resp. impaire), les coefficients de Fourier (b_k) (resp. (a_k)) sont nuls.

3 - Pour $f, g \in E$, on définit le produit scalaire:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt.$$

On a donc $\langle f, 1 \rangle = \frac{a_0}{2}$, $\langle f, \cos(k\omega t) \rangle = \frac{a_k}{2}$, $\langle f, \sin(k\omega t) \rangle = \frac{b_k}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\langle f, e^{ik\omega t} \rangle = c_k$. En particulier, les sommes partielles d'ordre n se réécrivent:

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \langle f, e^{ik\omega t} \rangle e^{ik\omega x}.$$

- (a) Montrer que $f \in E \mapsto c_n(f) \in \mathbb{R}$ est une application $\mathbb{C}$ -linéaire, et qu'il en est de même pour $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto b_n(f)$.
- (b) Établir que la famille $\{e^{ik\omega t}\}_{k \in \mathbb{N}}$ est orthonormée relativement à ce produit scalaire.
- (c) En déduire que S_n est le projeté orthogonal de f sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions $\{e^{ip\omega x}\}_{k=-n \dots, n}$ (c'est à dire que $\langle S_n - f, e^{ip\omega x} \rangle = 0$ pour $p = -n \dots, n$).

1.2 Principaux résultats de convergence

Théorème 1.1: Dirichlet.

Soit $f \in E$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier définie par les sommes partielles $(S_n(f))$ converge vers $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, où $f(x^+) = \lim_{y \xrightarrow{>} x} f(y)$ et $f(x^-) = \lim_{y \xrightarrow{<} x} f(y)$.

Théorème 1.2: Convergence quadratique (égalité de Parseval).

Soit $f \in E$. On a le résultat suivant:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2}.$$

Théorème 1.3: Convergence normale.

Si $f \in E$ est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier $S(f)$ converge normalement vers f .

2 Exercices d'application

Exercice 1. *Application au calcul de sommes de séries numériques.*

On considère la fonction réelle f de période 2π , définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1 - Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2 - Calculer $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

3 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$.

4 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 4 \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties successives, en commençant par $u = t^2, v' = \cos(kt)$.

5 - Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x)$.

6 - (a) Montrer que $S_n(f)(\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indication: on pourra utiliser $f(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(\pi)$.

7 - (a) Calculer $S_n(f)(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

8 - (a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi^4}{5}$.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Indication : utiliser la formule de Parseval.

Exercice 2. Théorème de Féjer.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques. On considère les sommes partielles de Fourier associées à f , définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$. L'objectif est de montrer que la suite de fonctions (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx}.$$

1 - Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{1 - \cos(kx)}{1 - \cos(x)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{k} & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Indication : on pourra commencer par calculer $\sum_{m=-l}^l e^{imx} = \sum_{m=0}^l e^{imx} + \sum_{m=0}^l e^{-imx} - 1$.

2 - Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx$ en fonction de $m \in \mathbb{N}$. En déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) dx = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3 - On fixe à présent $\eta \in]0, \pi[$.

(a) On pose $K_\eta = \frac{2}{1 - \cos(\eta)}$. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, -\eta] \cup [\eta, \pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $|\varphi_k(x)| \leq \frac{K_\eta}{k}$.

(b) En déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_{|x| \in [\eta, \pi]} \varphi_k(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Notons à présent que f étant continue et 2π -périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta \in]0, \pi[$ tel que:

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, \quad |y' - y| < \eta \Rightarrow |f(y') - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On définit le produit de convolution de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ par:

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y) f_2(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4 - (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy.$$

Indication : utiliser la question 2.

(b) En déduire que $f * \varphi_k$ converge uniformément vers f .

*Indication : on pourra utiliser l'estimation précédente, ainsi que la décomposition $|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2$, avec:*

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \eta} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \in [\eta, \pi]} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy.$$

Utiliser alors la question 3 pour obtenir une estimation sur I_2 et la continuité uniforme de f pour obtenir une estimation sur I_1 .

5 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \varphi_n = C_n$. Conclure.

Exercice 3. Phénomène de Gibbs.

On considère la fonction f , 2π -périodique, impaire, définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x = k\pi. \end{cases}$$

1 - Calculer les coefficients de Fourier de f .

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = S_{2n-1}$ la sommes partielles d'ordre $2n-1$ associées à f . Montrer que:

$$T_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

3 - Montrer que la série de Fourier associée converge simplement vers f . A-t-on convergence uniforme ?

4 - On se donne à présent un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que T_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec:

$$T'_n(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z}, \\ \frac{(-1)^q 4n}{\pi} & \text{si } x = q\pi, q \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Indication: on pourra étudier la quantité $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x}$, puis prendre la partie réelle.

(b) En déduire que T_n admet $(2n - 1)$ extrema locaux sur $]0, \pi[$. Montrer que le premier d'entre eux est un maximum, atteint en $x_n = \frac{\pi}{2n}$. On pose dans la suite $a_n = S_n(x_n)$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi[$, on a:

$$T_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt.$$

(d) En déduire que:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2n \sin\left(\frac{t}{2n}\right)} dt.$$

5 - (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$.

(c) Montrer que la fonction h_n , définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2n \sin\left(\frac{x}{2n}\right)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction h que l'on précisera.

(d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Correction des exercices

Exercice 1. *Application au calcul de sommes de séries numériques.*

On considère la fonction réelle f de période 2π , définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1 - Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2 - Calculer $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

3 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$.

4 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 4 \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties successives, en commençant par $u = t^2, v' = \cos(kt)$.

5 - Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x)$.

6 - (a) Montrer que $S_n(f)(\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indication: on pourra utiliser $f(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(\pi)$.

7 - (a) Calculer $S_n(f)(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

8 - (a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi^4}{5}$.

(b) En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Indication : utiliser la formule de Parseval.

Exercice 2. Théorème de Féjer.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues 2π -périodiques. On considère les sommes partielles de Fourier associées à f , définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$. L'objectif est de montrer que la suite de fonctions (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{m=-l}^l e^{imx}.$$

1 - Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \frac{1 - \cos(kx)}{1 - \cos(x)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ \frac{1}{k} & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Indication : on pourra commencer par calculer $\sum_{m=-l}^l e^{imx} = \sum_{m=0}^l e^{imx} + \sum_{m=0}^l e^{-imx} - 1$.

2 - Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx$ en fonction de $m \in \mathbb{N}$. En déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(x) dx = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3 - On fixe à présent $\eta \in]0, \pi[$.

(a) On pose $K_\eta = \frac{2}{1 - \cos(\eta)}$. Montrer que pour tout $x \in [-\pi, -\eta] \cup [\eta, \pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $|\varphi_k(x)| \leq \frac{K_\eta}{k}$.

(b) En déduire que $\frac{1}{2\pi} \int_{|x| \in [\eta, \pi]} \varphi_k(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Notons à présent que f étant continue et 2π -périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta \in]0, \pi[$ tel que:

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, \quad |y' - y| < \eta \Rightarrow |f(y') - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On définit le produit de convolution de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$ par:

$$(f_1 * f_2)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x-y) f_2(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4 - (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy.$$

Indication : utiliser la question 2.

(b) En déduire que $f * \varphi_k$ converge uniformément vers f .

*Indication : on pourra utiliser l'estimation précédente, ainsi que la décomposition $|f * \varphi_k(x) - f(x)| \leq I_1 + I_2$, avec:*

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \eta} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \in [\eta, \pi]} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y) dy.$$

Utiliser alors la question 3 pour obtenir une estimation sur I_2 et la continuité uniforme de f pour obtenir une estimation sur I_1 .

5 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f * \varphi_n = C_n$. Conclure.

Exercice 3. Phénomène de Gibbs.

On considère la fonction f , 2π -périodique, impaire, définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

1 - Calculer les coefficients de Fourier de f .

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = S_{2n-1}$ la sommes partielles d'ordre $2n-1$ associées à f . Montrer que:

$$T_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

3 - Montrer que la série de Fourier associée converge simplement vers f . A-t-on convergence uniforme ?

4 - On se donne à présent un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que T_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec:

$$T'_n(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin(2nx)}{\pi \sin(x)} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z}, \\ \frac{(-1)^q 4n}{\pi} & \text{si } x = q\pi, q \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Indication: on pourra étudier la quantité $\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n e^{i(2k-1)x}$, puis prendre la partie réelle.

(b) En déduire que T_n admet $2n - 1$ extrema locaux sur $]0, \pi[$. Montrer que le premier d'entre eux est un maximum, atteint en $x_n = \frac{\pi}{2n}$. On pose dans la suite $a_n = T_n(x_n)$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi[$, on a:

$$T_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt.$$

(d) En déduire que:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{2n \sin\left(\frac{t}{2n}\right)} dt.$$

5 - (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{6}$.

(c) Montrer que la fonction h_n , définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2n \sin\left(\frac{x}{2n}\right)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers une fonction h que l'on précisera.

(d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt$.