

Suites et séries de fonctions

Notions abordées

- Suites de fonctions : convergence simple et uniforme.
 - Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, normale.
 - Résultats de régularité pour les suites et séries.
 - Critères de convergence (critère de Cauchy, théorème d'Abel).
 - Applications: polynômes, théorème de Dini, fonction ζ de Riemann, séries alternées, séries trigonométriques.
-
-

1 Suites de fonctions

1.1 Rappels de base

1.1.1 Convergence simple et uniforme

Définition 1.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$, soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction définie sur I .

- **Convergence simple**

On dit que la suite (f_n) converge **simplement** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

- **Convergence uniforme**

On dit que la suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Application 1.1.

1 - Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2 - Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais que c'est le cas sur $[-1, 1]$.

Application 1.2. Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions définies par :

1 - $\forall x \in I, f_n(x) = x^n$, avec $I = [0, 1]$, puis $I = [0, 1 - \epsilon]$, $\epsilon > 0$.

2 - $\forall x \in I, f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$, avec $I = [0, 1]$, puis $I = [0, 1 - \epsilon]$, $\epsilon > 0$.

3 - $\forall x \in I, f_n(x) = \arctan\left(\frac{x+n}{x}\right)$, avec $I = \mathbb{R}_+^*$, puis $I =]0, M]$, $M > 0$.

1.1.2 Résultats de régularité

Théorème 1.1: Continuité

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que:

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues en $x_0 \in I$.

Alors f est continue en x_0 . En d'autres termes, on a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right).$$

Dem:

□

Théorème 1.2: Intégration

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f . On a:

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Dem:

□

Théorème 1.3: Dérivabilité

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que:

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I .
- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I .

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et on a $f' = g$.

Dem:

□

1.2 Exercices d'application

Exercice 1. *Convergence uniforme et dérivabilité.* On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

- 1 - Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f que l'on précisera.
- 2 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. *Convergence uniforme et intégration.* On considère la suite de fonctions définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par:

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

- 1 - Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément convergente.
- 3 - A-t-on le même résultat avec $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$?

Exercice 3. Limite uniforme de polynômes. On considère une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1 - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait: $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
- 2 - Soit $n \geq N$. Montrer que le polynôme $Q_n = P_n - P_N$ est constant.
- 3 - Montrer que f est un polynôme.

Exercice 4. Théorème de Dini. On considère (f_n) une suite croissante de fonctions continues (i. e. $f_n \leq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$) définies sur $[a, b]$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

- 1 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \leq f$, puis que $K_{n+1}(\varepsilon) \subset K_n(\varepsilon)$.
- 2 - Montrer que

$$\mathcal{P} := (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, K_N(\varepsilon) = \emptyset) \Rightarrow (f_n) \text{ converge uniformément vers } f.$$

- 3 - On raisonne à présent par l'absurde, et on suppose que $\mathcal{P}$ n'est pas vérifiée.

- (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite convergente $(x_{\Phi(n)})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_{\Phi(n)}) - f_{\Phi(n)}(x_{\Phi(n)}) \geq \varepsilon.$$

- (b) Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) - f_p(x) \geq \varepsilon.$$

- (c) En déduire que la convergence simple de (f_n) implique $\mathcal{P}$.

Exercice 5. Critère de Cauchy. Montrer la proposition suivante:

Proposition 1.1

On a équivalence entre

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (p, q \geq N) \Rightarrow (\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon).$

2 Séries de fonctions

2.1 Quelques rappels de base

2.1.1 Convergence simple et uniforme, convergence normale

Définition 2.1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On associe à $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la série de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspondant à la *suite des sommes partielles*, définie pour tout $x \in I$ par:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

• Convergence simple et uniforme

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge *simplement* (resp. *uniformément*) si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) sur I .

• Convergence normale

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge *normalement* si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Comme dans le cas des suites, la convergence uniforme implique la convergence simple. D'autre part, la convergence normale implique la convergence uniforme (et donc aussi la convergence simple). La démonstration fait appel au critère de Cauchy (2.1.3).

Application 2.1. Montrer que la série $\sum x^{2n}$ converge simplement sur $[0, 1[$, et normalement sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

Application 2.2. Etudier la convergence normale des séries de fonctions suivantes:

1 - $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

2 - $\sum \frac{1}{x^2 + n^2}$, $n \geq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3 - $\sum \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^n$, $n \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Application 2.3. On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^{-nx} \sin(nx)}{\ln(n+1)}. \end{aligned}$$

1 - Soit λ un réel strictement positif. Pour $n \geq 1$ on définit $u_n = n^2 \frac{e^{-n\lambda}}{\ln(n+1)}$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

2 - En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty]$, avec a un réel strictement positif.

2.1.2 Résultats de régularité

Il s'agit simplement de reformuler les théorèmes relatifs aux suites de fonctions dans le cadre des séries de fonctions.

Théorème 2.1: Continuité

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions telle que:

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues en $x_0 \in I$.

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en x_0 . Plus précisément, on a:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) .$$

Théorème 2.2: Intégration

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions telle que:

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues sur I .

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I , et pour tout $[a, b] \subset I$, on a:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) .$$

Théorème 2.3: Dérivation

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que:

- $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I .
- $\sum f'_n$ converge uniformément vers T sur I .

Alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et on a $S' = T$.

Application 2.4.

- 1 - Montrer que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{(2n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2 - Montrer que l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{2^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- 3 - On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(nx)}{n^3}. \end{aligned}$$

(a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$. On notera f sa somme.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t) dt = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

(d) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(e) En déduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nt)}{n^2} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

2.1.3 Critères de convergence

Proposition 2.1: Condition nécessaire pour la convergence uniforme

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$, alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur I .

Proposition 2.2: Caractérisation de la convergence uniforme

On considère une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant simplement sur $I \subset \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on note $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)$ la suite des restes. Alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si (R_p) converge uniformément vers 0 sur I .

Proposition 2.3: Critère de Cauchy

On a équivalence entre:

- $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $I \subset \mathbb{R}$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon)$.

Proposition 2.4: Convergence normale et convergence uniforme

Si une série de fonctions converge normalement, alors elle converge uniformément.

Proposition 2.5: Théorème d'Abel

On considère deux suites de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$ telles que:

- $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs.
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
- Les sommes partielles de $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont uniformément bornées:

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |g_0(x) + \dots + g_n(x)| < M.$$

Alors $\sum f_n g_n$ converge uniformément.

2.2 Exercices d'application

Exercice 6. *Exemples et contreexemples.*

- 1 - On considère la suite de fonctions (f_n) avec:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais pas uniformément sur cet intervalle.

2 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, mais pas normalement sur cet intervalle.

3 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}, \quad x \geq 0.$$

(a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \llbracket N, 2N \rrbracket$, on a $\frac{N}{N^2 + k^2} \geq \frac{1}{5N}$.

(c) En déduire que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |R_p(x)|$, où

$$R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x) \text{ pour tout } p \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 7. Fonction ζ de Riemann.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1 - Montrer que ζ est définie sur $]1, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

2 - Montrer que ζ est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

3 - Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

4 - (a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a:

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

(b) En déduire que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

5 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec, pour $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad x \geq 0.$$

(a) Montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

Exercice 8. Séries alternées. On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1 - Montrer que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.

2 - Montrer que S est continue sur I .

3 - Montrer que S est dérivable sur I et calculer sa dérivée. En déduire que S est croissante.

4 - Déterminer les limites de S en -1 et $+\infty$.

Exercice 9. Séries trigonométriques. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1 - Montrer cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.

2 - Montrer $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge simplement sur tout intervalle de la forme $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

3 - Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[$, $k \in \mathbb{Z}$, avec $\varepsilon > 0$.

Indication : On pourra utiliser le théorème d'Abel pour établir la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f'_n$.

Correction des exercices

Exercice 1. *Convergence uniforme et dérivabilité.* On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

- 1 - Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f que l'on précisera.
- 2 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. *Convergence uniforme et intégration.* On considère la suite de fonctions définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par:

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

- 1 - Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément convergente.
- 3 - A-t-on le même résultat avec $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie sur $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$?

Exercice 3. *Limite uniforme de polynômes.* On considère une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1 - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait: $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
- 2 - Soit $n \geq N$. Montrer que le polynôme $Q_n = P_n - P_N$ est constant.
- 3 - Montrer que f est un polynôme.

Exercice 4. Théorème de Din. On considère (f_n) une suite croissante de fonctions continues (i. e. $f_n \leq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$) définies sur $[a, b]$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a, b] \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}.$$

1 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \leq f$, puis que $K_{n+1}(\varepsilon) \subset K_n(\varepsilon)$.

2 - Montrer que

$$\mathcal{P} := (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, K_N(\varepsilon) = \emptyset) \Rightarrow (f_n) \text{ converge uniformément vers } f.$$

3 - On raisonne à présent par l'absurde, et on suppose que $\mathcal{P}$ n'est pas vérifiée.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite convergente $(x_{\Phi(n)})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_{\Phi(n)}) - f_{\Phi(n)}(x_{\Phi(n)}) \geq \varepsilon.$$

(b) Montrer qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) - f_p(x) \geq \varepsilon.$$

(c) En déduire que la convergence simple de (f_n) implique $\mathcal{P}$.

Exercice 5. Critère de Cauchy. Montrer la proposition suivante:

Proposition 2.6

On a équivalence entre

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (p, q \geq N) \Rightarrow (\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon).$

Exercice 6. Exemples et contre-exemples.

1 - On considère la suite de fonctions (f_n) avec:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais pas uniformément sur cet intervalle.

2 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad x \geq 0.$$

Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, mais pas normalement sur cet intervalle.

3 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}, \quad x \geq 0.$$

(a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \llbracket N, 2N \rrbracket$, on a $\frac{N}{N^2 + k^2} \geq \frac{1}{5N}$.

(c) En déduire que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |R_p(x)|$, où

$$R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x) \text{ pour tout } p \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}_+.$$

Exercice 7. Fonction ζ de Riemann.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1 - Montrer que ζ est définie sur $]1, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^$ et tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $\zeta_n(x) = \frac{1}{n^x}$.*

• Soit $x \in]1, +\infty[$. La série de terme général $\frac{1}{n^x}$ converge (série de Riemann). On en

déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

• Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^$, ζ_n est dérivable sur $[a, +\infty[$, et on a $\zeta'_n(x) = -\ln(n) \exp(-x \ln(n)) = -\ln(n) n^{-x}$ pour tout $x \in [a, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \exp(-x \ln(n))$ étant décroissante sur $[a, +\infty[$, on en déduit que:*

$$\|\zeta'_n\|_{\infty} = \sup_{[a, +\infty[} |\zeta'_n(x)| = \ln(n) n^{-a}.$$

Considérons à présent $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \rho < a$. On a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\rho} \ln(n) n^{-a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\rho-a} \ln(n) = 0$$

d'après le critère de comparaison des suites de références. On en déduit que $\ln(n)n^{-a} < \frac{1}{n^p}$ à partir d'un certain rang, et on obtient la convergence de la série de terme général $\ln(n)n^{-a}$. On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. On obtient donc le caractère $\mathcal{C}^1$ de la série sur cet intervalle en appliquant le théorème de dérivabilité des séries de fonctions.

2 - Montrer que ζ est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

D'après ce qui précède, on a, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta'_n(x).$$

Chacun des termes de cette somme étant strictement négatif, on en déduit le résultat.

3 - Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Soit $a > 1$. Par des arguments similaires à la question **1-**, on peut établir la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ sur $[a, +\infty[$. Les fonctions $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ étant continues, le théorème de continuité s'applique, et on a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta_n(x).$$

Si $n = 1$, $\zeta_n(x) = 1$ pour tout $x > a$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta_n(x) = 1$.

Si $n \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

4 - (a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a:

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x}.$$

Soit $x > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ étant décroissante sur $]1, +\infty[$, on a:

$$0 \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt \text{ pour } n \geq 2.$$

Il vient que la série de terme général $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}$ converge, et:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta \quad \text{et} \quad \zeta - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt,$$

d'où le résultat.

(b) En déduire que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1},$$

ce qui équivaut à

$$1 \leq \zeta(x) / \left(\frac{1}{x-1} \right) \leq x,$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) / \left(\frac{1}{x-1} \right) = 1$, d'où le résultat.

5 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec, pour $n \geq 1$:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}, \quad x \geq 0.$$

(a) Montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x > 0$. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^x}$ est alternée, et la suite $\left(\frac{1}{n^x} \right)$ tend vers 0 en décroissant. Le théorème des séries alternées garantit la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Par suite, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

Soit $x > 1$. Les fonctions ζ et f sont bien définies sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\begin{aligned} \zeta(x) + f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\xi_n(x) + f_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} + \frac{(-1)^n}{n^x} \right) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^x} = \frac{2}{2^x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = 2^{1-x} \zeta(x) \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

Exercice 8. Séries alternées. On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1 - Montrer que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$.

Soit $x > -1$. On étudie la série alternée de terme général $\frac{(-1)^n}{x+n}$. La suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)$ tend vers 0 en décroissant, donc on peut appliquer le théorème des séries alternées, pour obtenir la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$. On en déduit la convergence simple de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ sur $] -1, +\infty[$.

2 - Montrer que S est continue sur I .

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{x+n}$ vérifie le critère des séries alternées, et la série des restes vérifie:

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, la série des restes de converge uniformément vers 0. On en déduit la convergence uniforme de la série. Les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant continues, on applique le théorème de régularité des séries de fonctions, pour obtenir la continuité de S sur $] -1, +\infty[$.

3 - Montrer que S est dérivable sur I et calculer sa dérivée. En déduire que S est croissante.

D'après ce qui précède, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $] -1, +\infty[$. D'autre part, les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$ $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$. Par un raisonnement analogue à la question 1, on peut établir (théorème des séries alternées) que la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur $] -1, +\infty[$. Ainsi, par application du théorème de dérivation, on a pour tout $x \in I$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}.$$

Soit $x \in I$. Posons à présent $S_p(x) = \sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ et $T_p(x) = \sum_{n=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2} = S_p(x) + \frac{1}{(x+2p+1)^2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On vérifie aisément que ces deux suites sont adjacentes et convergent vers $S'(x)$. De plus, on a:

$$S_1(x) \leq S'(x) \leq T_0(x),$$

c'est à dire

$$0 \leq \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \leq S'(x) \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$

On en déduit la décroissance de S .

4 - Déterminer les limites de S en -1 et $+\infty$.

Rappelons que les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est uniformément convergente sur I . Par application du théorème de convergence des limites, on a:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x).$$

On traite séparément le cas $n = 1$, pour lequel on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-1}{x+1} = -\infty$.

Si $n > 1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(-1)^n}{x+n} = \frac{(-1)^n}{n-1}$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = -\infty$.

Un raisonnement analogue permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0$.

Exercice 9. Séries trigonométriques. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1 - Montrer cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.

Il est immédiat que pour tout entier non nul n , on a $\|f_n\| \leq \frac{1}{n^2}$. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2 - Montrer que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge simplement sur tout intervalle de la forme $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Notons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$.

Posons à présent $I_k =]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et considérons $x \in I_k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \cos(nx)$, de sorte que $f'_n(x) = u_n v_n$. Il s'agit à présent d'appliquer le théorème d'Abel pour les suites numériques.

- La suite (u_n) tend vers 0.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|u_n - u_{n+1}| = \frac{1}{n(n+1)}$. En utilisant $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, on obtient la convergence de la série de terme général $|u_n - u_{n+1}|$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $V_n = \sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=1}^n \cos(px)$. Remarquons tout d'abord que:

$$\sum_{p=1}^n \exp(ipx) = \sum_{p=1}^n \cos(ipx) + i \sum_{p=1}^n \sin(ipx),$$

et par suite $V_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{p=1}^n \exp(ipx) \right)$. En notant que $x \in I_k \Rightarrow \exp(ix) \neq 0$, on a :

$$\sum_{p=1}^n \exp(ipx) = \sum_{p=1}^n \exp(ix)^p = \exp(ix) \sum_{p=0}^{n-1} \exp(ix)^p = \exp(ix) \left(\frac{1 - \exp(inx)}{1 - \exp(ix)} \right),$$

d'où l'on tire $|V_n| = \left| \operatorname{Re} \left(\sum_{p=1}^n \exp(ipx) \right) \right| \leq \left| \sum_{p=1}^n \exp(ipx) \right| \leq \left| \frac{1 - \exp(inx)}{1 - \exp(ix)} \right|$. En utilisant

$$\begin{aligned} \frac{1 - \exp(inx)}{1 - \exp(ix)} &= \frac{\exp\left(\frac{inx}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{-inx}{2}\right) - \exp\left(\frac{inx}{2}\right) \right)}{\exp\left(\frac{ix}{2}\right) \left(\exp\left(\frac{-ix}{2}\right) - \exp\left(\frac{ix}{2}\right) \right)} \\ &= \exp\left(\frac{i(n-1)x}{2}\right) \frac{-2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \end{aligned}$$

on en conclut que $|V_n| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$, et par suite que la suite (V_n) est bornée.

Le théorème d'Abel pour les séries numériques permet de conclure que la série de terme général $u_n v_n$ converge. En conclusion, La série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge simplement sur $I_k =]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

- 3 -** Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[$, $k \in \mathbb{Z}$, avec $\varepsilon > 0$.

Indication : On pourra utiliser le théorème d'Abel pour établir la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} f'_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons à présent $I_k^\varepsilon =]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Considérons les suites de fonctions (u_n) et (v_n) définies par $u_n(x) = \frac{1}{n}$ et $v_n(x) = \cos(nx)$ pour tout $x \in I_k^\varepsilon$.

• Il est clair que pour tout $x \in I_k^\varepsilon$ la suite numérique $(u_n(x))$ est une suite décroissante de réels strictement positifs, et que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

• Considérons un entier n non nul, et posons $V_n(x) = \sum_{p=1}^n u_p(x) v_p(x)$ pour tout $x \in I_k^\varepsilon$.

Par un raisonnement analogue à la question précédente, on a $|V_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$ pour tout $x \in I_k^\varepsilon$. D'autre part :

$$x \in]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[\Rightarrow x/2 \in]k\pi + \varepsilon/2, (k+1)\pi - \varepsilon/2[\Rightarrow |\sin(x/2)| \leq \sin(k\pi + \varepsilon/2).$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I_k^\varepsilon$, $|V_n(x)| \leq M = \frac{1}{\sin(k\pi + \varepsilon/2)}$.

D'après le théorème d'Abel pour les séries de fonctions, la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $I_k^\varepsilon =]2k\pi + \varepsilon, 2(k+1)\pi - \varepsilon[$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions sur chacun de ces intervalles, ce qui permet de conclure.