Suites et séries de fonctions

Notions abordées

- *Suites de fonctions : convergence simple et uniforme.*
- *Séries de fonctions : convergence simple, uniforme, normale.*
- *Résultats de régularité pour les suites et séries.*
- *Critères de convergence (critère de Cauchy, théorème d'Abel).*
- *Applications: polynômes, théorème de Dini, fonction ζ de Riemann, séries alternées, séries trigonométriques.*

1 Suites de fonctions

1.1 Rappels de base

1.1.1 Convergence simple et uniforme

Définition 1.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction définie sur I.

• **Convergence simple**

On dit que la suite (f_n) converge ***simplement*** vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

• **Convergence uniforme**

On dit que la suite (f_n) converge ***uniformément*** vers f sur I si

$$\forall \epsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\ \forall x \in I\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Application 1.1.

1 - Montrer que la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2 - Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais que c'est le cas sur $[-1, 1]$.

Application 1.2. Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions définies par :

1 - $\forall x \in I\,,\, f_n(x) = x^n\,,$ avec $I = [0, 1]$, puis $I = [0, 1 - \epsilon]\,,\, \epsilon > 0\,.$

2 - $\forall x \in I\,,\, f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}\,,$ avec $I = [0, 1]$, puis $I = [0, 1 - \epsilon]\,,\, \epsilon > 0\,.$

3 - $\forall x \in I\,,\, f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{x + n}{x}\right)\,,$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$, puis $I =]0, M]\,,\, M > 0\,.$

1.1.2 Résultats de régularité

Théorème 1.1: Continuité

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions telle que:

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues en $x_0 \in I$.

Alors f est continue en x_0. En d'autres termes, on a:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right) .$$

Théorème 1.2: Intégration

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. On a:

$$\int_a^b f_n(t)dt \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt\,.$$

Théorème 1.3: Dérivabilité

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que:

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.
- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur I.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a $f' = g$.

1.2 Exercices d'application

Exercice 1. *Convergence uniforme et dérivabilité.* On considère la suite de fonctions définie pour $n \geqslant 1$ par:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,. \end{aligned}$$

1 - Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une fonction f que l'on précisera.

2 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 2. *Convergence uniforme et intégration.* On considère la suite de fonctions définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par:

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0,1/n] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

1 - Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément convergente.

3 - A-t-on le même résultat avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[a,1]$ avec $0 < a < 1$?

Exercice 3. *Limite uniforme de polynômes.* On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers une fonction
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1 - Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait: $|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant 1$.

2 - Soit $n \geqslant N$. Montrer que le polynôme $Q_n = P_n - P_N$ est constant.

3 - Montrer que f est un polynôme.

Exercice 4. *Théorème de Dini.* On considère (f_n) une suite croissante de fonctions continues (*i. e.* $f_n \leqslant f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) définies sur $[a,b]$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$K_n(\varepsilon) = \{x \in [a,b]\ ,\ |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}\ .$$

1 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f_n \leqslant f$, puis que $K_{n+1}(\varepsilon) \subset K_n(\varepsilon)$.

2 - Montrer que

$$\mathcal{P} := (\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, K_N(\varepsilon) = \varnothing) \Rightarrow (f_n) \text{ converge uniformément vers } f\ .$$

3 - On raisonne à présent par l'absurde, et on suppose que $\mathcal{P}$ n'est pas vérifiée.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite convergente $(x_{\Phi(n)})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_{\Phi(n)}) - f_{\Phi(n)}(x_{\Phi(n)}) \geqslant \varepsilon\ .$$

(b) Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$f(x) - f_p(x) \geqslant \varepsilon\ .$$

(c) En déduire que la convergence simple de (f_n) implique $\mathcal{P}$.

Exercice 5. *Critère de Cauchy.* Montrer la proposition suivante:

Proposition 1.1

On a équivalence entre

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.
- $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, (p, q \geqslant N) \Rightarrow (\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon)\ .$

2 Séries de fonctions

2.1 Quelques rappels de base

2.1.1 Convergence simple et uniforme, convergence normale

Définition 2.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$. On associe à $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondant à la ***suite des sommes partielles***, définie pour tout $x \in I$ par:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,.$$

- **Convergence simple et uniforme**

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge ***simplement*** (resp. ***uniformément***) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément) sur I.

- **Convergence normale**

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge ***normalement*** si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Comme dans le cas des suites, la convergence uniforme implique la convergence simple. D'autre part, la convergence normale implique la convergence uniforme (et donc aussi la convergence simple). La démonstration fait appel au critère de Cauchy (2.1.3).

Application 2.1. Montrer que la série $\sum x^{2n}$ converge simplement sur $[0,1[$, et normalement sur tout intervalle de la forme $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

Application 2.2. Etudier la convergence normale des séries de fonctions suivantes:

1 - $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}\ ,\ n \geqslant 1\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$

2 - $\displaystyle\sum \frac{1}{x^2+n^2}\ ,\ n \geqslant 1\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$

3 - $\displaystyle\sum \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^n\ ,\ n \geqslant 0\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$

Application 2.3. On considère la suite de fonctions définie pour $n \geqslant 1$ par:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^{-nx}\sin(nx)}{\ln(n+1)}\,. \end{aligned}$$

1 - Soit λ un réel strictement positif. Pour $n \geqslant 1$ on définit $u_n = n^2 \dfrac{e^{-n\lambda}}{\ln(n+1)}$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

2 - En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty]$, avec a un réel strictement positif.

2.1.2 Résultats de régularité

Il s'agit simplement de reformuler les théorèmes relatifs aux suites de fonctions dans le cadre des séries de fonctions.

Théorème 2.1: Continuité

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions telle que:

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues en $x_0 \in I$.

Alors la fonction somme $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en x_0. Plus précisément, on a:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right).$$

Théorème 2.2: Intégration

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions telle que:

- $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$.
- Toutes les f_n sont continues sur I.

Alors la fonction somme $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue sur I, et pour tout $[a, b] \subset I$, on a:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right).$$

Théorème 2.3: Dérivation

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$ telle que:

- $\sum f_n$ converge simplement vers S sur I.
- $\sum f_n'$ converge uniformément vers T sur I.

Alors S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et on a $S' = T$.

Application 2.4.

1 - Montrer que l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{(2n+1)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2 - Montrer que l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(x)}{2^n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3 - On considère la suite de fonctions définie pour $n \geqslant 1$ par:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\sin(nx)}{n^3}. \end{aligned}$$

(a) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ sur $\mathbb{R}$. On notera f sa somme.

(b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(t)dt = 2\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

(d) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(e) En déduire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(nt)}{n^2} dt = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

2.1.3 Critères de convergence

Proposition 2.1: Condition nécessaire pour la convergence uniforme

Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $I \subset \mathbb{R}$, alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur sur I.

Proposition 2.2: Caractérisation de la convergence uniforme

On considère une série de fonctions $\sum f_n$ convergeant simplement sur $I \subset \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on note $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)$ la suite des restes. Alors $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si (R_p) converge uniformément vers 0 sur I.

Proposition 2.3: Critère de Cauchy

On a équivalence entre:

- $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $I \subset \mathbb{R}$.
- $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ (n \geqslant N) \Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall x \in I\,,\ |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon)$.

Proposition 2.4: Convergence normale et convergence uniforme

Si une série de fonctions converge normalement, alors elle converge uniformément.

Proposition 2.5: Théorème d'Abel

On considère deux suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $I \subset \mathbb{R}$ telles que:

- $\forall x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.
- Les sommes partielles de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont uniformément bornées:

$$\exists\, M > 0\,,\ \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, x \in I\,,\ |g_0(x) + \cdots + g_n(x)| < M\,.$$

Alors $\sum f_n g_n$ converge uniformément.

2.2 Exercices d'application

Exercice 6. *Exemples et contrexemples.*

1 - On considère la suite de fonctions (f_n) avec:

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\,, \quad x \geqslant 0\,.$$

Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais pas uniformément sur cet intervalle.

2 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad x \geqslant 0 .$$

Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, mais pas normalement sur cet intervalle.

3 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}, \quad x \geqslant 0 .$$

(a) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in [\![N, 2N]\!]$, on a $\dfrac{N}{N^2+k^2} \geqslant \dfrac{1}{5N}$.

(c) En déduire que la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\sup_{x \in R_+} |R_p(x)|$*, où* $R_p(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} f_n(x)$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}_+$*.*

Exercice 7. *Fonction ζ de Riemann.*
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} .$$

1 - Montrer que ζ est définie sur $]1, +\infty[$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

2 - Montrer que ζ est strictement décroissante sur $[a, +\infty[$.

3 - Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

4 - **(a)** Montrer que pour tout $x > 1$ on a:

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^x} .$$

(b) En déduire que $\zeta(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

5 - On considère la série de fonctions $\sum f_n$ avec, pour $n \geqslant 1$:

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}\,, \quad x \geqslant 0\,.$$

(a) Montrer que $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que pour tout $x > 1$, on a $f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

Exercice 8. *Séries alternées.* On considère la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1 - Montrer que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$.

2 - Montrer que S est continue sur I.

3 - Montrer que S est dérivable sur I et calculer sa dérivée. En déduire que S est croissante.

4 - Déterminer les limites de S en-1 et $+\infty$.

Exercice 9. *Séries trigonométriques.* On considère la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ avec:

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1 - Montrer cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.

2 - Montrer $\sum_{n \geqslant 1} f_n^{'}$ converge simplement sur tout intervalle de la forme $]2k\pi, 2(k+1)\pi[\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

3 - Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]2k\pi+\varepsilon, 2(k+1)\pi-\varepsilon[\,,\ k \in \mathbb{Z}$, avec $\varepsilon > 0$.
Indication : On pourra utiliser le théorème d'Abel pour établir la convergence uniforme de $\sum_{n \geqslant 1} f_n^{'}$.