Suites et séries numériques

Notions abordées

Suites numériques

- *Limites de suites réelles et complexes, théorèmes d'existence*
- *Monotonie, critères de convergence*
- *Notion de suite extraite, suites adjacentes*
- *Comparaison et comportement de suites de référence*
- *Théorème de Bolzano-Weierstrass*
- *Applications: moyenne arithmético-géométrique, développement décimal d'un réel, suites géométriques complexes, suites de Cauchy*

Séries numériques

- *Critères essentiels de convergence, convergence absolue des séries, séries alternées*
- *Règles de d'Alembert et de Cauchy, théorème d'Abel*
- *Comparaison avec une intégrale*
- *Séries géométriques, séries de Riemann, séries de Bertrand*
- *Applications : convergence de séries, série harmonique, constante d'Euler, formule de Stirling*

Dans toute la suite, p et q désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \ , \ \forall x, y \in \mathbb{R}^p \ ,$$

avec des notations similaires pour $\mathbb{R}^q$. Lorsqu'il n'y pas d'ambiguité, on notera sans disctinction $\|.\|$ les normes associées sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, afin d'alléger les notations.

1 Suites numériques

1.1 Résultats fondamentaux

Dans cette partie on rappelle certains résultats essentiels concernant l'étude des suites. Il est vivement recommandé de savoir les démontrer.

1.1.1 Critères de convergence

Proposition 1.1: Un critère essentiel de convergence

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 1.2

Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Proposition 1.3: Résultats sur les suites monotones

Si (u_n) est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers $l = \sup\{u_n\,,\, n \in \mathbb{N}\}$.

Si (v_n) est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.
Si (v_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers $l = \inf\{u_n\,,\, n \in \mathbb{N}\}$.

1.1.2 Suites extraites - suites adjacentes

Définition 1.1: Suite extraite

Soit (u_n) une suite. On dit que la suite (v_n) est une ***sous-suite*** ou une ***suite extraite*** de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.4: Caractérisation de la convergence via les suites extraites

La suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ.

Proposition 1.5: Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que:

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Alors (u_n) et (v_n) ont la même limite. On dit que les suites (u_n) et (v_n) sont ***adjacentes***.

Proposition 1.6: Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

1.1.3 Comparaison des suites

Définition 1.2: Comparaison des suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que v_n est non nul à partir d'un certain rang.

- On dit que (u_n) et (v_n) sont ***équivalentes*** si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1.
  On note alors $u_n \sim v_n$.
- On dit que (u_n) est ***négligeable*** devant (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0.
  On note alors $u_n = o(v_n)$.
- On dit que (u_n) est ***dominée*** par (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
  On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Proposition 1.7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de termes strictement positifs. S'il existe $\lambda \in [0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N \ , \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \lambda \frac{v_{n+1}}{v_n} \ ,$$

alors $u_n = o(v_n)$.

Proposition 1.8: Comparaison des suites de référence

Soient α, $\beta > 0$ et $a > 1$. On considère les suites de terme général:

$u_n = (\ln(n))^\beta$, $n \geqslant 2$, $v_n = n^\alpha$, $n \geqslant 1$, $w_n = a^n$, $n \geqslant 0$, $z_n = n!$, $n \geqslant 0$.

On a $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(w_n)$ et $w_n = o(z_n)$.

1.1.4 Suites à valeurs complexes

Définition 1.3: Convergence des suites complexes

On dit que la suite complexe (z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \, \exists N \in \mathbb{N} \, , \, \forall n \geqslant N \ , \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon \, .$$

Proposition 1.9

La suite complexe (z_n) converge vers l ssi sa partie réelle (x_n) converge vers $Re(l)$ et sa partie imaginaire (y_n) converge vers $Im(l)$.

Proposition 1.10

Si la suite complexe (z_n) converge vers l alors $(|z_n|)$ converge vers $|l|$.

1.2 Exercices d'application

Exercice 1. *Suites adjacentes - irrationalité de e.* On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$.

1 - Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.

2 - Montrer que e est irrationnel.

Indication: On pourra raisonner par l'absurde en posant $e = p/q$ avec p et q entiers non nuls et utiliser $u_q < e < v_q$.

Exercice 2. *Suites adjacentes - Moyenne arithmético-géométrique.* On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \in \mathbb{R}^+ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} .$$

1 - Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$.

2 - **(a)** Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

(b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera $M(a, b)$ leur limite commune.

3 - Déterminer $M(a, 0)$ et $M(a, a)$.

4 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$.

Exercice 3. *Suite géométrique complexe.* Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère la suite de terme général $u_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1 - On suppose $|q| > 1$.

(a) Montrer que pour tout $a \geqslant 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a: $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

(b) En déduire que (u_n) diverge.

2 - On suppose à présent $|q| < 1$. Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 4. *Un classique.* On considère une suite réelle (u_n) croissante, convergeant vers l.

1 - Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est croissante.

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$.

3 - En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

Exercice 5. *Un autre classique.*

1 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x\,.$$

2 - En déduire la limite de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Exercice 6. *Développement décimal d'un réel.*

1 - Approximation décimale d'un réel.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$.

(a) Montrer que (u_n) converge vers x et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n (resp. v_n) fournit une approximation de x à 10^{-n} près par défaut (resp. par excès).

(b) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = [x]$ et $a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $n \geqslant 1$, a_n est compris entre 0 et 9.

(c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$. En déduire que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

Cette écriture est appelée **développement décimal** de x et les réels a_n sont les **chiffres** de x.

2 - Résultats de densité.

(a) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout entier relatif z, z^2 est pair si et seulement si z est pair. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

(c) En déduire que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3 - Développement décimal propre.

(a) Montrer que le développement décimal $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ obtenu dans la partie **1** est **propre**, c'est à dire que la suite (a_n) n'est pas stationnaire à 9 à partir d'un certain rang.

(b) Montrer que tout nombre réel positif admet un unique développement décimal propre.

4 - Application : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Rappel: Un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.

Indication: On montrera par l'absurde que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. En supposant qu'une application bijective $f : \mathbb{N} \to [0, 1[$ existe, on pourra considérer la suite (w_n) où w_n est la n-ième décimale de $f(n)$ et étudier la surjectivité de f.

Exercice 7. *Suites de Cauchy.* Une suite (u_n) est dite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\,,\ p,q \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon\,.$$

1 - Une propriété générale : Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

2 - Un exemple de suite de Cauchy non convergente.

On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Soient $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p > q$. Montrer que pour tout entier k vérifiant $q+1 \leqslant k \leqslant p$, on a:

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{(q+1)^{k-(q+1)}}\,.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy.

(c) Montrer que (u_n) n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (*on pourra se servir de l'exercice 1*).

3 - Cas des suites réelles.

(a) Montrer que toute suite de Cauchy réelle est bornée.

(b) Soit (u_n) une suite de Cauchy réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \{u_k\,,\ k \geqslant n\}$.

Justifier l'existence de $a_n = \inf(W_n)$ et $b_n = \sup(W_n)$, et montrer que $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$.

(c) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p \geqslant n \geqslant N$ on ait

$$\sup_{p \geqslant n} u_p \leqslant u_n + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \inf_{p \geqslant n} u_p \geqslant u_n - \varepsilon/2\,.$$

(e) En déduire que (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis que (u_n) converge.

2 Séries numériques

2.1 Quelques rappels de base

Définition 2.1: Sommes partielles

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la ***suite des sommes partielles*** (S_n) converge.

Exemple 2.1. Un premier exemple fondamental : séries géométriques Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général x^n converge ssi $|x| < 1$. Dans le cas où elle converge, sa somme est $s = \dfrac{1}{1-x}$.

Proposition 2.1: Critère essentiel de convergence

Si $\sum u_n$ converge alors (u_n) converge vers 0.

Proposition 2.2: Critère pour les suites monotones

Soit (u_n) une suite à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge ssi (S_n) est majorée.

Proposition 2.3: Critère de comparaison pour les séries à termes positifs

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang N. Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant N$, alors:

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 2.4: Comparaison avec une intégrale

Soit $f : [N_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive décroissante. La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{N_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a, pour tout $N \geqslant N_0$:

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{N}^{+\infty} f(t)dt\,.$$

Proposition 2.5: Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge ssi $\alpha > 1$.

Proposition 2.6: Séries alternées

oit $\sum u_n$ une série alternée, telle que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant. Alors $\sum u_n$ converge. De plus, le *reste d'ordre* n de la série $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et on a $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Définition 2.2: Convergence absolue

Soit (z_n) une suite complexe. On dit que la série $\sum z_n$ est ***absolument convergente*** si la série $\sum |z_n|$ converge.

Proposition 2.7

Soit (z_n) une suite (réelle ou complexe). Si $\sum z_n$ est absolument convergente alors $\sum z_n$ est convergente, et on a:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|.$$

2.2 Critères de convergence

Théorème 2.1: Critère de Cauchy

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs. On suppose que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ converge vers l. Alors

- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l < 1$, alors la série converge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème 2.2: Critère de D'Alembert

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs non nuls à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers l. Alors

- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l < 1$, alors la série converge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème 2.3: Critère d'équivalence

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème 2.4: Théorème d'Abel

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que

- La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ associée à (v_n) est bornée.
- La série $\sum |u_n - u_{n+1}|$ converge.
- La suite (u_n) converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

La démonstration repose sur les points suivants:

1 - Transformation d'Abel. Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Montrer que pour tous entiers p et q vérifiant $q \geqslant p \geqslant 0$, on a:

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p}^{q} u_k \left(V_{k+1} - V_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \left(u_k - u_{k+1}\right) V_{k+1} - u_p V_p + u_{q+1} V_{q+1} \,.$$

2 - Critère de Cauchy. On dit qu'une série $\sum w_n$ satisfait le critère de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \exists\, N \in \mathbb{N} \,,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \,,\ q \geqslant p \geqslant N \ \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} w_n \right| \leqslant \varepsilon \,.$$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques vérifiant les conditions du théorème. Monter que $\sum u_n v_n$ vérifie le critère de Cauchy. Conclure. *(Nous admettrons ici qu'une série numérique converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.)*

2.3 Exercices d'application

Exercice 8. *Convergence de séries.* Etudier la convergence des séries numériques de terme général:

(i) $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

(ii) $u_n = \dfrac{n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

(iv) $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}\sin(\alpha)^{2n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(v) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9. *Autour du critère d'équivalence*

1 - On considère (u_n) une suite de réels strictement positifs et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

(a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que dans ce cas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

(b) En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2 - On considère les séries de terme général:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N}^* .$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont équivalentes mais que les séries associées ne sont pas de même nature.

Exercice 10. *Séries de Bertrand*

Soient α, β deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$. On étudie les séries de la forme $\sum u_n$, communément appelées *séries de Bertrand*.

1 - On considère le cas $\alpha > 1$. On pose $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$. Montrer que la suite $(n^\gamma u_n)$ converge vers 0. En déduire que $\sum u_n$ converge.

2 - Montrer que si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

3 - On considère à présent le cas $\alpha = 1$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_\beta : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta} . \end{array}$$

(a) Montrer que f_β est décroissante sur un intervalle du type $]M, +\infty[$, où M est un réel que l'on précisera.

(b) Etudier la convergence de $\sum u_n$ dans les cas $\beta < 1$, $\beta > 1$ et $\beta = 1$.
Indication : On pourra penser à utiliser les résultats de comparaison avec une intégrale.

Exercice 11. *Série harmonique - constante d'Euler*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1 - (a) Montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 1$ et que $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$ pour tout $k \geqslant 2$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a: $\ln(n+1) \leqslant E_n \leqslant 1 + \ln(n)$, puis que $E_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

2 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = E_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ compris entre 0 et 1. La constante γ est appelée *constante d'Euler*.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = E_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, de limite γ.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général w_n converge.

(d) En déduire que

$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \right].$$

Exercice 12. *Formule de Stirling*

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$.

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

2 - En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent. On note l la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3 - Montrer que $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} l \sqrt{n} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

4 - On rappelle le résultat suivant (obtenu via les intégrales de Wallis - voir fiche INTÉGRATION):

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{n \left[(2n)!\right]^2}.$$

montrer que $l = \sqrt{2\pi}$.

Correction des exercices

Exercice 1. *Suites adjacentes - irrationalité de e.* On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$.

1 - Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.

2 - Montrer que e est irrationnel.

Indication: On pourra raisonner par l'absurde en posant $e = p/q$ avec p et q entiers non nuls et utiliser $u_q < e < v_q$.

Exercice 2. *Suites adjacentes - Moyenne arithmético-géométrique.* On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par:

$$\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = b \in \mathbb{R}^+ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

1 - Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$.

2 - **(a)** Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

(b) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On notera $M(a, b)$ leur limite commune.

3 - Déterminer $M(a, 0)$ et $M(a, a)$.

4 - Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$.

Exercice 3. *Suite géométrique complexe.* Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère la suite de terme général $u_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1 - On suppose $|q| > 1$.

(a) Montrer que pour tout $a \geqslant 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a: $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

(b) En déduire que (u_n) diverge.

2 - On suppose à présent $|q| < 1$. Montrer que (u_n) tend vers 0.

Exercice 4. *Un classique.* On considère une suite réelle (u_n) croissante, convergeant vers l.

1 - Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est croissante.

2 - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$.

3 - En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

Exercice 5. *Un autre classique.*

1 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\,.$$

2 - En déduire la limite de la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Exercice 6. *Développement décimal d'un réel.*

1 - Approximation décimale d'un réel.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$.

(a) Montrer que (u_n) converge vers x et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n (resp. v_n) fournit une approximation de x à 10^{-n} près par défaut (resp. par excès).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[10^n x] \leqslant 10^n x < [10^n x] + 1$, d'où l'on tire:

$$\frac{[10^n x]}{[10^n]} \leqslant x < \frac{[10^n x]}{[10^n]} + \frac{1}{[10^n]}\,,$$

c'est à dire $u_n \leqslant x < v_n$. On en déduit aussi que $0 \leqslant x - u_n < \dfrac{1}{[10^n]}$ et $0 \leqslant v_n - x \leqslant \dfrac{1}{[10^n]}$. Ainsi, (u_n) et (v_n) convergent vers x (théorème d'encadrement), et pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n (resp. v_n) fournit une approximation de x par défaut (resp. excès) de x à 10^{-n} près.

(b) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = [x]$ et $a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $n \geqslant 1$, a_n est compris entre 0 et 9.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par définition de la partie entière:

$$\begin{aligned} [10^{n+1}x] &\leqslant 10^{n+1}x &< [10^{n+1}x] + 1\,, \\ [10^n x] &\leqslant 10^n x &< [10^n x] + 1\,, \end{aligned}$$

c'est à dire:

$$\begin{aligned} 10^{n+1}u_{n+1} &\leqslant 10^{n+1}x &< 10^{n+1}u_{n+1} + 1\,, \\ 10^n u_n &\leqslant 10^n x &< 10^n u_n + 1\,, \end{aligned}$$

En particulier, on a $10^{n+1}u_{n+1} > 10^{n+1}x - 1$ et $-10^n u_n \geqslant -10^n x$, d'où l'on tire $a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n) > 10^{n+1}x - 1 - 10^{n+1}x = -1$, et donc $a_{n+1} \geqslant 0$ (on vérifie aisément que a_{n+1} est entier). Un raisonnement similaire donne $a_{n+1} < 10$, ce qui permet de conclure.

(c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

On déduit de ce qui précède que $0 \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{9}{10^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui garantit la croissance de (u_n). D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{10^{n+1}} - \dfrac{1}{10^n} + u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n - \dfrac{9}{10^{n+1}} \geqslant 0$ en vertu de ce qui précède. On en déduit la décroissance de (v_n). Enfin, la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0: ces deux suites sont donc adjacentes.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$. En déduire que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k\,(u_k - u_{k-1})}{10^k} + a_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) + a_0 \\ &= u_n - u_0 + a_0 \qquad \text{(on rappelle que } a_0 = u_0\text{)} \end{aligned}$$

On conclut en utilisant le fait que x est la limite de (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

Cette écriture est appelée **développement décimal** de x et les réels a_n sont les **chiffres** de x.

2 - Résultats de densité.

(a) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous venons d'établir que la suite (u_n) définie dans la partie précédente était une suite de rationnels convergeant vers x. Ainsi, tout réel peut s'exprimer comme limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$, ce qui signifie que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout entier relatif z, z^2 est pair si et seulement si z est pair. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Soit $z \in \mathbb{Z}$.
Si z est pair, alors $z = 2z'$ avec $z' \in \mathbb{Z}$. Donc $z^2 = 4(z')^2 = 2 \times 2(z')^2$, et z^2 est pair.
Si z^2 est pair, on peut raisonner par l'absurde pour montrer que z est pair.
Pour montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel, on raisonne par l'absurde en supposant $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p, q deux entiers non nuls premiers entre deux. On a donc $2 = p^2/q^2$, et p^2 est pair. Par suite, p est pair d'après ce qui précède. Ainsi p s'écrit sous la forme $p = 2p'$ avec p' entier. Mais alors on a $2q^2 = 4(p')^2$, et q est pair (car q^2 l'est aussi), ce qui contredit le fait que p et q soient premiers entre eux.

(c) En déduire que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons le réel $y = x + \sqrt{2}$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (y_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers y. La suite (x_n) de terme général $x_n = y_n - \sqrt{2}$ est alors une suite d'irrationnels convergeant vers $y - \sqrt{2} = x$.

3 - Développement décimal propre.

(a) Montrer que le développement décimal $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ obtenu dans la partie **1** est **propre**, c'est à dire que la suite (a_n) n'est pas stationnaire à 9 à partir d'un certain rang.

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que la suite (a_n) soit stationnaire à 9 à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$ (c'est à dire que $a_n = 9 \quad \forall n \geqslant N$). Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{N+p} &= \sum_{k=0}^{N+p} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_{N+j+1}}{10^{N+j+1}} \\ &= u_N + \frac{9}{10^{N+1}} \sum_{j=0}^{p-1} \left(\frac{1}{10}\right)^j \\ &= u_N + \frac{1}{10^N}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^p\right). \end{aligned}$$

En passant à la limite sur p, on obtient alors $x = u_N + \dfrac{1}{10^N}$, c'est à dire $x = v_N$, ce qui est en contradiction avec $x < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que le développement décimal $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ est propre.

(b) Montrer que tout nombre réel positif admet un unique développement décimal propre.

Nous allons une nouvelle fois raisonner par l'absurde. Supposons qu'il existe deux suites d'entiers distinctes (a_n) et (b_n) telles que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$. Posons

$N = \min\{n \in \mathbb{N} \quad t.q. \quad a_n \neq b_n\}$ (sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$). On a donc en particulier $a_N \neq b_N$. Sans perte de généralité, supposons que $b_N < a_N$ (c'est à dire $b_N \leqslant a_N - 1$). Supposons aussi $N \geqslant 1$ (le cas $N = 0$ ne présente pas de difficulté particulière, la contradiction venant du fait que les développements décimaux considérés impliquent $[x] = a_0 = b_0$).
Les développements décimaux étant propes, il existe $M \in \mathbb{N}, M > N$ tel que $b_N < 9$. Soit $p > M$. On a:

$$u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{b_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{M-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_M}{10^M} + \sum_{k=M+1}^{p} \frac{b_k}{10^k}.$$

Considérons alors la suite (w_n) de terme général $u_n + \dfrac{9 - b_M}{10^M}$ $, n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} w_p &= u_p + \frac{9 - b_M}{10^M} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{M-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{9}{10^M} + \sum_{k=M+1}^{p} \frac{b_k}{10^k} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_N}{10^N} + \sum_{k=N+1}^{p} \frac{9}{10^k}. \end{aligned}$$

Un calcul basique donne $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{p} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^N}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{p-N}\right) \leqslant \frac{1}{10^N}$, d'où l'on tire $w_p \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_N + 1}{10^N}$. Cette majoration étant uniforme par rapport à p, on en déduit que $\displaystyle\lim_{p\to\infty} w_p \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_N + 1}{10^N}$. Or, par définition de N, on a :

$$\lim_{p\to\infty} w_p \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b_k}{10^k} + \frac{b_N + 1}{10^N} \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_N}{10^N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} = x.$$

D'autre part, $\displaystyle\lim_{p\to\infty} w_p = \lim_{p\to\infty} u_p + \frac{9 - b_M}{10^M} > x$, et on aboutit à une contradiction $(x < x)$. Ceci permet d'établir l'unicité du développement décimal propre.

4 - Application : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Rappel: Un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans E.

Indication: On montrera par l'absurde que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. En supposant qu'une application bijective $f : \mathbb{N} \to [0, 1[$ existe, on pourra considérer la suite (w_n) où w_n est la n-ième décimale de $f(n)$ et étudier la surjectivité de f.

Supposons qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to [0, 1[$. Considérons la suite (w_n) où w_n est la n-ième décimale du développement décimal propre de $f(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit un entier b_n compris entre 0 et 8 différent de w_n. Considérons alors le

réel $x \in [0,1[$ dont le développement décimal propre est donné par $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$. Par construction, la n-ième décimale de x est différente de la n-ième décimale de $f(n)$. On en déduit, par unicité du développement décimal, que $x \neq f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui compromet la surjectivité de f.

Exercice 7. *Suites de Cauchy.* Une suite (u_n) est dite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\,,\ p,q \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon\,.$$

1 - Une propriété générale : Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$.
Soit $p,q \geqslant N$. on a: $|u_p - u_q| = |u_p - \ell + l - u_q| < |u_p - l| + |u_q - \ell| < 2 \times \varepsilon/2 = \varepsilon$.
On en déduit que (u_n) est de Cauchy.

2 - Un exemple de suite de Cauchy non convergente.

On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

(a) Soient $p,q \in \mathbb{N}$, tels que $p > q$. Montrer que pour tout entier k vérifiant $q+1 \leqslant k \leqslant p$, on a:

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{(q+1)^{k-(q+1)}}\,.$$

Soit $p,q \in \mathbb{N}$ avec $p > q$. Soit $k \in [\![q+1,p]\!]$.

- *Si $k = q+1$, alors $\frac{1}{(q+1)^{k-(q+1)}} = 1$ et l'inégalité est vérifiée.*
- *Si $k > q+1$, on a*

$$k! = (q+1)! \prod_{j=q+2}^{k} j \geqslant (q+1)!(q+1)^{k-(q+2)+1} = (q+1)!(q+1)^{k-(q+1)}\,,$$

ce qui permet de conclure.

(b) En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy.

Soit $p,q \in \mathbb{N}$ avec $p > q$. On a $u_p - u_q = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(q+1)!} \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{(q+1)^{k-(q+1)}}$.

D'autre part : $\sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{(q+1)^{k-(q+1)}} = \sum_{j=0}^{p-(q+1)} \left(\frac{1}{(q+1)}\right)^j \leqslant \frac{q+1}{q}$.

On en déduit que $u_p - u_q \leqslant \dfrac{q+1}{q}\dfrac{1}{(q+1)!} = \dfrac{1}{qq!}$.
Au final, pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$|u_p - u_q| \leqslant \max(\frac{1}{qq!}, \frac{1}{qq!}),$$

ce qui permet de conclure que $|u_p - u_q|$ *peut être rendu arbitrairement petit pour* p, q *suffisamment grands.*

(c) Montrer que (u_n) n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (*on pourra se servir de l'exercice 1*).
(u_n) *est une suite de rationnels qui converge vers une limite réelle* e *qui n'est pas rationnelle. Ainsi,* (u_n) *est de Cauchy dans* $\mathbb{Q}$ *mais ne converge pas dans* $\mathbb{Q}$.

3 - Cas des suites réelles.

(a) Montrer que toute suite de Cauchy réelle est bornée.
Soit (u_n) *une suite de Cauchy réelle. On pose* $\varepsilon = 1$. *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour* $p, q \leqslant N$, *on ait* $|u_p - u_q| < 1$. *En particulier, pour tout* $p \geqslant N$, *on a* $|u_N - u_p| < 1$, *ce qui donne* $u_N - 1 < u_p < u_N + 1$. *Posons à présent* $M = \max\{u_0, \cdots, u_N, u_N + 1\}$ *et* $m = \min\{u_0, \cdots, u_N, u_N + 1\}$. *On a par construction* $m \leqslant u_n \leqslant M$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Soit (u_n) une suite de Cauchy réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \{u_k\,,\, k \geqslant n\}$.
Justifier l'existence de $a_n = \inf(W_n)$ et $b_n = \sup(W_n)$, et montrer que $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. *Notons tout d'abord que* $W_n \subset \{u_k, k \in \mathbb{N}\} =: W$. *D'après ce qui précède,* W_n *est borné et non vide. Il admet donc une borne supérieure et une borne inférieure. On peut donc définir* $a_n = \inf(W_n)$ *et* $b_n = \sup(W_n)$.
Par définition, on a $u_n \in W_n$, *et par suite* $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$.

(c) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. *On a* $W_{n+1} = \{u_k, k \geqslant n+1\} \subset \{u_k, k \geqslant n\} = W_n$. *La suite* (W_n) *est une suite décroissante (au sens ensembliste) d'ensembles.*
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\inf(W_{n+1}) \geqslant \inf(W_n) \quad \textit{et} \quad \sup(W_{n+1}) \leqslant \sup(W_n)\,,$$

d'où l'on déduit que (a_n) *est croissante et* (b_n) *est décroissante.*

(d) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p \geqslant n \geqslant N$ on ait

$$\sup_{p \geqslant n} u_p \leqslant u_n + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \inf_{p \geqslant n} u_p \geqslant u_n - \varepsilon/2\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$. *La suite* (u_n) *étant de Cauchy, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $p, q \geqslant N$, *on ait* $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon/2$.
Soit $n \geqslant N$. *Pour tout* $p \geqslant N$, *on a* $|u_p - u - n| \leqslant \varepsilon/2$, *c'est à dire* $u_n - \varepsilon/2 \leqslant$

$u_p \leqslant \varepsilon/2 + u_n$.
Ceci étant valable pour tout $p \geqslant n$, on en déduit:

$$u_n - \varepsilon/2 \leqslant \inf_{p \leqslant n} u_p \quad \text{et} \quad \sup_{p \leqslant n} u_p \leqslant u_n + \varepsilon/2\,,$$

c'est à dire $u_n - \varepsilon/2 \leqslant a_n$ et $b_n \leqslant u_n - \varepsilon/2$.

(e) En déduire que (a_n) et (b_n) sont adjacentes, puis que (u_n) converge. *Ainsi, on a*

$$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant (u_n + \varepsilon/2) - (u_n - \varepsilon/2) = \varepsilon\,.$$

On en déduit que $(b_n - a_n)$ converge vers 0, et donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Comme on a $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut avec le théorème des gendarmes.

Exercice 8. *Convergence de séries.* Etudier la convergence des séries numériques de terme général:

(i) $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^n}\,,\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

(ii) $u_n = \dfrac{n}{2^n}\,,\ n \in \mathbb{N}$.

(iii) $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\,,\ n \in \mathbb{N}$.

(iv) $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}\sin(\alpha)^{2n}\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

(v) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}\,,\ n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9. *Autour du critère d'équivalence*

1 - On considère (u_n) une suite de réels strictement positifs et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

(a) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que dans ce cas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

(b) En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2 - On considère les séries de terme général:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ ,\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\ .$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont équivalentes mais que les séries associées ne sont pas de même nature.

Exercice 10. *Séries de Bertrand*

Soient α, β deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$. On étudie les séries de la forme $\sum u_n$, communément appelées *séries de Bertrand*.

1 - On considère le cas $\alpha > 1$. On pose $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$. Montrer que la suite $(n^\gamma u_n)$ converge vers 0. En déduire que $\sum u_n$ converge.

Notons que $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2} > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a

$$n^\gamma u_n = \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\ln(n))^\beta}\ .$$

Comme $\gamma < \alpha$, on en déduit que la suite de terme général $n^\gamma u_n$ converge vers 0.
En particulier, pour n assez grand, on a $u_n \leqslant \dfrac{1}{n^\gamma}$. La série $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ étant une série de Riemann convergente ($\gamma > 1$), on obtient la convergence de la série de terme général u_n.

2 - Montrer que si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a $nu_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}(\ln n)^\beta} = \dfrac{n^\gamma}{(\ln n)^\beta}$.
On en déduit que la suite de terme général nu_n diverge (théorème de comparaison des suites de référence). D'où l'existence d'un rang N à partir duquel $nu_n \geqslant 1$ (i.e. $u_n \geqslant 1/n$). D'après le théorème de convergence des séries à termes positifs, la série de terme général u_n diverge.

3 - On considère à présent le cas $\alpha = 1$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_\beta : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}\ . \end{array}$$

(a) Montrer que f_β est décroissante sur un intervalle du type $]M,+\infty[$, où M est un réel que l'on précisera.

Pour tout $x > 1$, on a $f'(x) = -\dfrac{\ln(x)+\beta}{x^2(\ln(x))^{\beta+1}}$, et donc $f'(x) < 0$ pour tout $x > e^{-\beta}$.

(b) Etudier la convergence de $\sum u_n$ dans les cas $\beta < 1$, $\beta > 1$ et $\beta = 1$.
Indication : On pourra penser à utiliser les résultats de comparaison avec une intégrale. *Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $N_0 \geqslant \max(e^{-\beta}, 2)$. D'après le théorème de comparaison avec une intégrale, on sait que $\displaystyle\sum_{n \geqslant N_0} \frac{1}{n(\ln(n)^\beta}$ et $\displaystyle\int_{N_0}^{\infty} \frac{1}{t(\ln(t)^\beta} dt$ sont de même nature.*

- *$\beta = 1$: Soit $N \geqslant N_0$. On a $\displaystyle\int_{N_0}^{N} \frac{1}{t(\ln(t)^\beta} dt = [\ln(\ln(t))]_{N_0}^{N} = \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(N_0))$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{N_0}^{N} \frac{1}{t(\ln(t)^\beta} dt = +\infty$, et donc que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant N_0} \frac{1}{n(\ln(n)}$ diverge.*
- *$\beta < 1$: Pour $N \geqslant N_0$, on a $\displaystyle\int_{N_0}^{N} \frac{1}{t(\ln(t)^\beta} dt = \frac{1}{1-\beta}[\ln(N)^{1-\beta} - \ln(N_0)^{1-\beta}]$. Il vient que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{N_0}^{N} \frac{1}{t(\ln(t)^\beta} dt = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant N_0} \frac{1}{n(\ln(n)}$ diverge.*
- *$\beta > 1$: La formule précédente permet d'affirmer que dans ce cas $\displaystyle\sum_{n \geqslant N_0} \frac{1}{n(\ln(n)}$ converge.*

Exercice 11. *Série harmonique - constante d'Euler*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1 - (a) Montrer que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 1$ et que $\displaystyle\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$ pour tout $k \geqslant 2$.
Considérons la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 1/x$. f est positive décroissante, et donc on a, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t \in [N, n+1]$: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n}$. En intégrant entre n et $n+1$, on a

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{n},$$

ce qui donne la première relation, ainsi que la seconde pour $k \leqslant 2$ en posant $n + 1 = k$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a: $\ln(n+1) \leqslant E_n \leqslant 1 + \ln(n)$, puis que $E_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Soit $n \geqslant 1$. La question précédente donne:

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = E_n.$$

D'autre part, pour $n \geqslant 2$, on a aussi (le cas $n = 1$ est à traiter à part):

$$E_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{n} \frac{1}{t} dt = \ln(n)\,,$$

ce qui permet de conclure.

2 - (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = E_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel γ compris entre 0 et 1. La constante γ est appelée *constante d'Euler*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{n}^{n+1} \frac{1}{t} dt = \displaystyle\int_{n}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \leqslant 0$ (en utilisant une nouvelle fois la décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+$. D'après ce qui précède, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant E_n - \ln(n) \leqslant 1\,.$$

On en déduit que (u_n) est croissante, minorée par 0 et majorée par 1, ce qui permet de conclure.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = E_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, de limite γ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt = \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt \geqslant 0$. On en déduit que (v_n) est croissante. Par ailleurs, il est évident que $(u_n - v_n)$ tend vers 0. La suite (u_n) étant convergente, on en déduit le résultat.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général w_n converge.

On considère la suite des sommes partielles définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} w_k = u_{n+1} - u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, la suite de terme général (u_n) converge, et donc la suite (S_n) converge, ce qui revient à dire que la série de terme général (w_n) converge.

(d) En déduire que

$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right].$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $S_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} w_n = \sum_{n=1}^{p} (u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=1}^{p} \left[\frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = \displaystyle\sum_{n=2}^{p+1} \left[\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$. D'après ce qui précède, la suite (S_p) converge vers $\gamma - u_1 = \gamma - 1$, ce qui donne le résultat.

Exercice 12. *Formule de Stirling*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$.

1 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}$. Il vient:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left[e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}\right] \\ &= 1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

On utilise alors $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, pour obtenir:

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2 - En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. On note l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

D'après ce qui précède, la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n := \sum_{k=1}^{n}(v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1$. On en déduit la convergence de la suite (v_n), puis de la suite (u_n) en utilisant la continuité de ln.

3 - Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} l\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

La convergence de la suite (u_n) se traduit par $l \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$, ce qui permet de conclure.

4 - On rappelle le résultat suivant (obtenu via les intégrales de Wallis - voir fiche INTÉGRATION):

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2}.$$

montrer que $l = \sqrt{2\pi}$.

On déduit de la question précédente $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} l\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *et* $2n! \underset{n\to+\infty}{\sim} l\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$.
D'autre part, la formule précédente nous donne: $\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$. *On en déduit:*

$$\sqrt{\pi} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}\left(l\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}{\sqrt{n}\left(l\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right)} = \frac{l}{\sqrt{2}},$$

ce qui permet de conclure.