# Suites et séries numériques

***Notions abordées***

**Suites numériques**

- *Limites de suites réelles et complexes, théorèmes d'existence*
- *Monotonie, critères de convergence*
- *Notion de suite extraite, suites adjacentes*
- *Comparaison et comportement de suites de référence*
- *Théorème de Bolzano-Weierstrass*
- *Applications: moyenne arithmético-géométrique, développement décimal d'un réel, suites géométriques complexes, suites de Cauchy*

**Séries numériques**

- *Critères essentiels de convergence, convergence absolue des séries, séries alternées*
- *Règles de d'Alembert et de Cauchy, théorème d'Abel*
- *Comparaison avec une intégrale*
- *Séries géométriques, séries de Riemann, séries de Bertrand*
- *Applications : convergence de séries, série harmonique, constante d'Euler, formule de Stirling*

Dans toute la suite, $p$ et $q$ désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \ , \ \forall x, y \in \mathbb{R}^p \ ,$$

avec des notations similaires pour $\mathbb{R}^q$. Lorsqu'il n'y pas d'ambiguité, on notera sans disctinction $\|.\|$ les normes associées sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$, afin d'alléger les notations.

# 1 Suites numériques

## 1.1 Résultats fondamentaux

Dans cette partie on rappelle certains résultats essentiels concernant l'étude des suites. Il est vivement recommandé de savoir les démontrer.

### 1.1.1 Critères de convergence

**Proposition 1.1: Un critère essentiel de convergence**

Toute suite convergente est bornée.

**Proposition 1.2**

Si $(u_n)$ est bornée et $(v_n)$ converge vers 0, alors la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

**Proposition 1.3: Résultats sur les suites monotones**

Si $(u_n)$ est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
Si $(u_n)$ est croissante et majorée, alors elle converge vers $l = \sup\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Si $(v_n)$ est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.
Si $(v_n)$ est décroissante et minorée, alors elle converge vers $l = \inf\{u_n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$.

### 1.1.2 Suites extraites - suites adjacentes

**Définition 1.1: Suite extraite**

Soit $(u_n)$ une suite. On dit que la suite $(v_n)$ est une ***sous-suite*** ou une ***suite extraite*** de $(u_n)$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

**Proposition 1.4: Caractérisation de la convergence via les suites extraites**

La suite $(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi toute sous-suite de $(u_n)$ converge vers $\ell$.

**Proposition 1.5: Suites adjacentes**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que:

- $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante.
- $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Alors $(u_n)$ et $(v_n)$ ont la même limite. On dit que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont ***adjacentes***.

**Proposition 1.6: Théorème de Bolzano-Weierstrass**

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

### 1.1.3 Comparaison des suites

**Définition 1.2: Comparaison des suites**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites. On suppose que $v_n$ est non nul à partir d'un certain rang.

- On dit que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont ***équivalentes*** si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1. On note alors $u_n \sim v_n$.
- On dit que $(u_n)$ est ***négligeable*** devant $(v_n)$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 0. On note alors $u_n = o(v_n)$.
- On dit que $(u_n)$ est ***dominée*** par $(v_n)$ si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

**Proposition 1.7**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de termes strictement positifs. S'il existe $\lambda \in [0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geqslant N \ , \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \lambda \frac{v_{n+1}}{v_n} \ ,$$

alors $u_n = o(v_n)$.

**Proposition 1.8: Comparaison des suites de référence**

Soient $\alpha$, $\beta > 0$ et $a > 1$. On considère les suites de terme général:

$u_n = (\ln(n))^\beta$ , $n \geqslant 2$ , $v_n = n^\alpha$ , $n \geqslant 1$ , $w_n = a^n$ , $n \geqslant 0$ , $z_n = n!$ , $n \geqslant 0$ .

On a $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(w_n)$ et $w_n = o(z_n)$ .

### 1.1.4 Suites à valeurs complexes

**Définition 1.3: Convergence des suites complexes**

On dit que la suite complexe $(z_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \, , \exists N \in \mathbb{N} \, , \forall n \geqslant N \ , \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon \, .$$

**Proposition 1.9**

La suite complexe $(z_n)$ converge vers $l$ ssi sa partie réelle $(x_n)$ converge vers $Re(l)$ et sa partie imaginaire $(y_n)$ converge vers $Im(l)$.

**Proposition 1.10**

Si la suite complexe $(z_n)$ converge vers $l$ alors $(|z_n|)$ converge vers $|l|$.

## 1.2 Exercices d'application

**Exercice 1.** *Suites adjacentes - irrationalité de e.* On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$ .

**1 -** Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. On note $e$ leur limite commune.

**2 -** Montrer que $e$ est irrationnel.

*Indication:* On pourra raisonner par l'absurde en posant $e = p/q$ avec $p$ et $q$ entiers non nuls et utiliser $u_q < e < v_q$.

**Exercice 2.** *Suites adjacentes - Moyenne arithmético-géométrique.* On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_0 = b \in \mathbb{R}^+ \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{array} \right. .$$

**1 -** Montrer que pour tous réels positifs $x$ et $y$, on a $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$.

**2 -** **(a)** Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

**(b)** Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. On notera $M(a, b)$ leur limite commune.

**3 -** Déterminer $M(a, 0)$ et $M(a, a)$.

**4 -** Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a, b)$.

**Exercice 3.** *Suite géométrique complexe.* Soit $q \in \mathbb{C}$. On considère la suite de terme général $u_n = q^n$ , $n \in \mathbb{N}$.

**1 -** On suppose $|q| > 1$.

**(a)** Montrer que pour tout $a \geqslant 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a: $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$.

**(b)** En déduire que $(u_n)$ diverge.

**2 -** On suppose à présent $|q| < 1$. Montrer que $(u_n)$ tend vers 0.

**Exercice 4.** *Un classique.* On considère une suite réelle $(u_n)$ croissante, convergeant vers $l$.

**1 -** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est croissante.

**2 -** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$.

**3 -** En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l$.

**Exercice 5.** *Un autre classique.*

**1 -** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x\,.$$

**2 -** En déduire la limite de la suite $(u_n)$ de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N}^*\,.$$

**Exercice 6.** *Développement décimal d'un réel.*

**1 - Approximation décimale d'un réel.**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de terme général $u_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$.

**(a)** Montrer que $(u_n)$ converge vers $x$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ (resp. $v_n$) fournit une approximation de $x$ à $10^{-n}$ près par défaut (resp. par excès).

**(b)** On considère la suite $(a_n)$ définie par $a_0 = [x]$ et $a_{n+1} = 10^{n+1}(u_{n+1} - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $a_n$ est compris entre 0 et 9.

**(c)** Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

**(d)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k}$. En déduire que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ .

Cette écriture est appelée **développement décimal** de $x$ et les réels $a_n$ sont les **chiffres** de $x$.

**2 - Résultats de densité.**

**(a)** Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**(b)** Montrer que pour tout entier relatif $z$, $z^2$ est pair si et seulement si $z$ est pair. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

**(c)** En déduire que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**3 - Développement décimal propre.**

**(a)** Montrer que le développement décimal $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ obtenu dans la partie **1** est **propre**, c'est à dire que la suite $(a_n)$ n'est pas stationnaire à 9 à partir d'un certain rang.

**(b)** Montrer que tout nombre réel positif admet un unique développement décimal propre.

**4 - Application : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.**

*Rappel:* Un ensemble $E$ est dénombrable s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $E$.

*Indication:* On montrera par l'absurde que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. En supposant qu'une application bijective $f : \mathbb{N} \to [0, 1[$ existe, on pourra considérer la suite $(w_n)$ où $w_n$ est la n-ième décimale de $f(n)$ et étudier la surjectivité de $f$.

**Exercice 7.** *Suites de Cauchy.* Une suite $(u_n)$ est dite de Cauchy si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\,,\ p,q \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon\,.$$

**1 - Une propriété générale :** Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

**2 - Un exemple de suite de Cauchy non convergente.**

On considère la suite $(u_n)$ de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

**(a)** Soient $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p > q$. Montrer que pour tout entier $k$ vérifiant $q + 1 \leqslant k \leqslant p$, on a:

$$\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(q+1)!}\frac{1}{(q+1)^{k-(q+1)}}\,.$$

**(b)** En déduire que la suite $(u_n)$ est de Cauchy.

**(c)** Montrer que $(u_n)$ n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (*on pourra se servir de l'exercice 1*).

**3 - Cas des suites réelles.**

**(a)** Montrer que toute suite de Cauchy réelle est bornée.

**(b)** Soit $(u_n)$ une suite de Cauchy réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \{u_k\,,\ k \geqslant n\}$ .

Justifier l'existence de $a_n = \inf(W_n)$ et $b_n = \sup(W_n)$, et montrer que $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$.

**(c)** Montrer que $(a_n)$ est croissante et que $(b_n)$ est décroissante.

**(d)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p \geqslant n \geqslant N$ on ait

$$\sup_{p \geqslant n} u_p \leqslant u_n + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad \inf_{p \geqslant n} u_p \geqslant u_n - \varepsilon/2\,.$$

**(e)** En déduire que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes, puis que $(u_n)$ converge.

# 2 Séries numériques

## 2.1 Quelques rappels de base

**Définition 2.1: Sommes partielles**

Soit $(u_n)$ une suite réelle ou complexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la ***suite des sommes partielles*** $(S_n)$ converge.

**Exemple 2.1.** Un premier exemple fondamental : séries géométriques Soit $x \in \mathbb{R}$. La série de terme général $x^n$ converge ssi $|x| < 1$. Dans le cas où elle converge, sa somme est $s = \dfrac{1}{1-x}$.

**Proposition 2.1: Critère essentiel de convergence**

Si $\sum u_n$ converge alors $(u_n)$ converge vers 0.

**Proposition 2.2: Critère pour les suites monotones**

Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs. La série $\sum u_n$ converge ssi $(S_n)$ est majorée.

**Proposition 2.3: Critère de comparaison pour les séries à termes positifs**

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang $N$. Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant N$, alors:

- Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

**Proposition 2.4: Comparaison avec une intégrale**

Soit $f : [N_0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ positive décroissante. La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{N_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a, pour tout $N \geqslant N_0$:

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{N}^{+\infty} f(t)dt\,.$$

**Proposition 2.5: Séries de Riemann**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ , $n \in \mathbb{N}^*$ converge ssi $\alpha > 1$.

**Proposition 2.6: Séries alternées**

oit $\sum u_n$ une série alternée, telle que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant. Alors $\sum u_n$ converge. De plus, le *reste d'ordre n* de la série $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de $u_{n+1}$ et on a $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

**Définition 2.2: Convergence absolue**

Soit $(z_n)$ une suite complexe. On dit que la série $\sum z_n$ est ***absolument convergente*** si la série $\sum |z_n|$ converge.

**Proposition 2.7**

Soit $(z_n)$ une suite (réelle ou complexe). Si $\sum z_n$ est absolument convergente alors $\sum z_n$ est convergente, et on a:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|.$$

## 2.2 Critères de convergence

**Théorème 2.1: Critère de Cauchy**

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs. On suppose que la suite $\left(\sqrt[n]{u_n}\right)$ converge vers $l$. Alors

- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l < 1$, alors la série converge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

**Théorème 2.2: Critère de D'Alembert**

On considère une série $\sum u_n$ à termes positifs non nuls à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $l$. Alors

- Si $l > 1$, alors la série diverge.
- Si $l < 1$, alors la série converge.
- Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

**Théorème 2.3: Critère d'équivalence**

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs à partir d'un certain rang. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

**Théorème 2.4: Théorème d'Abel**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques telles que

- La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ associée à $(v_n)$ est bornée.
- La série $\sum |u_n - u_{n+1}|$ converge.
- La suite $(u_n)$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

La démonstration repose sur les points suivants:

**1 - Transformation d'Abel.** Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Montrer que pour tous entiers $p$ et $q$ vérifiant $q \geqslant p \geqslant 0$, on a:

$$\sum_{k=p}^{q} u_k v_k = \sum_{k=p}^{q} u_k \left(V_{k+1} - V_k\right) = \sum_{k=p}^{q} \left(u_k - u_{k+1}\right) V_{k+1} - u_p V_p + u_{q+1} V_{q+1}\,.$$

**2 - Critère de Cauchy.** On dit qu'une série $\sum w_n$ satisfait le critère de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2\,,\ q \geqslant p \geqslant N \ \Rightarrow \left|\sum_{n=p}^{q} w_n\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites numériques vérifiant les conditions du théorème. Monter que $\sum u_n v_n$ vérifie le critère de Cauchy. Conclure. *(Nous admettrons ici qu'une série numérique converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.)*

## 2.3 Exercices d'application

**Exercice 8.** *Convergence de séries.* Etudier la convergence des séries numériques de terme général:

**(i)** $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^n}\,,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\,.$

**(ii)** $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ , $n \in \mathbb{N}$ .

**(iii)** $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ , $n \in \mathbb{N}$ .

**(iv)** $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}\sin(\alpha)^{2n}$ , $n \in \mathbb{N}^*$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**(v)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ , $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 9.** *Autour du critère d'équivalence*

**1 -** On considère $(u_n)$ une suite de réels strictement positifs et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

**(a)** Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que dans ce cas, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

**(b)** En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

**2 -** On considère les séries de terme général:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \;,\; n \in \mathbb{N}^* \;\text{ et }\; v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \;,\; n \in \mathbb{N}^* .$$

Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont équivalentes mais que les séries associées ne sont pas de même nature.

**Exercice 10.** *Séries de Bertrand*

Soient $\alpha$, $\beta$ deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$. On étudie les séries de la forme $\sum u_n$, communément appelées *séries de Bertrand.*

**1 -** On considère le cas $\alpha > 1$. On pose $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$. Montrer que la suite $(n^\gamma u_n)$ converge vers 0. En déduire que $\sum u_n$ converge.

**2 -** Montrer que si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

**3 -** On considère à présent le cas $\alpha = 1$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_\beta : & ]1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta} . \end{array}$$

**(a)** Montrer que $f_\beta$ est décroissante sur un intervalle du type $]M, +\infty[$, où $M$ est un réel que l'on précisera.

**(b)** Etudier la convergence de $\sum u_n$ dans les cas $\beta < 1$, $\beta > 1$ et $\beta = 1$.
*Indication :* On pourra penser à utiliser les résultats de comparaison avec une intégrale.

**Exercice 11.** *Série harmonique - constante d'Euler*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

**1 - (a)** Montrer que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 1$ et que $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$ pour tout $k \geqslant 2$.

**(b)** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a: $\ln(n+1) \leqslant E_n \leqslant 1 + \ln(n)$,
puis que $E_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

**2 - (a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = E_n - \ln(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\gamma$ compris entre 0 et 1. La constante $\gamma$ est appelée *constante d'Euler*.

**(b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = E_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, de limite $\gamma$.

**(c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la série de terme général $w_n$ converge.

**(d)** En déduire que

$$\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[ \frac{1}{n} - \ln\left( \frac{n}{n-1} \right) \right].$$

**Exercice 12.** *Formule de Stirling*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

**1 -** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ converge.

**2 -** En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent. On note $l$ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**3 -** Montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} l\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

**4 -** On rappelle le résultat suivant (obtenu via les intégrales de Wallis - voir fiche INTÉGRATION):

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{n\left[(2n)!\right]^2}.$$

montrer que $l = \sqrt{2\pi}$.