Fonctions de la variable réelle

Notions abordées

- *Théorème de Rolle.*
- *Théorème et inégalité des accroissements finis.*
- *Formule de Taylor-Lagrange.*
- *Théorème des valeurs intermédiaires.*
- *Théorème de point fixe, formule de la moyenne.*
- *Applications : développement limités, limites, recherche de zéros, polynômes, études de suites.*

1 Autour du théorème des valeurs intermédiaires

1.1 Résultats fondamentaux

1.1.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 1.1

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note M (resp. m) sa borne supérieure (resp. inférieure). Alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M (resp. m).

Dem: *Rappelons que par définition, M est le plus petit des majorants de A. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $M - 1/n$ n'est pas un majorant de A, et donc il existe $x_n \in A$ tel que $M - 1/n < x_n \leqslant M$. On déduit du théorème des gendarmes que la suite (x_n) ainsi construite converge vers M.*

□

Proposition 1.2: Continuité séquentielle.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in A$. Si f est une fonction définie sur A à valeurs réelles continue en ℓ, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Dem: *Soit $\varepsilon > 0$. f étant continue en ℓ, on a:*

$$\exists \eta > 0 \quad , \quad \forall x \in A \quad , \quad |x - \ell| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon \, .$$

La suite (x_n) converge vers ℓ, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \eta$ pour tout $n \geqslant N$. On en déduit que $|f(x_n) - f(\ell)| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, et donc la convergence de $(f(x_n)))$ vers $f(\ell)$.

□

Théorème 1.1: Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur un intervalle I, et a, b deux réels dans I avec $a < b$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Dem: *Quitte à considérer $g = -f$, on suppose $f(a) \leqslant f(b)$. Soit $k \in [f(a), f(b)]$. Si $f(a) = f(b)$, alors $c = a$ ou $c = b$ convient. Supposons donc $f(a) < f(b)$, et notons:*

$$A = \{x \in [a, b] \quad , \quad f(x) \leqslant k\} \, .$$

A est un sous-ensemble non vide ($a \in A$ car $f(a) \leqslant k$) de $[a, b]$ (et donc majoré par b). Ainsi, A admet une borne supérieure, que l'on notera M. On va établir que $f(M) \leqslant k$ et $f(M) \geqslant k$, ce qui permettra de conclure que $f(M) = k$.

- *$\underline{f(M) \leqslant k:}$ On a $M = sup(A)$, donc il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers M. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in A$, et donc $f(x_n) \leqslant k$. f étant continue en M, on peut passer à la limite sur ces inégalités, et on déduit $f(M) \leqslant k$.*

- *$\underline{f(M) \geqslant k:}$ Si $M = b$, on a immédiatement $f(M) = f(b) \geqslant k$. Supposons $M < b$. M étant la borne inférieure de l'intervalle $]M, b]$, il existe une suite (y_n) d'éléments de $]M, b]$ qui converge vers M. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n > M$ donc $y_n \notin A$, c'est à dire $f(y_n) > k$. Comme précédemment, en passant à la limite, on obtient $f(M) \geqslant k$.*

□

1.1.2 Image d'un intervalle par une fonction continue.

A titre d'exercice d'application, on pourra démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 1.2

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Dem: *Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, il suffit de montrer que $[y_1, y_2] \subset f(I)$ pour tout couple (y_1, y_2) dans $f(I)$ tel que $y_1 < y_2$. Considérons donc un tel couple. On a $y_1 = f(a)$ et $y_2 = f(b)$ avec $a, b \in I$.*
Soit $\lambda \in [y_1, y_2]$, c'est à dire $f(a) \leqslant \lambda \leqslant f(b)$. I étant un intervalle, f est continue sur l'intervalle J d'extrémités a, b. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'un réel $c \in J \subset I$ tel que $f(c) = \lambda$. Par suite, $\lambda \in f(I)$, et donc, λ étant arbitraire, $[y_1, y_2] \subset f(I)$.

□

Théorème 1.3

Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Dem: *On peut montrer dans un premier temps que f est bornée en raisonnant par l'absurde : supposons f non bornée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. La suite (x_n) est une suite d'éléments de l'intervalle $[a, b]$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge dans $[a, b]$. Notons ℓ cette limite. f étant continue, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(\ell)$. Or, pour tout n, on a $\varphi(n) \geqslant n$ et donc $f(x_{\varphi(n)}) > n$, ce qui apporte une contradiction. Ainsi, f est bornée.*
Il reste à établir que les bornes sont atteintes. Notons $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. D'après la Proposition 1.1, il existe une suite (ξ_n) d'éléments de $[a, b]$ telle que $(f(x_n))$ converge vers M. D'autre part, on peut extraire de cette suite une sous-suite $(x_{\psi(n)})$ qui converge vers $\lambda \in [a, b]$, et la continuité de f assure que la suite $(f(x_{\psi(n)}))$ converge vers $f(\lambda)$. On déduit de ceci que $f(\lambda) = M$, et donc la borne supérieure est atteinte.
Un raisonnement analogue permet de montrer que c'est aussi le cas pour la borne inférieure.

□

Théorème 1.4

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Dem: *Ce résultat est une conséquence immédiate des deux théorèmes précédents.*

□

Application 1.1. *Un théorème du point fixe.* Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in [a, b]$. A noter que g est continue sur $[a, b]$, et que, f étant à valeurs dans $[a, b]$, on a $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est à dire $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est à dire $f(c) = c$.

Application 1.2. *Première formule de la moyenne.* Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que si g est positive sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Notons tout d'abord que si g est nulle, l'égalité est évidente. Supposons donc g non identiquement nulle. On a alors $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ (exercice). f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes. En notant m la borne inférieure et M la borne supérieure de f sur $[a, b]$, on pose $m = f(x_m)$ et $M = f(x_M)$ avec $x_m, x_M \in [a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a:

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)\,,$$

d'où l'on tire:

$$f(x_m)\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

En divisant cette dernière égalité par $\int_a^b g(x)\,dx > 0$, on applique le théorème des valeurs intermédiaires à f pour obtenir l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$, d'où le résultat.

Application 1.3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul, il existe $c_n \in [0, 1 - 1/n]$ tel que:

$$f(c_n) = f\left(c_n + 1/n\right)\,.$$

Indication : on pourra considérer la fonction f_n définie sur $[0, 1 - 1/n]$ par

$$f_n(x) = f(x + 1/n) - f(x)\,,$$

et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

On a:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_n(k/n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = f(1) - f(0) = 0\,.$$

L'égalité précédente implique qu'il existe $k_1, k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $f_n\left(\frac{k_1}{n}\right) \leqslant 0$ et $f_n\left(\frac{k_2}{n}\right) \geqslant 0$ (dans le cas contraire, on aurait $f_n\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ ou $f_n\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, ce qui proscrit pas la nullité de la somme). Le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe $c_n \in [\![0, 1 - 1/n]\!]$ tel que $f_n(c_n) = 0$, c'est à dire $f(c_n + 1/n) = f(c_n)$.

(b) Montrer que si on remplace $1/n$ par un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$ le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0,1]$ par:

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right].$$

Notons que f est continue sur $[0,1]$ comme somme et produit de fonctions continues sur cet intervalle. D'autre part, $f(0) = f(1) = 1$. Soit $c \in [0, 1-\alpha]$. On a d'une part:

$$f(c) = \cos\left(\frac{2\pi c}{\alpha}\right) - c\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right),$$

et d'autre part:

$$\begin{aligned} f(c+\alpha) &= \cos\left(\frac{2\pi(c+\alpha)}{\alpha}\right) - (c+\alpha)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi c}{\alpha} + 2\pi\right) - c\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) - \alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) \\ &= f(c) - \alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right). \end{aligned}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} f(c+\alpha) - f(c) = 0 &\Leftrightarrow \alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\pi}{\alpha} = 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 1/\alpha = k \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\alpha > 0$ et $1/\alpha \notin \mathbb{N}$ donc on ne peut avoir $f(c+\alpha) = f(c)$. Il n'existe donc pas de $c \in [0, 1-\alpha]$ tel que $f(c+\alpha) = f(c)$.

2 Théorème de Rolle et corollaires

2.1 Théorème de Rolle

Théorème 2.1: Théorème de Rolle.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dem: *f étant continue sur $[a,b]$, l'image de $[a,b]$ par f est un segment. On pose $f([a,b]) = [m, M]$.*

- *Si $m = M$, alors f est constante, ce qui implique que f' est nulle sur $]a, b[$.*
- *Supposons $m < M$. On a donc $m < f(a)$ ou $f(a) < M$. Supposons par exemple $m < f(a)$. Il existe $k \in]a, b[$ tel que $f(k) = m$ ($k \neq b$ car $f(a) = f(b)$ et $f(k) < f(a)$). On obtient:*

$$\forall x \in]a, k[, f(x) \geqslant f(k) \Rightarrow \frac{f(x) - f(k)}{x - k} \leqslant 0\,,$$
$$\forall x \in]k, b[, f(x) \geqslant f(k) \Rightarrow \frac{f(x) - f(k)}{x - k} \geqslant 0\,.$$

f étant dérivable en k, on obtient:

$$\lim_{x \to k^-} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = f'(k) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to k^+} \frac{f(x) - f(k)}{x - k} = f'(k) \geqslant 0\,,$$

d'où l'on déduit la nullité de la dérivée en k. Un raisonnement analogue permet de conclure dans le cas $f(a) < M$.

□

Remarque 2.1. La condition f continue sur $[a, b]$ et f dérivable sur $]a, b[$ sont des conditions nécessaires.

Pour illustrer le caractère essentiel de la condition de continuité, on considère

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x \text{ si } & x < 1\,, \\ 0 \text{ si } & x = 1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

On a $f(0) = f(1) = 0$, et la dérivée de f ne s'annule en aucun point où elle est définie. Un exemple impliquant une fonction continue mais pas dérivable est donné par la restriction de la fonction valeur absolue sur $[-1, 1]$.

2.2 Théorème et inégalité des accroissements finis

Théorème 2.2: Théorème des accroissements finis.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Dem: *On considère la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(b) - f(x) - (b - x)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ pour tout $x \in [a, b]$. g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On a $g(a) = f(b) - f(a) - (b - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ et $g(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est à dire tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.*

□

Théorème 2.3: Inégalité des accroissements finis.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe m, $M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors:

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Dem: *Conséquence immédiate du théorème des accroissements finis.*

□

2.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 2.4: Formule de Taylor-Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^m$ sur $[a,b]$ avec $m > n$, continue sur $[a,b]$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,.$$

Indication : on pourra considérer la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k + A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

avec $A \in \mathbb{R}$ convenablement choisi.

Dem: *On cherche à appliquer le théorème de Rolle à la fonction Ψ, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a $\Psi(b) = f(b) - f(b) = 0$. On détermine le réel A de sorte que $\Psi(a) = 0$, ce qui donne:*

$$A\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - f(b)\,. \tag{1}$$

En appliquant le théorème de Rolle à Ψ, on obtient l'existence d'un $c \in]a,b[$ tel que $\Psi'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} \Psi'(c) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}k(b-c)^{k-1} - A\frac{(b-c)^n}{n!} \\ &= -\sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(b-c)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(b-c)^{k-1} - A\frac{(b-c)^n}{n!} \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n - A\frac{(b-c)^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi'(c) = 0 \Leftrightarrow A = -f^{(n+1)}(c)$. *Par suite, avec (1):*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

□

2.4 Cas des fonctions à valeurs complexes

On considère à présent le cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'inégalité des accroissements s'étend de la manière suivante:

Théorème 2.5: Inégalité des accroissements finis (version complexe).

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

Indication : on pourra poser $z = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \rho e^{i\theta}$ *et* $\varphi(x) = f(x)e^{-i\theta}$*, puis appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction à valeurs réelles convenablement choisie.*

Dem: *Soit* $z = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. *On pose* $z = \rho e^{i\theta}$ *avec* $\rho \geqslant 0$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$. *Considérons alors la fonction:*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)e^{-i\theta} \end{array}$$

On a $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)e^{-i\theta} = \rho e^{i\theta}e^{-i\theta} = \rho$. *Ainsi,* $\left|\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}\right| = Re\left(\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}\right) = \dfrac{\varphi_1(b)-\varphi_1(a)}{b-a}$ *où* $\varphi_1 = Re(\varphi)$. *Notons alors que* φ *(et donc aussi* φ_1*) est continue sur* $[a,b]$*, dérivable sur* $]a,b[$ *car* f *l'est aussi. D'autre part:*

$$\forall x \in]a,b[\,,\ |\varphi_1'(x)| \leqslant |\varphi'(x)| \leqslant |f'(x)| \leqslant M\,.$$

On peut alors appliquer le théorème des accroissements finis à φ_1*, qui donne* $|\varphi_1(b)-\varphi_1(a)| \leqslant M|b-a|$. *Par suite:*

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = \left|\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}\right| = \frac{\varphi_1(b)-\varphi_1(a)}{b-a} \leqslant M\,,$$

d'où le résultat.

□

Remarque 2.2. Donner un exemple montrant que le théorème de Rolle n'est plus valable dans le cadre des fonctions à valeurs complexes.

Il suffit de considérer la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ix}$*, de dérivée* $f'(x) = ie^{ix}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *On a* $f(0) = f(2\pi)$*, mais la dérivée ne s'annule pas (fonction à valeurs dans le disque unité).*

3 Exercices d'application

Exercice 1. *Calcul de limites.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(1/x)$.

1 - Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c_x^2} \exp(1/c_x) .$$

2 - Montrer que la fonction $g : x \to \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 - En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = 1$.

Exercice 2. *Développements limités.*

1 - Démontrer le résultat suivant:

Lemme 3.1

Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in I$:

$$|f(x)| \leqslant M|x|^p .$$

Si f possède une primitive F sur I alors:

$$|F(x) - F(0)| \leqslant M|x|^{p+1} \text{ et } F(x) = F(0) + o(x^p)$$

au voisinage de 0.

2 - Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de sin.

3 - **(a)** Montrer qu'il existe un intervalle $I \subset]-1, 1[$ contenant 0 tel que:

$$\left|\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2)\right| \leqslant \frac{3}{2}|x|^3 \quad , \ \forall x \in I .$$

(b) En déduire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$.

Exercice 3. *Etude de suites.*
On considère les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}\,.$$

2 - En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont équivalentes en $+\infty$.

Exercice 4. *Recherche de zéros d'une fonction, dérivabilité.*

1 - Soit $f : I \to \mathbb{R}$, n fois dérivable.
Montrer que si f s'annule $n+1$ fois alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

2 - Soit P un polynôme de degré $n+1$ admettant $n+1$ racines réelles distinctes.

(a) Montrer que P' possède exactement n racines réelles distinctes.

(b) Montrer que le polynôme P^2+1 ne possède que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

3 - Soit $f : I \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. Soient a, b, c trois points distincts de I. Etant donnés trois réels $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$, on considère le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$P(x) = \lambda_a(x-b)(x-c) + \lambda_b(x-c)(x-a) + \lambda_c(x-a)(x-b)\,.$$

(a) Déterminer $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ tels que

$$P(a) = (b-a)f(a) \quad , \quad P(b) = (b-a)f(b) \quad , \quad P(c) = (b-a)f(c)\,.$$

(b) En déduire qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d)\,.$$

Exercice 5. *Un second théorème du point fixe.*

1 - On se propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.1: Théorème du point fixe de Picard.

Soit f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$, $k-$lipschitzienne avec $k<1$. La suite définie par

$$x_0 \in [a,b]\ ,\ x_{n+1} = f(x_n)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

converge vers l'unique solution α dans $[a,b]$ de l'équation $f(x)=x$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \alpha| \leqslant k^n |x_0 - \alpha| \ \text{ et } \ |x_n - \alpha| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|\ .$$

(a) Montrer que f admet un point fixe et que ce point fixe est unique.

(b) Montrer que $|x_n - \alpha| \leqslant k^n |x_0 - \alpha|\ , \forall n \in \mathbb{N}\,.$

(c) Montrer que $|x_n - \alpha| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|\ , \forall n \in \mathbb{N}\,.$

Indication : On pourra commencer par montrer que $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|\ , \forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*\,.$

2 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)\,.$

(a) Montrer que $I=[3,4]$ est stable par f (*i.e.* $f(I) \subset I$) et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

(b) Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle I.

(c) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)\ , \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge vers α et déterminer une valeur de n permettant de donner un encadrement de α à 10^{-5} près.

Correction des exercices

Exercice 1. *Calcul de limites.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(1/x)$.

1 - Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c_x^2} \exp(1/c_x)\,.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. D'après le TAF, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$, c'est à dire $f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c_x^2} \exp\left(\frac{1}{c_x}\right)$.

2 - Montrer que la fonction $g : x \to \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il s'agit simplement de calculer la dérivée de g. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $g'(t) = -\left(2 + \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^3} \exp\left(\frac{1}{t}\right) < 0$, donc g est décroissante.

3 - En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = 1$.

D'après ce qui précède, on a, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \leqslant \frac{1}{c_x^2} \exp\left(\frac{1}{c_x}\right) \leqslant \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

En multipliant par x^2 et en utilisant la question 1, on aboutit à:

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) \leqslant x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

On utilise enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ pour conclure avec le théorème des gendarmes.

Exercice 2. *Développements limités.*

1 - Démontrer le résultat suivant:

Lemme

Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in I$:

$$|f(x)| \leqslant M|x|^p .$$

Si f possède une primitive F sur I alors:

$$|F(x) - F(0)| \leqslant M|x|^{p+1} \text{ et } F(x) = F(0) + o(x^p)$$

au voisinage de 0.

Notons tout d'abord que si f admet une primitive F sur I, alors F est continue et dérivable sur I, et on a $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
Soit $x \in I$. D'après le TAF, il existe $c \in]0, x[$(si $x > 0$) ou $c \in]x, 0[$(si $x < 0$) tel que $F(x) - F(0) = xf(c)$. On en déduit que

$$|F(x) - F(0)| = |x||f(c)| \leqslant M|x||c|^p \leqslant M|x|^{p+1} ,$$

d'où le résultat. A noter que $F(x) = F(0) + \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) = F(x) - F(0)$, et $|\varepsilon(x)| \leqslant M|x|^{p+1}$, donc $F(x) = F(0) + o(x^p)$.

2 - Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de sin.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leqslant 1$. La fonction F définie par $F(x) = -\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est une primitive de sin. Le lemme précédent s'applique donc (avec $M = 1$ et $p = 0$), et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$| - \cos(x) + 1| \leqslant |x| .$$

Considérons à présent la fonction g définie par $g(x) = 1 - \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x - \sin(x)$ est une primitive de g. Une nouvelle application du lemme (avec $M = 1$ et $p = 1$) donne alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$|x - \sin(x)| \leqslant |x|^2 .$$

De même, par de nouvelles applications successives du lemme, on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \left|\frac{x^2}{2} + \cos(x) - 1\right| \leqslant |x|^3 ,$$

puis:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad \left|\frac{x^3}{6} + \sin(x) - x\right| \leqslant |x|^4 ,$$

ce qui fournit un DL de sin à l'ordre 3 en 0 : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

3 - **(a)** Montrer qu'il existe un intervalle $I \subset]-1,1[$ contenant 0 tel que:

$$\left|\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2)\right| \leqslant \frac{3}{2}|x|^3 \quad , \ \forall x \in I\,.$$

Un calcul élémentaire donne $\left|\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2)\right| = \frac{|x|^3}{1+x}$ $(*)$ *pour tout* $x \in]-1,1[$.

En second lieu, on a $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$*, ce qui garantit l'existence d'un intervalle* $I \subset]-1,1[$ *contenant* 0 *tel que* $\left|\frac{1}{1+x}-1\right| < \frac{1}{2}$ *pour tout* $x \in I$*. En particulier, pour tout* $x \in I$*, on a* $0 < \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{3}{2}$*, ce qui, combiné à* $(*)$*, fournit le résultat demandé.*

(b) En déduire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$. *On considère la fonction* f *définie sur* I *par* $f(x) = \frac{1}{1+x}-(1-x+x^2)$*. La fonction* F *définie sur* I *par* $F(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$ *est une primitive de* f*. D'après le lemme, on a, pour tout* $x \in I$*:*

$$\left|\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\right| \leqslant \frac{3}{2}|x|^4\,.$$

On en déduit un DL à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ *en* 0*:* $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\,.$

Exercice 3. *Etude de suites.*

On considère les suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $v_n = \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}\,.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$*. On considère la fonction* f *définie sur* $[k, k+1]$ *par* $f(x) = \ln(x)$*.* f *est continue et dérivable sur* $[k,k+1]$*, et on a, pour tout* $x \in]k,k+1[$*,* $\frac{1}{k+1} < f'(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{k}$*. D'après l'IAF (qui s'applique aussi avec des inégalités strictes), on a donc*

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}\,.$$

2 - En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont équivalentes en $+\infty$.

Il s'agit de sommer les inégalités précédentes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a:
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *ce qui équivaut à:*

$$u_n + \frac{1}{n+1} - 1 < \ln(n+1) < u_n\,.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty\,.$
Par suite, la suite (u_n) étant à termes strictement positifs, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{n+1} - 1\right) < \frac{\ln(n+1)}{u_n} < 1\,.$$

La divergence de (u_n) vers $+\infty$ nous assure que le membre de gauche tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$. On conclut par le théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{u_n} = 1$, *c'est à dire que (u_n) et (v_n) sont équivalentes en $+\infty$.*

Exercice 4. *Recherche de zéros d'une fonction, dérivabilité.*

1 - Soit $f : I \to \mathbb{R}$, n fois dérivable.
Montrer que si f s'annule $n+1$ fois alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Considérons f une fonction n fois dérivable, s'annulant en $n+1$ points distincts $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.
Commençons par étudier la dérivée de f. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. On a $f(a_{k-1}) = f(a_k) = 0$. f étant continue et dérivable sur l'intervalle $[a_{k-1}, a_k]$, le théorème de Rolle nous assure l'existence d'un $b_k \in]a_{k-1}, a_k[$ tel que $f'(b_k) = 0$. L'entier k étant arbitraire dans $[\![1, n+1]\!]$, et les intervalles $]a_{k-1}, a_k[$, $k \in [\![1, n+1]\!]$ étant disjoints, on en déduit que f' s'annule en n points distincts.
Supposons à présent $n \geqslant 2$. Si l'on s'intéresse à la dérivée seconde, il suffit d'appliquer ce résultat à f' pour obtenir que f'' s'annule en $n-1$ points distincts.
De manière plus générale, une récurrence immédiate donne que pour tout entier $j \leqslant n$, $f^{(j)}$ s'annule en $n-j+1$ points distincts.
En particulier, $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

2 - Soit P un polynôme de degré $n+1$ admettant $n+1$ racines réelles distinctes.

(a) Montrer que P' possède exactement n racines réelles distinctes.

D'après ce qui précède, P' admet au moins n racines réelles distinctes. D'autre part, $deg(P') = deg(P) - 1 = n$, donc P' admet au plus n racines. On en déduit que P' admet exactement n racines réelles distinctes.

(b) Montrer que le polynôme P^2+1 ne possède que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Etude préliminaire

Notons tout d'abord que P s'écrit sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n}(X-a_k)$, où les $(a_k)_{k=0,\cdots,n}$ désignent les racines réelles de P. En particulier, $P \in \mathbb{R}[X]$.
Posons $Q = P^2+1$, et considérons α une racine de Q. On a $Q(\alpha) = (P(\alpha))^2+1$. On en déduit que α ne peut être réel. En effet, P étant un polynôme à coefficients réels, on a:
$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow P(\alpha) \in \mathbb{R} \Rightarrow (P(\alpha))^2 + 1 \geqslant 1\,.$

Raisonnons par l'absurde, en supposant que Q admette une racine multiple α. On a alors $Q'(\alpha) = 0$, c'est à dire $2PP'(\alpha) = 0$. On en déduit que α est une racine de P ou une racine de P'. Dans tous les cas, d'après la question précédente, α est réel. Ceci est en contradiction avec $Q(\alpha) = 0$ qui implique que α n'est pas réel. En conclusion, Q n'admet pas de racine multiple.

3 - Soit $f : I \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. Soient a, b, c trois points distincts de I. Etant donnés trois réels $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$, on considère le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$P(x) = \lambda_a(x-b)(x-c) + \lambda_b(x-c)(x-a) + \lambda_c(x-a)(x-b)\,.$$

(a) Déterminer $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ tels que

$$P(a) = (b-a)f(a) \quad , \quad P(b) = (b-a)f(b) \quad , \quad P(c) = (b-a)f(c)\,.$$

$P(a) = (b-a)f(a) \Leftrightarrow \lambda_a(a-b)(a-c) = (b-a)f(a) \Leftrightarrow \lambda_a = \dfrac{(b-a)}{(a-b)(a-c)}f(a)$.
On obtient de même $\lambda_b = \dfrac{(b-a)}{(b-a)(b-c)}f(b)$ et $\lambda_c = \dfrac{(b-a)}{(c-b)(c-a)}f(c)$.

(b) En déduire qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d)\,.$$

Considérons la fonction g définie par $g(x) = (b-a)f(x) - P(x)$ pour tout $x \in I$. Notons que g est deux fois dérivable en tant que somme d'un polynôme et d'une fonction deux fois dérivable. D'après ce qui précède, $g(a) = g(b) = g(c) = 0$. Les points a, b, c étant distincts, on en déduit que la dérivée seconde de g s'annule en un point $d \in I$. Or:

$$\begin{aligned} g''(d) &= (b-a)f''(d) - P''(d) = (b-a)f''(d) - 2\left(\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c\right) \\ &= (b-a)f''(d) - 2(b-a)\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right], \end{aligned}$$

de sorte que la relation $g''(d) = 0$ donne le résultat attendu.

Exercice 5. *Un second théorème du point fixe.*

1 - On se propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème: Théorème du point fixe de Picard.

Soit f une application de $[a,b]$ dans $[a,b]$, $k-$lipschitzienne avec $k<1$. La suite définie par

$$x_0 \in [a,b] \ , \ x_{n+1} = f(x_n) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

converge vers l'unique solution α dans $[a,b]$ de l'équation $f(x)=x$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \alpha| \leqslant k^n |x_0 - \alpha| \ \text{ et } \ |x_n - \alpha| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \ .$$

(a) Montrer que f admet un point fixe et que ce point fixe est unique.

Existence

Considérons la fonction g définie par $g(x) = x - f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. f étant à valeurs dans $[a,b]$, on a $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est à dire $g(a) \leqslant 0$ et $g(b) \geqslant 0$. On cherche donc à appliquer le TVI à la fonction g, ce qui garantira l'existence d'un $\alpha \in [a,b]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire $f(\alpha) = \alpha$. Pour celà, il suffit donc de montrer que g (ou f, de manière équivalente) est continue sur $[a,b]$.
On sait que f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \ , \ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \, .$$

Soit $x \in [a,b]$, et soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. D'après ce qui précède, pour tout $y \in [a,b]$ vérifiant $|x-y| \leqslant \eta$, on aura $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y| \leqslant k \times \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$. Donc f est continue en x. x étant arbitraire, f (et donc g) est continue sur $[a,b]$ et le TVI s'applique pour g.

Unicité

Supposons qu'un autre point fixe β existe. La fonction f étant k-lipschitzienne, on a:

$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant k|\alpha - \beta| \, .$$

On en déduit que $(1-k)|\alpha - \beta| \leqslant 0$, ce qui est absurde car $0 < k < 1$ et $|\alpha - \beta| > 0$.

(b) Montrer que $|x_n - \alpha| \leqslant k^n |x_0 - \alpha| \ , \forall n \in \mathbb{N}$.

Remarquons tout d'abord que l'inégalité est triviale si $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leqslant k|x_{n-1} - \alpha|$.
Une récurrence immédiate donne $|x_n - \alpha| \leqslant k^n |x_0 - \alpha|$.
La suite de terme général k^n converge vers 0 ($|k| < 1$). On en déduit que la suite (x_n) converge vers α.

(c) Montrer que $|x_n - \alpha| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Indication : On pourra commencer par montrer que $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leqslant k|x_n - x_{n-1}|$.
Comme précédemment, une récurrence immédiate donne $|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n|x_1 - x_0|$.
Notons que ce résultat reste vrai si $n = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left|\sum_{i=1}^{p}(x_{n+i} - x_{n+i-1})\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{p}|x_{n+i} - x_{n+i-1}| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{p}k^{n+i-1}|x_1 - x_0| \\ &\leqslant |x_1 - x_0|k^n\sum_{i=0}^{p-1}k^i \\ &\leqslant |x_1 - x_0|k^n\frac{1}{1-k}. \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient le résultat en passant à la limite sur p.

2 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

(a) Montrer que $I = [3, 4]$ est stable par f (*i.e.* $f(I) \subset I$) et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

On a $f(3) = 4 - \dfrac{\ln(3)}{4} \leqslant 4$ et $f(4) = 4 - \dfrac{\ln(4)}{4} \geqslant 3$. Pour tout $x \in [3, 4]$, on a $f'(x) = -\dfrac{1}{4x}$. On en déduit que f est décroissante et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$. On a donc : $3 \leqslant x \leqslant 4 \Rightarrow f(4) \leqslant f(x) \leqslant f(3) \Rightarrow 3 \leqslant f(x) \leqslant 4$. Donc I est sable par f.

(b) Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle I.

Notons g la restriction de f à l'intervalle $I = [3, 4]$. g est une application définie sur I, à valeurs dans I, et k-lipschitzienne avec $k = \dfrac{1}{12}$. Le théorème du point fixe nous assure que g admet un unique point fixe α dans I, et que la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers α.

(c) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge vers α et déterminer une valeur de n permettant de donner un encadrement de α à 10^{-5} près.

La convergence de (u_n) *vers* α *a été établie dans la question précédente. Prenons* $x_0 = 7/2$*, de sorte que* $|x_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}$*. D'après le théorème précédent, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $|x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^n$*. Pour avoir une approximation de* α *à* 10^{-5} *près, il suffit donc de choisir un* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^n \leqslant 10^{-5}$*, c'est à dire* $12^n \geqslant 5.10^4$*, d'où l'on tire* $n \geqslant \frac{\ln(5.10^4)}{\ln(12)}$*. Il suffit donc de prendre* $n \geqslant \left[\frac{\ln(5.10^4)}{\ln(12)}\right] + 1$.