Fonctions de la variable réelle

Notions abordées

- *Théorème de Rolle.*
- *Théorème et inégalité des accroissements finis.*
- *Formule de Taylor-Lagrange.*
- *Théorème des valeurs intermédiaires.*
- *Théorème de point fixe, formule de la moyenne.*
- *Applications : développement limités, limites, recherche de zéros, polynômes, études de suites.*

1 Autour du théorème des valeurs intermédiaires

1.1 Résultats fondamentaux

1.1.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 1.1

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On note M (resp. m) sa borne supérieure (resp. inférieure). Alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M (resp. m).

Proposition 1.2: Continuité séquentielle.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers $\ell \in A$. Si f est une fonction définie sur A à valeurs réelles continue en ℓ, alors la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Théorème 1.1: Théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur un intervalle I, et a, b deux réels dans I avec $a < b$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

1.1.2 Image d'un intervalle par une fonction continue.

A titre d'exercice d'application, on pourra démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 1.2

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème 1.3

Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 1.4

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Application 1.1. *Un théorème du point fixe.* Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

Application 1.2. *Première formule de la moyenne.* Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que si g est positive sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Application 1.3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Montrer que, pour tout entier n non nul, il existe $c_n \in [0, 1 - 1/n]$ tel que:

$$f(c_n) = f\left(c_n + 1/n\right)\,.$$

Indication : on pourra considérer la fonction f_n définie sur $[0, 1 - 1/n]$ par

$$f_n(x) = f(x + 1/n) - f(x)\,,$$

et écrire $f(1) - f(0)$ en fonction de f_n.

(b) Montrer que si on remplace $1/n$ par un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$ le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0, 1]$ par:

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]\,.$$

2 Théorème de Rolle et corollaires

2.1 Théorème de Rolle

Théorème 2.1: Théorème de Rolle.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 2.1. La condition f continue sur $[a, b]$ et f dérivable sur $]a, b[$ sont des conditions nécessaires.

2.2 Théorème et inégalité des accroissements finis

Théorème 2.2: Théorème des accroissements finis.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Théorème 2.3: Inégalité des accroissements finis.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. S'il existe m, $M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors:

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

2.3 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 2.4: Formule de Taylor-Lagrange.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^m$ sur $[a, b]$ avec $m > n$, continue sur $[a, b]$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Indication : on pourra considérer la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k + A\frac{(b - x)^{n+1}}{(n + 1)!} \end{aligned}$$

avec $A \in \mathbb{R}$ convenablement choisi.

2.4 Cas des fonctions à valeurs complexes

On considère à présent le cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'inégalité des accroissements s'étend de la manière suivante:

Théorème 2.5: Inégalité des accroissements finis (version complexe).

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|.$$

Indication : on pourra poser $z = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \rho e^{i\theta}$ *et* $\varphi(x) = f(x)e^{-i\theta}$*, puis appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction à valeurs réelles convenablement choisie.*

Remarque 2.2. Donner un exemple montrant que le théorème de Rolle n'est plus valable dans le cadre des fonctions à valeurs complexes.

3 Exercices d'application

Exercice 1. *Calcul de limites.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(1/x)$.

1 - Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, x + 1[$ tel que

$$f(x) - f(x + 1) = \frac{1}{c_x^2} \exp(1/c_x)\,.$$

2 - Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{1}{x^2} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 - En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = 1.$

Exercice 2. *Développements limités.*

1 - Démontrer le résultat suivant:

Lemme 3.1

Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $M > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in I$:

$$|f(x)| \leqslant M|x|^p .$$

Si f possède une primitive F sur I alors:

$$|F(x) - F(0)| \leqslant M|x|^{p+1} \text{ et } F(x) = F(0) + o(x^p)$$

au voisinage de 0.

2 - Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de sin.

3 - **(a)** Montrer qu'il existe un intervalle $I \subset]-1,1[$ contenant 0 tel que:

$$\left|\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2)\right| \leqslant \frac{3}{2}|x|^3 \quad , \ \forall x \in I .$$

(b) En déduire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$.

Exercice 3. *Etude de suites.*

On considère les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \ln(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1 - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} .$$

2 - En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont équivalentes en $+\infty$.

Exercice 4. *Recherche de zéros d'une fonction, dérivabilité.*

1 - Soit $f : I \to \mathbb{R}$, n fois dérivable.
Montrer que si f s'annule $n+1$ fois alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

2 - Soit P un polynôme de degré $n+1$ admettant $n+1$ racines réelles distinctes.

(a) Montrer que P' possède exactement n racines réelles distinctes.

(b) Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ ne possède que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

3 - Soit $f : I \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. Soient a, b, c trois points distincts de I. Etant donnés trois réels $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$, on considère le polynôme P défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$P(x) = \lambda_a(x-b)(x-c) + \lambda_b(x-c)(x-a) + \lambda_c(x-a)(x-b)\,.$$

(a) Déterminer $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ tels que

$$P(a) = (b-a)f(a) \quad , \quad P(b) = (b-a)f(b) \quad , \quad P(c) = (b-a)f(c)\,.$$

(b) En déduire qu'il existe $d \in I$ tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d)\,.$$

Exercice 5. *Un second théorème du point fixe.*

1 - On se propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.1: Théorème du point fixe de Picard.

Soit f une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$, $k-$lipschitzienne avec $k < 1$. La suite définie par

$$x_0 \in [a, b]\ ,\ x_{n+1} = f(x_n)\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

converge vers l'unique solution α dans $[a, b]$ de l'équation $f(x) = x$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \alpha| \leqslant k^n|x_0 - \alpha| \quad \text{et} \quad |x_n - \alpha| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|\ .$$

(a) Montrer que f admet un point fixe et que ce point fixe est unique.

(b) Montrer que $|x_n - \alpha| \leqslant k^n|x_0 - \alpha|\ , \forall n \in \mathbb{N}\,.$

(c) Montrer que $|x_n - \alpha| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|\ , \forall n \in \mathbb{N}\,.$

Indication : On pourra commencer par montrer que $|x_{n+p} - x_n| \leqslant \dfrac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|\ , \forall n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*\,.$

2 - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)\,.$

(a) Montrer que $I = [3, 4]$ est stable par f (*i.e.* $f(I) \subset I$) et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

(b) Montrer que f admet un unique point fixe α dans l'intervalle I.

(c) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)\ , \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que (u_n) converge vers α et déterminer une valeur de n permettant de donner un encadrement de α à 10^{-5} près.