
SUJET BLANC N°1

Durée : 5 heures.
Le sujet est constitué quatre problèmes indépendants.

PROBLEME I : Théorème d'approximation de Weierstrass

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème d'approximation de Weierstrass
Toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

A - Théorème de Heine

On rappelle ici la définition de la continuité uniforme ainsi que le théorème de Heine :

Définition
On dit qu'une fonction f est *uniformément continue* sur $I \subset \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall (x, y) \in I^2\,,\ |x - y| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

Théorème
Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue.

On se propose de démontrer ce théorème par l'absurde. On considère donc une application $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, mais pas uniformément continue.

1 - Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \ \text{ et } \ |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

2 - On considère à présent les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ obtenues à la question précédente.

(a) Montrer que l'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de I qui converge.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq \frac{1}{n} \ \text{ et } \ |f(x_{\psi(n)}) - f(y_{\psi(n)})| > \varepsilon.$$

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\psi(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\psi(n)}$, puis conclure.

B - Etude préliminaire

1 - Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = xn(x+y)^{n-1} \qquad \text{pour tout } n \geq 1\,,$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x^2 n(n-1)(x+y)^{n-2} \qquad \text{pour tout } n \geq 2\,.$$

Indication : on pourra utiliser la formule du binôme

2 - On considère un entier $n \geq 2$. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $k \leq n$, on pose

$$u_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)}\,.$$

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = 1 \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} k u_k(x) = nx \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1) u_k(x) = n(n-1)x^2\,.$$

3 - En déduire que pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 u_k(x) = nx(1-x)\,.$$

C - Polynômes de Bernstein

On considère une application f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$

1 - Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| u_k(x)\,.$$

Indication : on pourra utiliser la relation $\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = 1$ et multiplier par $f(x)$.

2 - Soit $\varepsilon > 0$. D'après la **partie A**, f est uniformément continue sur $[0,1]$. Par conséquent, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1] \quad , \quad |x-y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2\,.$$

Pour $x \in [0,1]$, on pose : $K_\varepsilon(x) = \{k \in [\![0,n]\!]\,,\ |k-nx| \leq n\eta_\varepsilon\}$. Montrer que

$$\sum_{k \in K_\varepsilon(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| u_k(x) \leq \varepsilon/2\,.$$

3 - On note $M = \sup\{|f(x)|\,,\ x \in [0,1]\}$.

(a) Montrer que

$$\sum_{k \notin K_\varepsilon(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| u_k(x) < 2M \sum_{k \notin K_\varepsilon(x)} \frac{(k-nx)^2}{n^2 \eta_\varepsilon^2} u_k(x) \, .$$

(b) En déduire

$$\sum_{k \notin K_\varepsilon(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| u_k(x) < \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} \, .$$

4 - En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait :

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon \, ,$$

puis conclure que la suite de polynômes (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5 - On considère à présent le cas d'une fonction continue g définie sur un intervalle $[a,b]$ quelconque. On considère la transformation affine $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ définie par $\varphi(x) = a + (b-a)x$ pour tout $x \in [0,1]$, et on note $f = g \circ \varphi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = B_n \circ \varphi^{-1}$, où B_n est le polynôme de Bernstein d'ordre n associé à f.

Montrer que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers g.

PROBLEME II : théorème de Gauss - Lucas

A - Convexité dans le plan complexe

On introduit les définitions suivantes :

- Etant donnés $a, b \in \mathbb{C}$, on définit le ***segment d'extrémités*** a et b par :

$$[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b \, , \, \lambda \in [0,1]\} \, .$$

- On dit qu'un sous-ensemble C de $\mathbb{C}$ est ***convexe*** si

$$\forall \, x, y \in C \, , [x,y] \subset C \, .$$

1 - Soient a, b deux nombres complexes. On considère le segment d'extrémités $[a,b]$.

(a) Soient $x, y \in [a,b]$. Montrer qu'il existe $\lambda_x, \lambda_y \in [0,1]$ tels que, pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = [\lambda\lambda_x + (1-\lambda)\lambda_y]a + [\lambda(1-\lambda_x) + (1-\lambda)(1-\lambda_y)]b \, .$$

(b) En déduire que $[a,b]$ est convexe.

2 - On considère $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de $\mathbb{C}$. Montrer que l'intersection $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

3 - Soit C une partie convexe de $\mathbb{C}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $x_1, \cdots, x_n \in C$ et tous $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \in C \, .$$

4 - Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les parties convexes contenant A, et on pose $Conv(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{A}} C$.

(a) Soit K un convexe contenant A. Montrer que $Conv(A) \subset K$

(b) Montrer que $Conv(A)$ est le plus petit convexe contant A. On dit que $Conv(A)$ est l'***enveloppe convexe*** de A.

B - Théorème de Gauss - Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note $a_1, \cdots, a_n$ ses n racines distinctes, de multiplicité respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$P_i = \prod_{k \neq i} (X - a_k)^{\alpha_k}.$$

1 - Montrer que $P' = c \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} P_i$, avec $c \in \mathbb{C}^*$.

2 - En déduire que $\dfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{X - a_i}$.

3 - Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P' telle que $P(a) \neq 0$.

(a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{|a - a_i|^2}(a - a_i) = 0$.

(b) En déduire l'existence de $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$.

(c) On note $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Montrer que les racines de P' sont dans $Conv(A)$.

PROBLEME III : trace et projecteurs

Pour tout ce problème, on fixe un entier $n \geq 2$ et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n.
Pour une matrice $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que sa trace, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est définie par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}.$$

1 - Montrer que pour tous A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2 - En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

3 - Pour un endomorphisme u de E, on définit sa trace comme étant la trace de la matrice de u dans une base de E. Justifier que la trace d'un endomorphisme est bien définie.

On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

4 - Soit p un projecteur de E.

(a) Vérifier que $\ker p \cap \mathrm{Im}\, p = \{0_E\}$.

(b) En déduire que $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$.

(c) En utilisant la question précédente, montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}\, p$.

(d) Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}\, u$ est-il nécessairement un projecteur ?

5 - Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ soit de la forme

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

(b) Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

(c) On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}\, u = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

(d) Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est un projecteur et déterminer son image, puis son noyau.

PROBLEME IV : endomorphismes cycliques

Soit un entier $n \geq 2$ et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Un endomorphisme u de E est dit cyclique si et seulement s'il existe un vecteur e de E tel que $(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E.

1 - Dans cette partie, on considère le cas où $E = \mathbb{R}^2$.

(a) Soient u, v et w trois endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ ayant respectivement pour matrices dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ces trois endomorphismes sont cycliques.

(b) Montrer qu'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ n'est pas cyclique si et seulement s'il existe un réel λ tel que $u = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (c'est-à-dire u est une homothétie vectorielle).

2 - Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

(a) L'endomorphisme u est-il une homothétie ?

(b) Calculer u^2.

(c) En déduire que u n'est pas cyclique.

3 - Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

(a) Vérifier que f est un endomorphisme.

(b) Montrer que pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n, le polynôme $f(X^k)$ est exactement de degré $k-1$.

(c) En déduire que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ non constant, on a

$$\deg(f(P)) = \deg(P) - 1.$$

(d) Montrer que f est cyclique.

(e) Déterminer le noyau de f.

(f) En déduire que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.