Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre printemps 2016 - 2017
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

SUJET BLANC N°1 - Correction

PROBLÈME I : Théorème d'approximation de Weierstrass

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> ***Théorème d'approximation de Weierstrass***
> Toute fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

A - Théorème de Heine

On rappelle ici la définition de la continuité uniforme ainsi que le théorème de Heine :

> ***Définition***
> On dit qu'une fonction f est *uniformément continue* sur $I \subset \mathbb{R}$ si
> $$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta > 0\,,\ \forall (x, y) \in I^2\,,\ |x - y| \leq \eta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,.$$

> ***Théorème***
> Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue.

On se propose de démontrer ce théorème par l'absurde. On considère donc une application $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$, continue, mais pas uniformément continue.

1 - Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Si f n'est pas uniformément continue, on a :

$$\exists \varepsilon > 0\,,\ \forall \eta > 0\,,\ \exists (x, y) \in [a, b]^2\,,\ |x - y| \leq \eta \ \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon\,.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant ce qui précède avec $\eta = 1/n$, il existe $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

2 - On considère à présent les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ obtenues à la question précédente.

(a) Montrer que l'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de I qui converge.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $I = [a, b]$. Elle est donc bornée, et d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_{\psi(n)}) - f(y_{\psi(n)})| > \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par construction, on a

$$|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq \frac{1}{\psi(n)} \quad \text{et} \quad |f(x_{\psi(n)}) - f(y_{\psi(n)})| > \varepsilon\,. \tag{1}$$

D'autre part, ψ étant une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on en déduit que $\psi(n) \geq n$, c'est à dire $\dfrac{1}{\psi(n)} \leq \dfrac{1}{n}$, ce qui permet de conclure.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\psi(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\psi(n)}$, puis conclure.

La suite $(x_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Notons x sa limite (notons que $x \in [a,b]$). D'après ce qui précède, $|x_{\psi(n)} - y_{\psi(n)}| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi vers x.
La fonction f étant continue en x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\psi(n)}) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_{\psi(n)}) = f(x)$, ce qui contredit la relation (1) (qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_{\psi(n)}) - f(y_{\psi(n)})| \geq \varepsilon$). On en déduit que la fonction f est uniformément continue.

B - Etude préliminaire

1 - Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = xn(x+y)^{n-1} \qquad \text{pour tout } n \geq 1\,,$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x^2 n(n-1)(x+y)^{n-2} \qquad \text{pour tout } n \geq 2\,.$$

Indication : on pourra utiliser la formule du binôme

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
Soit $n \geq 1$. La formule du binôme donne $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. En dérivant cette expression par rapport à x, on obtient :

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k}\,, \tag{2}$$

d'où l'on tire la première relation en multipliant par x.
Soit $n \geq 2$. On dérive (2) par rapport à x : $n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k}$, pour obtenir la seconde relation en multipliant par x^2.

2 - On considère un entier $n \geq 2$. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $k \leq n$, on pose

$$u_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)}\,.$$

Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = 1 \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} k u_k(x) = nx \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k(k-1) u_k(x) = n(n-1)x^2\,.$$

Il s'agit simplement d'utiliser ce qui précède avec $y = 1 - x$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)} = (x + (1-x))^n = 1\,.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k u_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{(n-k)} = nx\,(x + (1-x))^{n-1} = nx\,.$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) u_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{(n-k)} = x^2 n(n-1)\,(x + (1-x))^{n-2} = x^2 n(n-1)\,.$$

3 - En déduire que pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 u_k(x) = nx(1-x)\,.$$

On a $(k-nx)^2 = k^2 - 2knx + (nx)^2 = k(k-1) + k(1-2nx) + (nx)^2$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 u_k(x) &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) u_k(x) + (1-2nx) \sum_{k=0}^{n} k u_k(x) + (nx)^2 \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \\ &= n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2 \\ &= nx(x(n-1) + 1 - 2nx + nx) = nx(1-x)\,.\end{aligned}$$

C - Polynômes de Bernstein

On considère une application f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$

1 - Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| u_k(x)\,.$$

Indication : on pourra utiliser la relation $\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = 1$ et multiplier par $f(x)$.

Soit $x \in [0,1]$. Notons tout d'abord que $f(x) = f(x) \times \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x)$.

Par suite :

$$\begin{aligned}|f(x) - B_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right| = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \left| \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right|\,.\end{aligned}$$

2 - Soit $\varepsilon > 0$. D'après la **partie A**, f est uniformément continue sur $[0,1]$. Par conséquent, il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1] \quad , \quad |x - y| \leq \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2\,.$$

Pour $x \in [0,1]$, on pose : $K_\varepsilon(x) = \{k \in [\![0,n]\!]\,,\, |k - nx| \leq n\eta_\varepsilon\}$. Montrer que

$$\sum_{k \in K_\varepsilon(x)} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| u_k(x) \leq \varepsilon/2\,.$$

Soit $x \in [0,1]$, et soit $k \in K_\varepsilon(x)$. On a $|k - nx| \leq n\eta_\varepsilon$, c'est à dire $|k/n - x| \leq \eta_\varepsilon$. On en déduit que $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon/2$. Par suite :

$$\sum_{k\in K_\varepsilon(x)} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| u_k(x) \leq \sum_{k\in K_\varepsilon(x)} \frac{\varepsilon}{2} u_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \varepsilon/2\,.$$

3 - On note $M = \sup\{|f(x)|\,,\, x \in [0,1]\}$.

(a) Montrer que

$$\sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| u_k(x) < 2M \sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta_\varepsilon^2} u_k(x)\,.$$

Soit $k \notin K(x)$. On a $|k - nx| > n\eta_\varepsilon$, c'est à dire $\dfrac{(k-nx)^2}{(n\eta_\varepsilon)^2} > 1$. D'autre part, on a $|f(k/n) - f(x)| \leq 2M$. On en déduit :

$$\sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| u_k(x) \leq 2M \sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} u_k(x) < 2M \sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} \frac{(k-nx)^2}{n^2\eta_\varepsilon^2} u_k(x)\,. \tag{3}$$

(b) En déduire

$$\sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| u_k(x) < \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}\,.$$

*On déduit de (3) et de la question **B-3** :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| u_k(x) &< \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2} \sum_{k\notin K_\varepsilon(x)} (k-nx)^2 u_k(x) \\
&< \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 u_k(x) \\
&< \frac{2M}{n^2\eta_\varepsilon^2} nx(1-x)\,.
\end{aligned}$$

Une étude de fonctions basique donne que $\sup\{|x(1-x)|\,,\, x \in [0,1]\} = \dfrac{1}{4}$*, ce qui permet de conclure.*

4 - En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on ait :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon\,,$$

puis conclure que la suite de polynômes (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \left|\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\
&\leq \sum_{k\in K(x)} u_k(x) \left|\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| + \sum_{k\notin K(x)} u_k(x) \left|\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\eta_\varepsilon^2}\,.
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} = 0$ ce qui garantit l'existence d'un entier N_0 tel que $\dfrac{M}{2n\eta_\varepsilon^2} \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N_0$.

Ceci étant valable pour tout $x \in [0,1]$, on en déduit que pour tout $n \geq N_0$: $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-B_n(x)| \leq \varepsilon$ *. ε étant arbitraire, on en déduit que la suite* $\left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(x)|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge vers 0, c'est à dire que la suite de fonctions (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.*

5 - On considère à présent le cas d'une fonction continue g définie sur un intervalle $[a,b]$ quelconque.

On considère la transformation affine $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ définie par $\varphi(x) = a + (b-a)x$ pour tout $x \in [0,1]$, et on note $f = g \circ \varphi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = B_n \circ \varphi^{-1}$, où B_n est le polynôme de Bernstein d'ordre n associé à f.

Montrer que la suite de fonctions (P_n) converge uniformément vers g.

La fonction $f = g \circ \varphi$ est définie et continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues. D'après ce qui précède, la suite de fonctions (B_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$. En d'autres termes, la suite $\left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(x)|\right)$ *converge vers 0. L'application φ étant une bijection de $[0,1]$ dans $[a,b]$, on a :*

$$\begin{aligned}\sup_{y\in[a,b]} |g(y) - P_n(y)| &= \sup_{x\in[0,1]} |g(\varphi(x)) - P_n(\varphi(x))| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - B_n(x)| \,.\end{aligned}$$

On en déduit que $\left(\sup_{y\in[a,b]} |g(y) - P_n(y)|\right)$ *converge vers 0, autrement dit que (P_n) converge uniformément vers g sur $[a,b]$.*

PROBLÈME II : théorème de Gauss - Lucas

A - Convexité dans le plan complexe

On introduit les définitions suivantes :

- Etant donnés $a, b \in \mathbb{C}$, on définit le ***segment d'extrémités*** a et b par :

$$[a,b] = \{\lambda a + (1-\lambda)b \,,\, \lambda \in [0,1]\} \,.$$

- On dit qu'un sous-ensemble C de $\mathbb{C}$ est ***convexe*** si

$$\forall\, x, y \in C \,, [x,y] \subset C \,.$$

1 - Soient a, b deux nombres complexes. On considère le segment d'extrémités $[a,b]$.

(a) Soient $x, y \in [a,b]$. Montrer qu'il existe $\lambda_x, \lambda_y \in [0,1]$ tels que, pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = [\lambda\lambda_x + (1-\lambda)\lambda_y]a + [\lambda(1-\lambda_x) + (1-\lambda)(1-\lambda_y)]b \,.$$

$x \in [a,b] \Rightarrow \exists \lambda_x \in [0,1] \,,\, x = \lambda_x a + (1-\lambda_x)b$,
$y \in [a,b] \Rightarrow \exists \lambda_y \in [0,1] \,,\, y = \lambda_y a + (1-\lambda_y)b$.
Par suite, pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :
$\lambda x + (1-\lambda)y = [\lambda\lambda_x + (1-\lambda)\lambda_y]a + [\lambda(1-\lambda_x) + (1-\lambda)(1-\lambda_y)]b$.

(b) En déduire que $[a, b]$ est convexe.

On revient à la définition de la convexité : il s'agit d'établir que pour tous $x, y \in [a, b]$, on a $[x, y] \subset [a, b]$. Les éléments de $[x, y]$ sont de la forme $\lambda x + (1-\lambda)y$ avec $\lambda \in [0, 1]$. D'après ce qui précède, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda x + (1-\lambda)y = [\lambda\lambda_x + (1-\lambda)\lambda_y]a + [\lambda(1-\lambda_x) + (1-\lambda)(1-\lambda_y)]b\,.$$

Un calcul immédiat donne

$$[\lambda\lambda_x + (1-\lambda)\lambda_y] + [\lambda(1-\lambda_x) + (1-\lambda)(1-\lambda_y)] = 1\,. \tag{4}$$

En posant $\beta = \lambda\lambda_x + (1-\lambda)\lambda_y$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y = \beta a + (1-\beta)b$, et la relation (4) donne immédiatement $\beta \in [0, 1]$.
Au final, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1-\lambda)y \in [a, b]$, c'est à dire $[x, y] \subset [a, b]$.

2 - On considère $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de $\mathbb{C}$. Montrer que l'intersection $\bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.

Soient $x, y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Pour tout $i \in I$, on a $x, y \in C_i$, et l'ensemble C_i étant convexe, on a $[x, y] \subset C_i$. Ceci étant valable pour tout $i \in I$, on a donc $[x, y] \subset \bigcap_{i\in I} C_i$, et par suite $\bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.

3 - Soit C une partie convexe de $\mathbb{C}$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $x_1, \cdots, x_n \in C$ et tous $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \in C\,.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété est trivialement satisfaite.
Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. Considérons $x_1, \cdots, x_{n+1} \in C$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $k \leq n+1$, on note $s_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

$$\begin{aligned} v := \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1}} &= \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{s_{n+1}} + \frac{\lambda_{n+1} x_{n+1}}{s_{n+1}} \\ &= \frac{s_n}{s_{n+1}} \left(\frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{s_n} \right) + \frac{\lambda_{n+1}}{s_{n+1}} x_{n+1}\,. \end{aligned}$$

On pose alors $\lambda = \frac{s_n}{s_{n+1}}$ et $z = \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{s_n}$. Par hypothèse de récurrence, $z \in C$ et on a : $v = \lambda z + (1-\lambda)x_{n+1}$ avec $\lambda \in [0, 1]$ et $z, x_{n+1} \in C$. On conclut que $v \in C$ en invoquant la convexité de C.
Conclusion : la propriété est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

4 - Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les parties convexes contenant A, et on pose $Conv(A) = \bigcap_{C\in\mathcal{A}} C$.

(a) Soit K un convexe contenant A. Montrer que $Conv(A) \subset K$

On a $K \in \mathcal{A}$, et donc $Conv(A) = \bigcap_{C\in\mathcal{A}} C = \left(\bigcap_{C\in\mathcal{A}\setminus\{K\}} C \right) \bigcap K$. On en déduit que $Conv(A)$ est inclus dans K.

(b) Montrer que $Conv(A)$ est le plus petit convexe contant A. On dit que $Conv(A)$ est l'***enveloppe convexe*** de A.

Par construction, $Conv(A)$ contient A (intersection d'ensembles contenant A). D'après la question 2, $Conv(A)$ est convexe en tant qu'intersection de convexes. D'autre part, d'après la question précédente, $Conv(A)$ est inclus dans tout convexe contenant A. On en déduit que c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A.

B - Théorème de Gauss - Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note $a_1, \cdots, a_n$ ses n racines distinctes, de multiplicité respectives $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$P_i = \prod_{k \neq i} (X - a_k)^{\alpha_k} .$$

1 - Montrer que $P' = c \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} P_i$, avec $c \in \mathbb{C}^*$.

On écrit P sous forme factorisée : $P = c \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{\alpha_i}$ avec $c \in \mathbb{C}^*$. En utilisant la règle de dérivation des produits, on en déduit :

$$P' = c \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{k \neq i} (X - a_k)^{\alpha_k} \right) = c \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} P_i .$$

2 - En déduire que $\dfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{X - a_i}$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{P_i}{P} = \dfrac{1}{c\,(X - a_i)^{\alpha_i}}$. On en déduit :

$$\frac{P'}{P} = c \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \frac{P_i}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{X - a_i} .$$

3 - Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P' telle que $P(a) \neq 0$.

(a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{|a - a_i|^2} (a - a_i) = 0$.

$P(a)$ étant non nul, l'égalité précédente donne $P'(a)/P(a) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{a - a_i} = 0$, ce qui équivaut à $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{|a - a_i|^2} \left(\overline{a - a_i}\right) = 0$, ou encore, les $(\alpha_i)_{i=1,\cdots,n}$ étant réels : $\overline{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i}{|a - a_i|^2} (a - a_i)} = 0$, d'où le résultat.

(b) En déduire l'existence de $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$.

Pour tout $i = 1, \cdots, n$ on pose $\lambda_i = \dfrac{\alpha_i}{|a - a_i|^2} \in \mathbb{R}_+^*$. D'après ce qui précède, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a - a_i) = 0$, c'est à dire : $a \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$. Les $(\lambda_i)_{i=1,\cdots,n}$ étant non nuls, on aboutit à $a = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$.

(c) On note $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Montrer que les racines de P' sont dans $Conv(A)$.

Rappelons que $Conv(A)$ est le plus petit convexe contenant A. Considérons a une racine de P'.

*Si a est aussi une racine de P, alors $a \in A$ et donc $a \in Conv(A)$ ($Conv(A)$ contient A). Si a n'est pas racine de P, alors, d'après la question précédente, il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a = \dfrac{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$. Les éléments $a_1, \cdots, a_n$ étant dans $Conv(A)$, la question **B-3** garantit que $a \in Conv(A)$. Au final, les racines de P' sont dans $Conv(A)$.*

PROBLÈME III : trace et projecteurs

Pour tout ce problème, on fixe un entier $n \geq 2$ et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n.
Pour une matrice $A = (a_{i\,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que sa trace, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est définie par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i}.$$

1 - Montrer que pour tous A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Soient $A = (a_{i\,j})$ et $B = (b_{i\,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k\,i} a_{i\,k} \right) = \mathrm{Tr}(BA).$$

(Ci-dessus, on utilise le fait que l'on peut intervertir des sommes finies).

2 - En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe alors $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$ et ainsi, en utilisant la question 1,

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}((P^{-1}A)P) = \mathrm{Tr}(P(P^{-1}A)) = \mathrm{Tr}((PP^{-1})A) = \mathrm{Tr}(A).$$

3 - Pour un endomorphisme u de E, on définit sa trace comme étant la trace de la matrice de u dans une base de E. Justifier que la trace d'un endomorphisme est bien définie.

Les matrices d'un même endomorphisme sont semblables, donc leurs traces ne dépendent pas de la base choisie.

On appelle projecteur de E, tout endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$.

4 - Soit p un projecteur de E.

(a) Vérifier que $\ker p \cap \mathrm{Im}\, p = \{0_E\}$.

Rappelons que $\ker p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont des sous-espaces vectoriels de E ; ils contiennent en particulier 0_E.

Soit $x \in \ker p \cap \mathrm{Im}\, p$. Alors, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Comme $p \circ p = p$ on a $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ et comme $x \in \ker p$, on a $p(x) = 0_E$, d'où $x = 0_E$, ce qu'il fallait montrer.

(b) En déduire que $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$.

D'après la question précédente, les sous-espaces vectoriels $\ker p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont en somme directe. De plus, par le théorème du rang, on a $\dim \ker p + \dim \mathrm{Im}\, p = \dim E$, donc $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$.

(c) En utilisant la question précédente, montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}\, p$.

Soit $(e_1, \ldots, e_s)$ *une base de* $\ker p$ *et* $(f_1, \ldots, f_r)$ *une base de* $\mathrm{Im}\, p$. *Comme* $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$, *la famille* $(e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_r)$ *forme une base de* E. *Pour chaque* $i \in \{1, \ldots, s\}$, *on a* $p(e_i) = 0_E$ *car* $e_i \in \ker p$, *et pour chaque* $j \in \{1, \ldots, r\}$, *on a* $p(e_j) = e_j$ *car* $e_j \in \mathrm{Im}\, p$ *et* $p \circ p = p$. *Ainsi, la matrice de* p *dans la base* $(e_1, \ldots, e_s, f_1, \ldots, f_r)$ *est une matrice diagonale de rang* $r = \mathrm{rg}(p)$.

(d) Un endomorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}\, u$ est-il nécessairement un projecteur ?

Non. Prenons par exemple l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ *de matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique. Alors* $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{Tr}(A)$ *mais* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A$.

5 - Soit u un endomorphisme de E de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ soit de la forme

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Par le théorème du rang, on a $\dim \ker u = \dim E - \mathrm{rg}\, u = n - 1$. *Soit* $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ *une base de* $\ker u$ *que l'on complète en une base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *de* E. *Alors, la matrice* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ *est de la forme ci-dessus avec* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *vérifiant* $u(e_n) = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. *Remarquons pour la question suivante que* $\mathrm{Tr}(u) = \alpha_n$.

(b) Démontrer que u est diagonalisable si, et seulement si, la trace de u est non nulle.

D'après la question précédente, le polynôme caractéristique de u *vaut* $X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(u))$. *Ainsi, si* $\mathrm{Tr}(u) = 0$, *l'endomorphisme* u *a pour unique valeur propre* 0, *mais comme il n'est pas nul, il ne peut être diagonalisable.*

Par contre, si $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$, *alors* $\mathrm{Tr}(u)$ *est une seconde valeur propre de multiplicité* 1. *Comme* $\dim \ker u = n - 1$, *on a alors*

$$E = \ker u \oplus \ker(u - \mathrm{Tr}(u) Id)$$

et en particulier, u *est diagonalisable.*

(c) On suppose que $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}\, u = 1$. Démontrer que u est un projecteur.

Dans ce cas, d'après ce qui précède u *est diagonalisable de matrice diagonale* $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $u^2 = u$ *et donc* u *est un projecteur. (On pourrait aussi remarquer que* u *étant diagonalisable de valeur propre* 0 *et* 1, *alors* $X(X-1)$ *est un polynôme minimal de* u *et ainsi* $u(u-1) = 0$, *c'est-à-dire* $u^2 = u$.*)*

(d) Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est un projecteur et déterminer son image, puis son noyau.

On peut soit calculer A^2 qui vaut A, soit remarquer que $\operatorname{rg} p = 1$ car les trois lignes de A sont identiques et $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{Tr}(A) = 1 + 1 - 1 = 1$. Ainsi, p est un projecteur. Comme $\operatorname{rg} p = 1$, on a $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}((1,1,1))$. Par ailleurs, on remarque que $p(1,0,1) = p(0,1,1) = (0,0,0)$ et comme $\dim \ker p = 2$, on en déduit que $\ker p = \operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$.

PROBLÈME IV : endomorphismes cycliques

Soit un entier $n \geq 2$ et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Un endomorphisme u de E est dit cyclique si et seulement s'il existe un vecteur e de E tel que $(e, u(e), \ldots, u^{n-1}(e))$ soit une base de E.

1 - Dans cette partie, on considère le cas où $E = \mathbb{R}^2$.

(a) Soient u, v et w trois endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ ayant respectivement pour matrices dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ces trois endomorphismes sont cycliques.

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi les vecteurs $(0,1)$ et $u(0,1) = (1,0)$ forment une base de R^2 donc u est cylcique.

Le vecteur $v(1,1) = (1,2)$ n'est pas colinéaire à $(1,1)$ donc v est également cyclique.

Enfin, le vecteur $w(1,1) = (0,1)$ n'est pas non plus colinéaire à $(1,1)$ donc w est cyclique.

(b) Montrer qu'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ n'est pas cyclique si et seulement s'il existe un réel λ tel que $u = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ (c'est-à-dire u est une homothétie vectorielle).

Si u est une homothétie, alors pour tout vecteur e, le vecteur $u(e)$ est colinéaire à e donc u ne peut être cyclique.

Si u n'est pas cyclique, alors pour tout vecteur e, la famille $(e, u(e))$ n'est pas une base de R^2 et donc il existe un réel λ_e tel que $u(e) = \lambda_e e$. Alors, $u(1,1) = (\lambda_{(1,1)}, \lambda_{(1,1)})$ et $u(1,1) = u(1,0) + u(0,1) = (\lambda_{(1,0)}, 0) + (0, \lambda_{(0,1)}) = (\lambda_{(1,1)}, \lambda_{(1,1)})$. Ainsi, $\lambda_{(1,0)} = \lambda_{(1,1)} = \lambda_{(0,1)}$ et donc si on pose $\lambda = \lambda_{(1,0)}$, on a alors $u = \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

2 - Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

(a) L'endomorphisme u est-il une homothétie ?

Non, car D est diagonale avec deux valeurs propres différentes.

(b) Calculer u^2.

On vérifie facilement que $D^2 = D$ donc $u^2 = u$.

(c) En déduire que u n'est pas cyclique.

Par conséquent, si e est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, alors $u^2(e) = u(e)$ et la famille $(e, u(e), u^2(e))$ ne peut former une base de $\mathbb{R}^3$. L'endomorphisme u ne peut donc pas être cyclique.

3 - Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 1$ et on considère l'application f de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

(a) Vérifier que f est un endomorphisme.

Soit un réel λ et deux polynômes P_1, P_2 de degrés au plus n. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda P_1+P_2)(X) &= (\lambda P_1+P_2)(X+1)-(\lambda P_1+P_2)(X)\\
&= \lambda P_1(X+1)+P_2(X+1)-\lambda P_1(X)+P_2(X)\\
&= \lambda(P_1(X+1)-P_1(X))+(P_2(X+1)-P_2(X))\\
&= (\lambda f(P_1)+f(P_2))(X).
\end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

(b) Montrer que pour tout entier k compris au sens large entre 1 et n, le polynôme $f(X^k)$ est exactement de degré $k-1$.

Soit $k \in \{1, \dots n\}$. Alors,

$$f(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

Le terme de plus haut degré de $f(X^k)$ est donc $\binom{k}{k-1} X^{k-1} = kX^{k-1}$, et en particulier $f(X^k)$ est exactement de degré $k-1$.

(c) En déduire que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ non constant, on a

$$\deg(f(P)) = \deg(P) - 1.$$

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ non constant. Alors

$$P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$$

où a_i sont des réels et k le degré (non nul) de P. On a par linéarité de f,

$$f(P) = \sum_{i=0}^{k} a_i f(X^i).$$

Notons que $f(1) = 0$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le polynôme $f(X^i)$ est de degré $i-1$. Comme $a_k \neq 0$ par définition du degré de P, on en déduit que le degré de $f(P)$ est égal au degré de $f(X^k)$, c'est-à-dire à $k-1$ ou encore

$$\deg(f(P)) = \deg(P) - 1.$$

(d) Montrer que f est cyclique.

Nous allons montrer que $(X^n, f(X^n), \dots, f^n(X^n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour cela, vérifions par récurrence sur $i \in \{0, \dots, n\}$ que $\deg(f^i(X^n)) = n-i$.

Cette propriété est évidente pour $i=0$ car $f^0(X^n) = X^n$.

Soit un entier naturel $i < n$ tel que $\deg(f^i(X^n)) = n-i$. Alors par la question précédente et cette hypothèse de récurrence, on a

$$\deg(f^{i+1}(X^n)) = \deg(f(f^i(X^n))) = \deg(f^i(X^n)) - 1 = n-i-1 = n-(i+1).$$

La propriété est donc vérifiée pour $i+1$.

On a montré en particulier que les $n+1$ polynômes $f^i(X^n)$ sont de degrés distincts, ils forment donc une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Cet espace étant de dimension $n+1$, la famille $(X^n, f(X^n), \dots, f^n(X^n))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Déterminer le noyau de f.

D'après la question (c), l'image de tout polynôme non constant est non nulle. Par ailleurs, tout polynôme constant est évidemment dans le noyau de f. Il suit que le noyau de f est le sous-espace vectoriel constitué des polynômes constants, qui est de dimension 1.

(f) En déduire que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Par le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = n+1-1 = n$*. Par la question (c), on a* $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$*. Comme* $\dim \operatorname{Im} f = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$*, on en déduit que* $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.