
SUJET BLANC N°1

Durée *:* 5 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Vous les composerez sur deux copies distinctes.

PROBLEME I : Une construction de la fonction exponentielle

On s'interdit dans cette partie tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle exp, *de la fonction logarithme népérien* ln *et, par voie de conséquence, des fonctions puissances à exposant non rationnel. En revanche, les propriétés des fonctions puissance à exposant rationnel sont supposées connues.*

A - Deux inégalités fondamentales préliminaires

1. **L'inégalité de Bernoulli.**

   Pour tout réel $a > -1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$, avec égalité si et seulement si $a = 0$.

   1.1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.

   1.2. Démontrer cette inégalité dans le cas général.

2. **L'inégalité de Cauchy.**

   Pour tout entier naturel non nul n et tout $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$,
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

   2.1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.

   On cherche à présent à démontrer ce résultat dans le cas général.

   2.2. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

   (i) $1 \in A$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$.

2.2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n \in A$.

2.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall p \in [[1, 2^n]], p \in A$.

2.2.3. En déduire que $A = \mathbb{N}^*$.

2.3. On note à présent A l'ensemble des entiers naturels non nuls pour lesquels le résultat est établi (inégalité de Cauchy et cas d'égalité).

2.3.1. Montrer que $1 \in A$.

2.3.2. Soit $n \in A$. Montrer que $2n \in A$.

Indication : on pourra poser $a = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ *et* $b = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} x_k$*, puis utiliser le cas n=2 avec le 2-uplet* (a, b).

2.3.3. L'objectif est de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$. Fixons pour cela un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3.3.1. On considère un $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$. On pose $y_k = x_k$ si $k \leq n$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} y_k$

2.3.3.2. En déduire que si $n+1 \in A$ alors $n \in A$.

2.3.4. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

B - Construction et étude de la fonction exponentielle

Comme application de la partie A, on se propose de construire ex-nihilo la fonction exponentielle.

1. Soit x un nombre réel fixé. On pose $n_0(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \colon n > -x\}$ et on note, pour tout entier $n \geq n_0(x)$, $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, et pour tout entier $n \geq n_0(-x)$, $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

1.1. Montrer que pour tout $n \geq n_0(x)$, $\dfrac{1}{n+1}\left[1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\right] \geq \left[\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}$.

Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy démontrée dans la partie précédente.

1.2. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0(x)}$ est croissante.

Indication : on pourra utiliser l'égalité $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) = (n+1)\left[1 + \dfrac{x}{n+1}\right]$.

1.3. En déduire que la suite $(v_n(x))_{n \geq n_0(-x)}$ est décroissante.

1.4. On cherche à présent à démontrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ convergent vers une même limite. On considère un entier $n > |x|$.

1.4.1. Montrer que $v_n(x) \geq u_n(x) > 0$.

1.4.2. Montrer que $\left(1 - \left(\dfrac{x}{n}\right)^2\right)^n \geq 1 - \dfrac{x^2}{n}$.

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Bernoulli.

1.4.3. En déduire que $v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$, puis conclure.

2. On note ε l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un réel x associe la limite commune des suites de la question précédente. Nous admettrons dans la suite que ε est **continue** sur $\mathbb{R}$ (*se déduit de la continuité des fonctions u_n et de la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n)*).

2.1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $1+x \leq \varepsilon(x)$ et que pour tout réel $x < 1$, $\varepsilon(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.
Indication : On pourra étudier les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ puis passer à la limite dans les inégalités.

2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout $n > |x|$, $v_n(x).u_n(-x)$. En déduire que $\varepsilon(x)$ est non nul et exprimer son inverse à l'aide de ε.

2.3. Soit $(z_m)_{m\geq 1}$ une suite de nombres réels convergeant vers 0. On cherche à démontrer que la suite $\left(\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m\right)_{m\geq 1}$ converge vers 1.

2.3.1. Montrer qu'il existe un rang $M_0 \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M_0$ on ait $|z_m| < 1$ et $\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m \geq 1+z_m$.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Bernoulli.

2.3.2. Montrer que pour tout $m \geq M_0$, $\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m \leq \dfrac{1}{1-z_m}$.

2.3.3. Conclure.

2.4. Déduire de ce qui précède que, pour tous x, y réels, on a $\varepsilon(x+y)\varepsilon(-x)\varepsilon(-y) = 1$.
Indication : on pourra montrer que $a_m = \left(1+\dfrac{x+y}{m}\right)\left(1-\dfrac{x}{m}\right)\left(1-\dfrac{y}{m}\right) = 1+\dfrac{z_m}{m}$, où $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m = 0$, et utiliser la question précédente.

3. Établir les propriétés suivantes :
   - (i) $\varepsilon(0) = 1$.
   - (ii) ε vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon(x+y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$.
   - (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon(x) > 0$.
   - (iv) ε est dérivable en 0 et $\varepsilon'(0) = 1$.
   - (v) ε est dérivable à tout ordre k sur $\mathbb{R}$ et $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon$.
   - (vi) ε est strictement convexe et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - (vii) Sa bijection réciproque λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda'(t) = \dfrac{1}{t}$ pour tout $t > 0$.
   - (viii) λ est solution d'une équation fonctionnelle que l'on précisera.

PROBLEME II : Notions d'algèbre linéaire

A - Quelques résultats classiques d'algèbre linéaire

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\mathcal{M}_n$ l'anneau des matrices carrées réelles de dimension $n \times n$, d'unité I_n.

1. Montrer, à l'aide d'un exemple, que $\mathcal{M}_2$ n'est pas commutatif. Qu'en est-il de $\mathcal{M}_n$?
2. Exprimer le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice M de $\mathcal{M}_2$ en fonction de sa trace $Tr(M)$ et de son déterminant $\det(M)$.
3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$ et I_A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ annulant A.

3.1. Donner la dimension et une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n$.

3.2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, déduire de la question précédente l'existence d'un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré au plus n^2 et annulant A.
Indication : on pourra s'intéresser à la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n^2})$.

3.3. Vérifier que I_A est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire qu'il vérifie les propriétés suivantes :
   - (i) I_A est non vide.

(ii) I_A est stable par addition.

(iii) I_A est stable pour la multiplication par un élément quelconque de $\mathbb{R}[X]$.

Dans la suite, nous admettrons que $\mathbb{R}[X]$ est **principal**, c'est-à-dire que tous les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont engendrés par un élément. En d'autres termes, tout idéal I de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme :

$$I = \{Q \times P_{\mathcal{I}}\,,\, Q \in \mathbb{R}[X]\}\ ,\ \text{ où } P_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}[X].$$

3.4. Montrer qu'il existe un polynôme Π non constant, de degré au plus n^2, tel que :

$$I_A = \{Q \times \Pi\,,\, Q \in \mathbb{R}[X]\,\}\ .$$

3.5. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté P_A tel que $I_A = \{Q \times P_A\,,\, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. P_A est appelé *polynôme minimal de* A. Vérifier que l'on a : $1 \leq deg(P_A) \leq n^2$.

4. Soit M dans $\mathcal{M}_n$ et soit $Sp(M)$ l'ensemble des valeurs propres (réelles) de M.

4.1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la matrice $M - xI_n$ soit inversible.

4.2. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la matrice $I_n - xM$ soit inversible.

B - Problème dans $\mathcal{M}_2$

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et on note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ engendré par I_2 et J.

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies comme suit :

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0 \quad , & a_1 = 1 \quad , & \forall n \in \mathbb{N}\,,\, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,. \\ b_0 = 2 \quad , & b_1 = 1 \quad , & \forall n \in \mathbb{N}\,,\, b_{n+2} = b_{n+1} + b_n\,. \end{array}$$

Pour chaque entier naturel n, on considère la matrice $U_n = a_nJ + \dfrac{1}{2}b_nI_2$.

La matrice U_1 sera notée $U = J + \dfrac{1}{2}I_2$

1. 1.1. Donner une base et la dimension de E.

1.2. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2$ (c'est à dire qu'il contient l'élément unité I_2 et est stable par multiplication).

1.3. E est-il un sous-anneau commutatif ?

1.4. Déduire du 1.2. que tous les termes de la suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

2. Établir une relation qui, pour tout entier naturel n, lie les matrices U_{n+2}, U_{n+1} et U_n.

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $U_n = U^n$.

4. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n, on a les relations suivantes :

(i) $det(U_n) = (-1)^n$.

(ii) $(b_n)^2 - 5(a_n)^2 = 4(-1)^n$.

5. Montrer que pour tous entiers naturels p, q, on a :

$$a_{p+q} = \frac{1}{2}(a_pb_q + a_qb_p) \quad \text{et} \quad b_{p+q} = \frac{1}{2}(5a_pa_q + b_pb_q)\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(X) = X^n - a_nX - a_{n-1}$.

6. Calculer $S_1(X)$ et $S_2(X)$.

7. Montrer par récurrence la propriété suivante :
$\mathcal{P}_n$: "$S_n(X)$ et $S_{n+1}(X)$ sont divisibles par $X^2 - X - 1$".