Corrigé Capes Blanc 1

PROBLEME I : Une construction de la fonction exponentielle

A - Deux inégalités fondamentales préliminaires

1. **L'inégalité de Bernoulli.**

Pour tout réel $a > -1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$, avec égalité si et seulement si $a = 0$.

1.1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.
Pour tout réel $a > -1$, on a $(1 + a)^2 = 1 + a^2 + 2a \geq 1 + 2a$. Il y a égalité ssi $a^2 = 0$, c'est à dire ssi $a = 0$.

1.2. Démontrer cette inégalité dans le cas général.
On procède par récurrence sur $n \geq 2$. L'initialisation a été faite à la question précédente. Supposons donc la propriété vraie à un certain rang $n \geq 2$, et montrons qu'elle est vraie au rang suivant. On a

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a\,.$$

Il y a égalité ssi les deux inégalités de la ligne précédentes sont en fait des égalités, c'est à dire ssi $a = 0$ (par hyp. de récurrence pour la première, puis $na^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$).

2. **L'inégalité de Cauchy.**

Pour tout entier naturel non nul n et tout $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

2.1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.
Soit (x_1, x_2) un couple de réels strictement positifs. On a $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geq 0$, d'où l'on déduit le résultat.

On cherche à présent à démontrer ce résultat dans le cas général.

2.2. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :
(i) $1 \in A$.
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$.
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n + 1 \in A \Rightarrow n \in A$.

2.2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n \in A$.
Se montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a $2^0 = 1 \in A$. Par suite, si l'on suppose $2^n \in A$ on a $2 \times 2^n \in A$ en vertu du (ii). On obtient donc $2^{n+1} \in A$ et par suite le caractère héréditaire de la propriété.

2.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall p \in [[1, 2^n]], p \in A$.
S'établit par le biais d'un récurrence descendante sur $p \in [[1, 2^n]]$. Si $p = 2^n$, on a $p \in A$ d'après la question précédente. Par suite, si l'on prend $p \in [[2, 2^n]]$ tel que $p \in A$, alors $p - 1 \in A$ d'après le (iii), ce qui permet de terminer la récurrence.

2.2.3. En déduire que $A=\mathbb{N}^*$.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $p\le 2^n$, c'est à dire $p\in[[1,2^n]]$. D'après ce qui précède, on a $p\in A$. Ainsi $\mathbb{N}^*\subset A$. On conclut en utilisant l'inclusion $A\subset\mathbb{N}^*$.

2.3. On note à présent A l'ensemble des entiers naturels non nuls pour lesquels le résultat est établi (inégalité de Cauchy et cas d'égalité).

2.3.1. Montrer que $1\in A$.

Pour $n=1$, les deux termes impliqués dans l'égalité sont égaux à x_1. Le résultat est immédiat, et on a égalité.

2.3.2. Soit $n\in A$. Montrer que $2n\in A$.

Indication : on pourra poser $a=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ et $b=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}x_k$, puis utiliser le cas n=2 avec le 2-uplet (a,b).

Soit $(x_1,\cdots,x_{2n})$ un $2n$-uplet de réels strictement positifs. En utilisant l'indication et le cas $n=2$ du 2.1, on a :

$$\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}x_k\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\times\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}x_k\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Par suite, l'entier n étant supposé dans A, on a :

$$a=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\ge\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\text{ et }b=\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}x_k\ge\left(\prod_{k=n+1}^{2n}x_k\right)^{1/n}. \tag{2}$$

En injectant dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}x_k\ge\left(\prod_{k=1}^{2n}x_k\right)^{1/2n}.$$

Pour avoir égalité, il faut et il suffit que $a=b$ (relation (1)) et qu'on soit dans le cas d'égalité pour a et pour b (relations (2)), ce qui équivaut à dire que $x_1=\cdots=x_{2n}$.

2.3.3. L'objectif est de démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, n+1\in A\Rightarrow n\in A$. Fixons pour cela un entier $n\in\mathbb{N}^*$.

2.3.3.1. On considère un $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1,\cdots,x_n)$. On pose $y_k=x_k$ si $k\le n$ et $y_{n+1}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}y_k$.

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}y_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{n+1}y_{n+1}=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\right)\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k.$$

2.3.3.2. En déduire que si $n+1\in A$ alors $n\in A$.

Supposons $n+1\in A$ et considérons un $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1,\cdots,x_n)$. En gardant les notations précédentes, on a :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}y_k\ge\left(\prod_{k=1}^{n+1}y_k\right)^{1/(n+1)}=\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/(n+1)}\times\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/(n+1)}.$$

En utilisant la question précédente, on aboutit à : $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^{1-1/(n+1)}\ge\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/(n+1)}$,

ce qui se réécrit :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\ge\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}.$$

Le résultat étant supposé vrai pour $n+1$, l'égalité a lieu ssi les $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ sont égaux, c'est à dire ssi les $(x_1, \cdots, x_n)$ sont égaux.

2.3.4. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

A est un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) du 2.2, donc $A = \mathbb{N}^*$. En d'autres termes, l'inégalité de Cauchy (avec cas d'égalité) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B - Construction et étude de la fonction exponentielle

1. Soit x un nombre réel fixé. On pose $n_0(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \colon n > -x\}$ et on note, pour tout entier $n \geq n_0(x)$, $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, et pour tout entier $n \geq n_0(-x)$, $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

1.1. Montrer que pour tout $n \geq n_0(x)$, $\frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] \geq \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}$.

Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy démontrée dans la partie précédente.

Notons que pour tout $n \geq n_0(x)$, on a $1 + \frac{x}{n} > 0$. Il s'agit alors d'utiliser l'inégalité de Cauchy avec le $(n+1)$-uplet $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$, avec $x_k = 1 + \frac{x}{n}$ pour $k = 1 \cdots, n$ et $x_{n+1} = 1$.

1.2. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0(x)}$ est croissante.

Indication : on pourra utiliser l'égalité $1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right) = (n+1)\left[1 + \frac{x}{n+1}\right]$.

En utilisant l'indication et la question précédente, on a $1 + \frac{x}{n+1} \geq \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}$.

On remarque alors que $\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$, ce qui permet de conclure.

1.3. En déduire que la suite $(v_n(x))_{n \geq n_0(-x)}$ est décroissante.

Soit $n \geq n_0(-x)$. On a $n > x$ donc $1 - \frac{x}{n} > 0$ et par suite $u_n(-x) > 0$. On utilise alors le fait que $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ pour tout $n \geq n_0(-x)$ et la croissance de $(u_n(-x))_{n \geq n_0(-x)}$ pour aboutir au résultat.

1.4. On cherche à présent à démontrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ convergent vers une même limite. On considère un entier $n > |x|$.

1.4.1. Montrer que $v_n(x) \geq u_n(x) > 0$.

Notons que $n > |x| \Rightarrow n \geq max(n_0(x), n_0(-x))$. On a précédemment établi que $u_n(x) > 0$ et $v_n(x) > 0$. On remarque alors que $\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n \leq 1$, d'où le résultat.

1.4.2. Montrer que $\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$.

L'inégalité de Bernoulli avec $a = -\left(\frac{x}{n}\right)^2 > -1$ donne immédiatement le résultat.

1.4.3. En déduire que $v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\frac{x^2}{n}$, puis conclure.

En combinant les deux questions précédentes, on a $\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \geq 1 - \frac{x^2}{n}$, ce qui donne

$v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$. Par suite, $(v_n(x))$ étant décroissante et minorée (par 0, d'après 1.4.1), elle converge. En utilisant $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$ et le fait que le terme de droite de cette inégalité converge vers 0, on aboutit au résultat avec le théorème des gendarmes.

2. On note ε l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un réel x associe la limite commune des suites de la question précédente. Nous admettrons dans la suite que ε est **continue** sur $\mathbb{R}$ (*se déduit de la continuité des fonctions u_n et de la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n)*).

2.1. Montrer que pour tout réel $x > 1$, $1+x \leq \varepsilon(x)$ et que pour tout réel $x < 1$, $\varepsilon(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.
Indication : On pourra étudier les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ puis passer à la limite dans les inégalités.
On a $x < 1 \Rightarrow n_0(-x) = 1$. La suite $(v_n(x))_{n\geq 1}$ est donc décroissante et converge vers $\varepsilon(x)$. On en déduit que $\varepsilon(x) \leq v_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Un raisonnement analogue impliquant la croissance de $(u_n(x))_{n\geq 1}$ pour $x > -1$ donne $1 + x \leq \varepsilon(x)$.

2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout $n > |x|$, $v_n(x).u_n(-x)$. En déduire que $\varepsilon(x)$ est non nul et exprimer son inverse à l'aide de ε.
Soit $n > |x|$. On a $v_n(x).u_n(-x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n} = 1$. En passant à la limite sur n, on obtient $\varepsilon(x).\varepsilon(-x) = 1$. On on déduit que $\varepsilon(x)$ est non nul, d'inverse $\varepsilon(-x)$

2.3. Soit $(z_m)_{m\geq 1}$ une suite de nombres réels convergeant vers 0. On cherche à démontrer que la suite $\left(\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m\right)_{m\geq 1}$ converge vers 1.

2.3.1. Montrer qu'il existe un rang $M_0 \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M_0$ on ait $|z_m| < 1$ et $\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m \geq 1 + z_m$.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Bernoulli.

La suite (z_m) converge vers 0, donc il existe $M_0 \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M_0$ on ait $|z_m| < 1$. Par suite, pour tout $m \geq M_0$ on a $\dfrac{z_m}{m} \geq -1$ et l'inégalité de Bernoulli donne $\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m \geq 1 + z_m$.

2.3.2. Montrer que pour tout $m \geq M_0$, $\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m \leq \dfrac{1}{1-z_m}$.
Soit $m \geq M_0$. On a $z_m < 1$ donc $\varepsilon(z_m) < \dfrac{1}{1-z_m}$ en vertu du 2.1. D'autre part, pour tout $n \geq n_0(|z_m|)$=1, on a $u_n(z_m) \leq \varepsilon(z_m)$. En prenant $n = m$, on obient donc $\left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m \leq \dfrac{1}{1-z_m}$.

2.3.3. Conclure.
Pour tout $m \geq M_0$, on a $1+z_m \leq \left(1+\dfrac{z_m}{m}\right)^m \leq \dfrac{1}{1-z_m}$. On conclut avec le théorème des gendarmes.

2.4. Déduire de ce qui précède que, pour tous x, y réels, on a $\varepsilon(x+y)\varepsilon(-x)\varepsilon(-y) = 1$.
Indication : on pourra montrer que $a_m = \left(1+\dfrac{x+y}{m}\right)\left(1-\dfrac{x}{m}\right)\left(1-\dfrac{y}{m}\right) = 1 + \dfrac{z_m}{m}$, où $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m = 0$, et utiliser la question précédente.

Considérons deux réels x et y. Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_m &= \left(1+\frac{x+y}{m}\right)\left(1-\frac{x+y}{m}\right)+\left(1+\frac{x+y}{m}\right)\left(\frac{xy}{m^2}\right) \\ &= 1-\left(\frac{x+y}{m}\right)^2+\left(1+\frac{x+y}{m}\right)\left(\frac{xy}{m^2}\right) \\ &= 1+\frac{z_m}{m} \end{aligned}$$

avec $z_m = -\frac{1}{m}\left((x+y)^2 + xy\left(1+\frac{x+y}{m}\right)\right)$ *et* $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$. *Ainsi :* $(a_m)^m = u_m(x+y)u_m(-x)u_m(-y) = \left(1+\frac{z_m}{m}\right)^m$. *D'après la question précédente, on obient* $\varepsilon(x+y)\varepsilon(-x)\varepsilon(-y) = 1$ *en passant à la limite sur* m.

3. Établir les propriétés suivantes :
   (i) $\varepsilon(0) = 1$.
   La question 2.1 utilisée avec $x = 0$ *donne* $\varepsilon(0) = 1$.
   (ii) ε vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon(x+y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On a* $\varepsilon(x+y)\varepsilon(-x)\varepsilon(-y) = 1$. *En multipliant cette équation par* $\varepsilon(x)$ *et* $\varepsilon(y)$ *(les inverses respectifs de* $\varepsilon(-x)$ *et* $\varepsilon(-y)$ *d'après 2.2), on aboutit au résultat.*
   (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon(x) > 0$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a* $x > -1$ *ou* $-x > -1$. *Ainsi, d'après 2.1,* $\varepsilon(x) \geq 1$ *ou* $\varepsilon(-x) \geq 1$. *Or, la relation* $\varepsilon(x)\varepsilon(-x) = 1$ *indique que* $\varepsilon(x)$ *et* $\varepsilon(-x)$ *sont de même signe. On en déduit que* $\varepsilon(x) > 0$.
   (iv) ε est dérivable en 0 et $\varepsilon'(0) = 1$.
   Considérons un réel h *non nul tel que* $|h| < 1$. *La question 2.1 donne* $1+h \leq \varepsilon(h) \leq \frac{1}{1-h}$. *On en tire* $h \leq \varepsilon(h) - 1 \leq \frac{h}{1-h}$, *et par suite* $1 \leq \frac{\varepsilon(h)-\varepsilon(0)}{h} \leq \frac{1}{1-h}$. *On conclut avec le théorème des gendarmes.*
   (v) ε est dérivable à tout ordre k sur $\mathbb{R}$ et $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Considérons un réel* h *non nul tel que* $|h| < 1$. *On a* $\frac{\varepsilon(x+h)-\varepsilon(x)}{h} = \frac{\varepsilon(x)\varepsilon(h)-\varepsilon(x)}{h} = \varepsilon(x)\left(\frac{\varepsilon(h)-\varepsilon(0)}{h}\right)$. *On en conclut que* ε *est dérivable en* x *et que* $\varepsilon'(x) = \varepsilon(x)\varepsilon'(0) = \varepsilon(x)$. *Le réel* x *étant arbitraire, on a donc* $\varepsilon' = \varepsilon$ *et on conclut par récurrence sur* k.
   (vi) ε est strictement convexe et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   D'après (iii) ε *est à valeurs strictement positives et d'après (v)* $\varepsilon'' = \varepsilon$. *Ainsi* ε *admet une dérivée seconde strictement positive et est donc strictement convexe. La fonction* ε *est définie sur* $\mathbb{R}$, *strictement croissante* ($\varepsilon > 0$) *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$. *La question 2.1. permet de conclure que* $\lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = +\infty$. *Elle induit donc une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$
   (vii) Sa bijection réciproque λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda'(t) = \frac{1}{t}$ pour tout $t > 0$.
   La fonction ε *est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée ne s'y annule pas. On en déduit que sa réciproque* λ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *avec* $\lambda'(t) = \frac{1}{\varepsilon'(\lambda(t))} = \frac{1}{\varepsilon(\lambda(t))} = \frac{1}{t}$ *pour tout* $t > 0$. *On conclut en utilisant le caractère* $\mathcal{C}^\infty$ *de la fonction inverse sur* $\mathbb{R}_+^*$.
   (viii) λ est solution d'une équation fonctionnelle que l'on précisera.
   Soit x, y *deux réels strictement positifs. Il existe deux réels* x', y' *tels que* $x = \varepsilon(x')$ *et* $y = \varepsilon(y')$. *On a :* $\lambda(xy) = \lambda(\varepsilon(x')\varepsilon(y')) = \lambda(\varepsilon(x'+y')) = x'+y' = \lambda(x)+\lambda(y)$. *Ainsi* λ *est solution de l'équation fonctionnelle* $f(xy) = f(x)+f(y)$.

PROBLEME II : Notions d'algèbre linéaire

A - Quelques résultats classiques d'algèbre linéaire

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\mathcal{M}_n$ l'anneau des matrices carrées réelles de dimension $n \times n$, d'unité I_n.

1. Montrer, à l'aide d'un exemple, que $\mathcal{M}_2$ n'est pas commutatif. Qu'en est-il de $\mathcal{M}_n$?
   Considérons $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $BC = C \neq 0_{\mathcal{M}_2}$ *et* $CB = 0_{\mathcal{M}_2}$ *donc* $BC \neq CB$.
2. Exprimer le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice M de $\mathcal{M}_2$ en fonction de sa trace $Tr(M)$ et de son déterminant $det(M)$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$. *Alors,*

$$\chi_M(X) = \det(M - XI_2) = (a-X)(d-X) - bc = X^2 - (a+d) + (ad-bc) = X^2 - Tr(M)X + \det(M).$$

3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$ et I_A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ annulant A.
   3.1. Donner la dimension et une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n$.
   La dimension de $\mathcal{M}_n$ *est* n^2 *et sa base canonique est la famille* $(E_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ *où pour chaque* (i,j), *la matrice* E_{ij} *a un unique coefficient non nul, qui a la valeur* 1, *à la i-ème ligne et* j*-ème colonne.*
   3.2. Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, déduire de la question précédente l'existence d'un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré au plus n^2 et annulant A.
   Indication : on pourra s'intéresser à la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n^2})$.
   La famille $(I_n, A, \cdots, A^{n^2})$ *est de cardinal* n^2+1 *et comme* $\mathcal{M}_n$ *est de dimension* n^2, *il existe nécessairement* $j \in [[1, n^2]]$ *tel que* A^j *s'exprime comme une combinaison linéaire de* $I_n, A, \ldots, A^{j-1}$. *Ainsi, il existe* $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* j *qui annule* A.
   3.3. Vérifier que I_A est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire qu'il vérifie les propriétés suivantes :
   (i) I_A est non vide.
   I_A *est non vide car* $P_0 \in I_A$.
   (ii) I_A est stable par addition.
   Soit $P, Q \in I_A$. *Alors* $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n}$ *donc* $P + Q \in I_A$.
   (iii) I_A est stable pour la multiplication par un élément quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
   Soit $P \in I_A$ *et* $S \in \mathbb{R}[X]$. *Alors* $(SP)(A) = S(A)P(A) = S(A) \times 0_{\mathcal{M}_n} = 0_{\mathcal{M}_n}$ *donc* $SP \in I_A$.

   Dans la suite, nous admettrons que $\mathbb{R}[X]$ est **principal**, c'est-à-dire que tous les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont engendrés par un élément. En d'autres termes, tout idéal I de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme :

$$I = \{Q \times P_{\mathcal{I}} \, , \, Q \in \mathbb{R}[X]\} \; , \quad \text{où } P_I \in \mathbb{R}[X].$$

   3.4. Montrer qu'il existe un polynôme Π non constant, de degré au plus n^2, tel que :

$$I_A = \{Q \times \Pi \, , \, Q \in \mathbb{R}[X]\, \} \; .$$

   Comme $\mathbb{R}[X]$ *est principal, il existe un polynôme* Π *tel que* $I_A = \{Q \times \Pi \, , \, Q \in \mathbb{R}[X]\, \}$. *Comme* $P_0 \in I_A$, *il existe une polynôme* Q *tel que* $P_0 = Q \times \Pi$. *Or,* P_0 *est non constant et de degré au plus* n^2, *donc il en est de même pour* Π.

3.5. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté P_A tel que $I_A = \{Q \times P_A\, ,\, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. P_A est appelé *polynôme minimal de* A. Vérifier que l'on a : $1 \leq deg(P_A) \leq n^2$.

Dans la question précédente, on peut choisir Π *unitaire (il suffit de le diviser par son coefficient dominant). Il reste alors à vérifier l'unicité. Supposons que* Π' *satisfasse les mêmes propriétés, alors il existe des polynômes* Q *et* Q' *tel que* $\Pi' = Q \times \Pi$ *et* $\Pi = Q' \times \Pi$. *Alors* $\Pi = Q'Q \times \Pi$ *et donc* $Q'Q = 1$. *Ainsi,* Q *est constant et comme* Π *et* Π' *sont unitaires,* $Q = 1$*, d'où* $\Pi' = \Pi$.

4. Soit M dans $\mathcal{M}_n$ et soit $Sp(M)$ l'ensemble des valeurs propres (réelles) de M.

4.1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la matrice $M - xI_n$ soit inversible.

Soit $x \in \mathbb{R}$. *La matrice* $M - xI_n$ *est inversible si et seulement si* $\det(M - xI_n) \neq 0$ *si seulement* $\chi M(x) \neq 0$ *si et seulement si* $x \notin Sp(M)$.

4.2. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la matrice $I_n - xM$ soit inversible.

Soit $x \in \mathbb{R}$. *Supposons tout d'abord que* $x \neq 0$. *Alors* $I_n - xM = -x\left(M - \frac{1}{x}I_n\right)$ *et donc, dans ce cas,* $I_n - xM$ *est inversible si et seulement si* $\frac{1}{x} \notin Sp(M)$. *Dans le cas où* $x = 0$*, on a* $I_n - xM = I_n$ *qui est évidemment inversible.*

On conclut donc que $I_n - xM$ *est inversible si et seulement si* $x = 0$ *ou (*$x \neq 0$ *et* $1/x \notin Sp(M)$*).*

B - Problème dans $\mathcal{M}_2$

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et on note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ engendré par I_2 et J.

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies comme suit :

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0 \quad , & a_1 = 1 \quad , & \forall n \in \mathbb{N}\, ,\, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\, . \\ b_0 = 2 \quad , & b_1 = 1 \quad , & \forall n \in \mathbb{N}\, ,\, b_{n+2} = b_{n+1} + b_n\, . \end{array}$$

Pour chaque entier naturel n, on considère la matrice $U_n = a_n J + \frac{1}{2} b_n I_2$.

La matrice U_1 sera notée $U = J + \frac{1}{2} I_2$

1. 1.1. Donner une base et la dimension de E.

Les matrices I_2 *et* J *sont non colinéaires, elles forment donc une base de* E *qui est le sous-espace engendré par ces deux matrices. La dimension de* E *est donc* 2.

1.2. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2$ (c'est à dire qu'il contient l'élément unité I_2 et est stable par multiplication).

E *est engendré par* I_2 *et* J *donc il contient en particulier* I_2. *Par ailleurs,* $J^2 = \frac{5}{4} I_2$ *donc si* $A = \alpha I_2 + \beta J$ *et* $B = \gamma I_2 + \delta J$ *sont deux matrices de* E*, alors*

$$AB = \alpha\gamma I_2 + (\beta\gamma + \alpha\delta) J + \beta\delta J^2 = \left(\alpha\gamma + \frac{5}{4}\beta\delta\right) I_2 + (\beta\gamma + \alpha\delta) J \in E.$$

Ainsi, E *est un sous-anneau de* $\mathcal{M}_2$.

(Remarque : en fait E *est un sous-anneau car* I_2^2*,* $I_2 J$*,* $J I_2$ *et* J^2 *sont toutes des matrices dans* E*.)*

1.3. E est-il un sous-anneau commutatif ?

Oui. Si on considère $A = \alpha I_2 + \beta J$ et $B = \gamma I_2 + \delta J$ deux matrices de E, comme précédemment, on a

$$BA = \left(\gamma\alpha + \frac{5}{4}\delta\beta\right) I_2 + (\gamma\beta + \delta\alpha)J = \left(\alpha\gamma + \frac{5}{4}\beta\delta\right) I_2 + (\beta\gamma + \alpha\delta)J = AB.$$

(Remarque : E est commutatif car $I_2 J = J I_2$.)

1.4. Déduire du 1.2. que tous les termes de la suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

E est un anneau donc toute puissance positive d'une matrice de E est également dans E. Comme $U \in E$, on en déduit que tous les termes de la suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

2. Établir une relation qui, pour tout entier naturel n, lie les matrices U_{n+2}, U_{n+1} et U_n. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$U_{n+2} = a_{n+2}J + \frac{1}{2}b_{n+2}I_2 = (a_{n+1}+a_n)J + \frac{1}{2}(b_{n+1}+b_n)I_2 = a_{n+1}J + \frac{1}{2}b_{n+1}I_2 + a_nJ + \frac{1}{2}b_nI_2 = U_{n+1} + U_n.$$

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $U_n = U^n$. *Initialisation : $U_0 = 0 \times J + \frac{1}{2} \times 2I_2 = I_2 = U^0$ et $U_1 = U$ par définition.*

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = U^n$ et $U_{n+1} = U^{n+1}$. Alors, d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence,

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n = U^{n+1} + U^n = (U + I_2)U^n.$$

Or,

$$U^2 = (J + \frac{1}{2}I_2)^2 = J^2 + J + \frac{1}{4}I_2 = \frac{5}{4}I_2 + J + \frac{1}{4}I_2 = J + \frac{1}{2}I_2 + I_2 = U + I_2.$$

D'où, $U_{n+2} = U^2U^n = U^{n+2}$.

On a donc vérifié l'égalité pour $n = 0$ et $n = 1$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $U_n = U^n$ et $U_{n+1} = U^{n+1}$ alors $U_{n+2} = U^{n+2}$, donc par récurrence on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U^n$.

4. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n, on a les relations suivantes :
   (i) $\det(U_n) = (-1)^n$.
   (ii) $(b_n)^2 - 5(a_n)^2 = 4(-1)^n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\det(U_n) = \det(U^n) = \det(U)^n$ par multiplicativité du déterminant. Or $\det(U) = \frac{1}{4}(1 - (\sqrt{5})^2 = -1$, d'où $\det(U_n) = (-1)^n$. Par ailleurs, comme $U_n = a_nJ + \frac{1}{2}b_nI_2$, on a $\det(U_n) = \frac{1}{4}(b_n^2 - 5a_n^2)$, d'où $(b_n)^2 - 5(a_n)^2 = 4(-1)^n$.

5. Montrer que pour tous entiers naturels p, q, on a :

$$a_{p+q} = \frac{1}{2}(a_pb_q + a_qb_p) \quad \text{et} \quad b_{p+q} = \frac{1}{2}(5a_pa_q + b_pb_q)\,.$$

Soit p et q deux entiers naturels. Par 3., $a_{p+q}J + \frac{1}{2}b_{p+q}I_2 = U_{p+q} = U^{p+q} = U^pU^q = U_pU_q = (a_pJ + \frac{1}{2}b_pI_2)(a_qJ + \frac{1}{2}b_qI_2) = a_pa_qJ^2 + \frac{1}{2}(a_pb_q + b_pa_q)J + \frac{1}{4}b_pb_qI_2 = \frac{1}{2}(a_pb_q + b_pa_q)J + \frac{1}{4}(5a_pa_q + b_pb_q)I_2$. Comme (I_2, J) est une base de E, on en déduit que

$$a_{p+q} = \frac{1}{2}(a_pb_q + a_qb_p) \quad \textit{et} \quad b_{p+q} = \frac{1}{2}(5a_pa_q + b_pb_q).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(X) = X^n - a_nX - a_{n-1}$.

6. Calculer $S_1(X)$ et $S_2(X)$.
   $S_1(X) = X - a_1X - a_0 = 0$ et $S_2(X) = X^2 - a_2X - a_1 = X^2 - X - 1$.

7. Montrer par récurrence la propriété suivante :
   $\mathcal{P}_n$: "$S_n(X)$ et $S_{n+1}(X)$ sont divisibles par $X^2 - X - 1$".
   Initialisation : d'après le calcul précédent, S_1 et S_2 sont divisibles par $X^2 - X - 1$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors, $S_{n+2} = X^{n+2} - a_{n+2}X - a_{n+1} = X^{n+2} - (a_{n+1} + a_n)X - (a_n + a_{n-1}) = X^{n+2} + S_{n+1} - X^{n+1} + S_n - X^n = X^n(X^2 - X - 1) + S_{n+1} + S_n$. Par hypothèse de récurrence, $S_{n+1} + S_n$ est divisible par $X^2 - X - 1$, donc S_{n+2} l'est également, et ainsi la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie (S_{n+1} et $S_{(n+1)+1}$ sont divisibles par $X^2 - X - 1$).
   On a donc vérifié que $\mathcal{P}_1$ est vraie et que : $\forall n \geq 1$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Ainsi, par récurrence, on a $\forall n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$.