Corrigé Problème II Capes Blanc 1

PROBLEME II : Notions d'algèbre linéaire

A - Quelques résultats classiques d'algèbre linéaire

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\mathcal{M}_n$ l'anneau des matrices carrées réelles de dimension $n \times n$, d'unité I_n.

1. Montrer, à l'aide d'un exemple, que $\mathcal{M}_2$ n'est pas commutatif. Qu'en est-il de $\mathcal{M}_n$?
   Considérons $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On a* $BC = C \neq 0_{\mathcal{M}_2}$ *et* $CB = 0_{\mathcal{M}_2}$ *donc* $BC \neq CB$.
2. Exprimer le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice M de $\mathcal{M}_2$ en fonction de sa trace $Tr(M)$ et de son déterminant $det(M)$.
   Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2$. *Alors,*
   $$\chi_M(X) = \det(M - XI_2) = (a-X)(d-X) - bc = X^2 - (a+d) + (ad-bc) = X^2 - Tr(M)X + \det(M).$$
3. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$ et I_A l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ annulant A.
   (a) Donner la dimension et une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n$.
   La dimension de $\mathcal{M}_n$ *est* n^2 *et sa base canonique est la famille* $(E_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ *où pour chaque* (i,j), *la matrice* E_{ij} *a un unique coefficient non nul, qui a la valeur* 1, *à la* i*-ème ligne et* j*-ème colonne.*
   (b) Sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, déduire de la question précédente l'existence d'un polynôme $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul de degré au plus n^2 et annulant A.
   Indication : on pourra s'intéresser à la famille $(I_n, A, \cdots, A^{n^2})$.
   La famille $(I_n, A, \cdots, A^{n^2})$ *est de cardinal* n^2+1 *et comme* $\mathcal{M}_n$ *est de dimension* n^2, *il existe nécessairement* $j \in [[1, n^2]]$ *tel que* A^j *s'exprime comme une combinaison linéaire de* $I_n, A, \ldots, A^{j-1}$. *Ainsi, il existe* $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* j *qui annule* A.
   (c) Vérifier que I_A est un idéal de $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire qu'il vérifie les propriétés suivantes :
      (i) I_A est non vide.
      I_A *est non vide car* $P_0 \in I_A$.
      (ii) I_A est stable par addition.
      Soit $P, Q \in I_A$. *Alors* $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n}$ *donc* $P + Q \in I_A$.
      (iii) I_A est stable pour la multiplication par un élément quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
      Soit $P \in I_A$ *et* $S \in \mathbb{R}[X]$. *Alors* $(SP)(A) = S(A)P(A) = S(A) \times 0_{\mathcal{M}_n} = 0_{\mathcal{M}_n}$ *donc* $SP \in I_A$.

   Dans la suite, nous admettrons que $\mathbb{R}[X]$ est **principal**, c'est-à-dire que tous les idéaux de $\mathbb{R}[X]$ sont engendrés par un élément. En d'autres termes, tout idéal I de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit sous la forme :
   $$I = \{Q \times P_{\mathcal{I}}\,,\, Q \in \mathbb{R}[X]\}\ ,\ \text{ où } P_I \in \mathbb{R}[X].$$

(d) Montrer qu'il existe un polynôme Π non constant, de degré au plus n^2, tel que :

$$I_A = \{Q \times \Pi\,,\, Q \in \mathbb{R}[X]\}\ .$$

Comme $\mathbb{R}[X]$ est principal, il existe un polynôme Π tel que $I_A = \{Q \times \Pi\,,\, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. Comme $P_0 \in I_A$, il existe une polynôme Q tel que $P_0 = Q \times \Pi$. Or, P_0 est non constant et de degré au plus n^2, donc il en est de même pour Π.

(e) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté P_A tel que $I_A = \{Q \times P_A\,,\, Q \in \mathbb{R}[X]\}$. P_A est appelé *polynôme minimal de A*. Vérifier que l'on a : $1 \leq deg(P_A) \leq n^2$.

Dans la question précédente, on peut choisir Π unitaire (il suffit de le diviser par son coefficient dominant). Il reste alors à vérifier l'unicité. Supposons que Π' satisfasse les mêmes propriétés, alors il existe des polynômes Q et Q' tel que $\Pi' = Q \times \Pi$ et $\Pi = Q' \times \Pi$. Alors $\Pi = Q'Q \times \Pi$ et donc $Q'Q = 1$. Ainsi, Q est constant et comme Π et Π' sont unitaires, $Q = 1$, d'où $\Pi' = \Pi$.

4. Soit M dans $\mathcal{M}_n$ et soit $Sp(M)$ l'ensemble des valeurs propres (réelles) de M.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la matrice $M - xI_n$ soit inversible.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $M - xI_n$ est inversible si et seulement si $\det(M - xI_n) \neq 0$ si seulement $\chi M(x) \neq 0$ si et seulement si $x \notin Sp(M)$.

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur le réel x pour que la matrice $I_n - xM$ soit inversible.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons tout d'abord que $x \neq 0$. Alors $I_n - xM = -x\left(M - \frac{1}{x}I_n\right)$ et donc, dans ce cas, $I_n - xM$ est inversible si et seulement si $\frac{1}{x} \notin Sp(M)$. Dans le cas où $x = 0$, on a $I_n - xM = I_n$ qui est évidemment inversible.

On conclut donc que $I_n - xM$ est inversible si et seulement si $x = 0$ ou ($x \neq 0$ et $1/x \notin Sp(M)$).

B - Problème dans $\mathcal{M}_2$

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et on note E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$ engendré par I_2 et J.

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies comme suit :

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0 \quad , & a_1 = 1 \quad , & \forall n \in \mathbb{N}\,,\, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ . \\ b_0 = 2 \quad , & b_1 = 1 \quad , & \forall n \in \mathbb{N}\,,\, b_{n+2} = b_{n+1} + b_n\ . \end{array}$$

Pour chaque entier naturel n, on considère la matrice $U_n = a_nJ + \frac{1}{2}b_nI_2$.

La matrice U_1 sera notée $U = J + \frac{1}{2}I_2$

1. (a) Donner une base et la dimension de E.

Les matrices I_2 et J sont non colinéaires, elles forment donc une base de E qui est le sous-espace engendré par ces deux matrices. La dimension de E est donc 2.

(b) Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2$ (c'est à dire qu'il contient l'élément unité I_2 et est stable par multiplication).

E est engendré par I_2 et J donc il contient en particulier I_2. Par ailleurs, $J^2 = \frac{5}{4}I_2$ donc si $A = \alpha I_2 + \beta J$ et $B = \gamma I_2 + \delta J$ sont deux matrices de E, alors

$$AB = \alpha\gamma I_2 + (\beta\gamma + \alpha\delta)J + \beta\delta J^2 = \left(\alpha\gamma + \frac{5}{4}\beta\delta\right) I_2 + (\beta\gamma + \alpha\delta)J \in E.$$

Ainsi, E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2$.
(Remarque : en fait E est un sous-anneau car I_2^2, I_2J, JI_2 et J^2 sont toutes des matrices dans E.)

(c) E est-il un sous-anneau commutatif ?
Oui. Si on considère $A = \alpha I_2 + \beta J$ et $B = \gamma I_2 + \delta J$ deux matrices de E, comme précédemment, on a

$$BA = \left(\gamma\alpha + \frac{5}{4}\delta\beta\right) I_2 + (\gamma\beta + \delta\alpha)J = \left(\alpha\gamma + \frac{5}{4}\beta\delta\right) I_2 + (\beta\gamma + \alpha\delta)J = AB.$$

(Remarque : E est commutatif car $I_2J = JI_2$.)

(d) Déduire du **??** que tous les termes de la suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.
E est un anneau donc toute puissance positive d'une matrice de E est également dans E. Comme $U \in E$, on en déduit que tous les termes de la suite $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E.

2. Établir une relation qui, pour tout entier naturel n, lie les matrices U_{n+2}, U_{n+1} et U_n. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$U_{n+2} = a_{n+2}J + \frac{1}{2}b_{n+2}I_2 = (a_{n+1}+a_n)J + \frac{1}{2}(b_{n+1}+b_n)I_2 = a_{n+1}J + \frac{1}{2}b_{n+1}I_2 + a_nJ + \frac{1}{2}b_nI_2 = U_{n+1} + U_n.$$

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $U_n = U^n$. *Initialisation : $U_0 = 0 \times J + \frac{1}{2} \times 2I_2 = I_2 = U^0$ et $U_1 = U$ par définition.*
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = U^n$ et $U_{n+1} = U^{n+1}$. Alors, d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence,

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n = U^{n+1} + U^n = (U + I_2)U^n.$$

Or,

$$U^2 = (J + \frac{1}{2}I_2)^2 = J^2 + J + \frac{1}{4}I_2 = \frac{5}{4}I_2 + J + \frac{1}{4}I_2 = J + \frac{1}{2}I_2 + I_2 = U + I_2.$$

D'où, $U_{n+2} = U^2U^n = U^{n+2}$.
On a donc vérifié l'égalité pour $n = 0$ et $n = 1$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $U_n = U^n$ et $U_{n+1} = U^{n+1}$ alors $U_{n+2} = U^{n+2}$, donc par récurrence on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U^n$.

4. Déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n, on a les relations suivantes :
(i) $\det(U_n) = (-1)^n$.
(ii) $(b_n)^2 - 5(a_n)^2 = 4(-1)^n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\det(U_n) = \det(U^n) = \det(U)^n$ par multiplicativité du déterminant. Or $\det(U) = \frac{1}{4}(1 - (\sqrt{5})^2 = -1$, d'où $\det(U_n) = (-1)^n$. Par ailleurs, comme $U_n = a_nJ + \frac{1}{2}b_nI_2$, on a $\det(U_n) = \frac{1}{4}(b_n^2 - 5a_n^2)$, d'où $(b_n)^2 - 5(a_n)^2 = 4(-1)^n$.

5. Montrer que pour tous entiers naturels p, q, on a :

$$a_{p+q} = \frac{1}{2}(a_pb_q + a_qb_p) \quad \text{et} \quad b_{p+q} = \frac{1}{2}(5a_pa_q + b_pb_q)\,.$$

Soit p et q deux entiers naturels. Par 3., $a_{p+q}J + \frac{1}{2}b_{p+q}I_2 = U_{p+q} = U^{p+q} = U^pU^q = U_pU_q = (a_pJ + \frac{1}{2}b_pI_2)(a_qJ + \frac{1}{2}b_qI_2) = a_pa_qJ^2 + \frac{1}{2}(a_pb_q + b_pa_q)J + \frac{1}{4}b_pb_qI_2 = \frac{1}{2}(a_pb_q + b_pa_q)J + \frac{1}{4}(5a_pa_q + b_pb_q)I_2$. Comme (I_2, J) est une base de E, on en déduit que

$$a_{p+q} = \frac{1}{2}(a_pb_q + a_qb_p) \quad \textit{et} \quad b_{p+q} = \frac{1}{2}(5a_pa_q + b_pb_q).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(X) = X^n - a_n X - a_{n-1}$.

6. Calculer $S_1(X)$ et $S_2(X)$.
   $S_1(X) = X - a_1 X - a_0 = 0$ *et* $S_2(X) = X^2 - a_2 X - a_1 = X^2 - X - 1$.
7. Montrer par récurrence la propriété suivante :
   $\mathcal{P}_n$: "$S_n(X)$ et $S_{n+1}(X)$ sont divisibles par $X^2 - X - 1$".
   Initialisation : d'après le calcul précédent, S_1 *et* S_2 *sont divisibles par* $X^2 - X - 1$*, donc* $\mathcal{P}_1$ *est vraie.*
   Hérédité : soit $n \geq 1$*. Supposons que la propriété* $\mathcal{P}_n$ *est vraie. Alors,* $S_{n+2} = X^{n+2} - a_{n+2}X - a_{n+1} = X^{n+2} - (a_{n+1} + a_n)X - (a_n + a_{n-1}) = X^{n+2} + S_{n+1} - X^{n+1} + S_n - X^n = X^n(X^2 - X - 1) + S_{n+1} + S_n$*. Par hypothèse de récurrence,* $S_{n+1} + S_n$ *est divisible par* $X^2 - X - 1$*, donc* S_{n+2} *l'est également, et ainsi la propriété* $\mathcal{P}_{n+1}$ *est vraie (*S_{n+1} *et* $S_{(n+1)+1}$ *sont divisibles par* $X^2 - X - 1$*).*
   On a donc vérifié que $\mathcal{P}_1$ *est vraie et que :* $\forall n \geq 1, \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ *. Ainsi, par récurrence, on a* $\forall n \geq 1, \mathcal{P}_n$.