

## CAPES EXTERNE

## MATHÉMATIQUES 1

## Problème 1

## Partie A

I. 1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$$\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2} \leq \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} = |z|.$$

De plus, on a l'égalité si et seulement si chaque inégalité écrite est une égalité. La deuxième inégalité est une égalité si et seulement si  $(\operatorname{Im}(z))^2 = 0$  ce qui équivaut au fait que  $z$  est réel. La première inégalité est une égalité si et seulement si  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ .

Finalement,  $\operatorname{Re}(z) = |z|$  si et seulement si  $z$  est un réel positif.

I. 2. Soit  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ .

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|\bar{z}_1 z_2| + |z_2|^2 \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= |z_1|^2 + 2|\bar{z}_1| |z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Mais alors,  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  par croissance de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $[0, +\infty[$ .

I. 3. Soient  $z_1$  et  $z_2$  deux nombre complexes non nuls.  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$  si et seulement si la seule inégalité écrite à la question précédente est une égalité. D'après la question I.1.,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |\bar{z}_1 z_2| \Leftrightarrow \bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}^{+*} \quad (\text{car } \bar{z}_1 z_2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} z_2 \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}^{+*} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda > 0 / \frac{z_1}{z_2} = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 / z_2 = \lambda z_1. \end{aligned}$$

On en déduit encore que  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = 0 [2\pi]$ .

II. 1. Montrons par récurrence que  $\forall n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ .

- Ce résultat est vrai quand  $n = 2$  d'après la question I.2.
- Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ . Soit alors  $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ .

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| &= \left| \left( \sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \quad (\text{d'après la question I.2.}) \\
&\leq \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}| \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que  $\forall n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ .

**II. 2.** Montrons par récurrence que  $\forall n \geq 2, \forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*} / z_k = \lambda_k z_1$ .

• Ce résultat est vrai quand  $n = 2$  d'après la question I.3.

• Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*} / z_k = \lambda_k z_1$ .

Soit  $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que  $\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$ . On a

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|,$$

et, puisque  $\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$ , chaque inégalité écrite est une égalité. Puisque la deuxième inégalité est une égalité, par hypothèse de récurrence,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*} / z_k = \lambda_k z_1$ . Puisque la première inégalité est une égalité,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{+*} / z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k = \lambda \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_1$  et donc  $\exists \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^{+*} / z_{n+1} = \lambda_{n+1} z_1$ .

Réciproquement, supposons que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*} / z_k = \lambda_k z_1$ . Alors,

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k z_1 \right| = \left( \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k \right) |z_1| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

On en déduit encore que  $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \arg \left( \frac{z_k}{z_1} \right) = 0 [2\pi]$ .

## Partie B

**I.** Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , posons  $z_k = e^{\frac{2i(k-1)\pi}{n}}$ .

(i) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, z_k \neq 0$ .

(ii) On sait que les  $z_k, 1 \leq k \leq n$ , sont deux à deux distincts.

(iii) Puisque  $n \geq 3$ , on sait que les  $A_k$  ne sont pas alignés sur une droite.

$$\text{(iv)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2i(k-1)\pi}{n}} = \frac{1 - \left( e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.$$

Donc, les  $z_k, 1 \leq k \leq n$ , conviennent.

**II. 1.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

$$\sum_{k=1}^n \overline{u_k} (z - z_k) = z \overline{\left( \sum_{k=1}^n u_k \right)} - \sum_{k=1}^n \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} z_k = z \times 0 - \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|^2}{|z_k|} = - \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

**II. 2.** Puisque  $\sum_{k=1}^n |z_k|$  est un réel positif,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z_k| &= \left| \sum_{k=1}^n |z_k| \right| = \left| \sum_{k=1}^n -\overline{u_k} (z - z_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |-\overline{u_k} (z - z_k)| = \sum_{k=1}^n |-\overline{u_k}| |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |z - z_k|. \end{aligned}$$

Donc, pour tout nombre complexe  $z$ ,  $\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z - z_k|$ .

**II. 3.** Soit  $z$  un nombre complexe distinct de chacun des  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Alors,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $-\overline{u_k} (z - z_k) \neq 0$  et d'après la question II.2. de la partie A,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n |z - z_k| &\Leftrightarrow \left| \sum_{k=1}^n -\overline{u_k} (z - z_k) \right| = \sum_{k=1}^n |-\overline{u_k} (z - z_k)| \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*} / -\overline{u_k} (z - z_k) = -\lambda_k \overline{u_1} (z - z_1). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a  $\sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n |z - z_k| = -\overline{u_1} (z - z_1) \sum_{k=1}^n \lambda_k$  et donc  $\overline{u_1} (z - z_1) = -\frac{\sum_{k=1}^n |z_k|}{\sum_{k=1}^n \lambda_k} \in \mathbb{R}^{-*}$  puis  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\overline{u_k} (z - z_k) = \lambda_k \overline{u_1} (z - z_1) \in \mathbb{R}^{-*}.$$

Réciproquement, si  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\overline{u_k} (z - z_k) \in \mathbb{R}^{-*}$ , alors  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $-\overline{u_k} (z - z_k) \in \mathbb{R}^{+*}$  puis

$$\sum_{k=1}^n |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |-\overline{u_k} (z - z_k)| = \sum_{k=1}^n -\overline{u_k} (z - z_k) = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Si maintenant  $z$  est l'un des  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , alors  $-\overline{u_k} (z - z_k) = 0$  et  $\forall j \neq k$ ,  $-\overline{u_j} (z - z_j) \neq 0$ . En reprenant l'étude précédente, on a l'égalité si et seulement si  $\overline{u_k} (z - z_k) = 0$  et  $\forall j \neq k$ ,  $\overline{u_j} (z - z_j) \in \mathbb{R}^{-*}$ . En résumé,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left( \sum_{k=1}^n |z - z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \overline{u_k} (z - z_k) \in \mathbb{R}^{-*} \right).$$

**II. 4.**  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\overline{u_k} (z - z_k) = \frac{z - z_k}{u_k} = |z_k| \frac{z - z_k}{z_k} = -|z_k| \frac{z - z_k}{0 - z_k}$  ( $\overline{u_k} = \frac{1}{u_k}$  car  $|u_k| = 1$ ). Donc,

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \overline{u_k} (z - z_k) \in \mathbb{R}^{-} &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{z - z_k}{0 - z_k} \in \mathbb{R}^{+} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, M = A_k \text{ ou } M \neq A_k \text{ et } \left( \overrightarrow{A_k O}, \overrightarrow{A_k M} \right) = 0 \text{ [} 2\pi \text{]} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, M \in [A_k O] \text{ (on rappelle que } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_k \neq O \text{)} \\ &\Leftrightarrow M = O \text{ (car deux au moins des demi-droites } [A_k O] \text{ sont sécantes en } O \text{)}. \end{aligned}$$

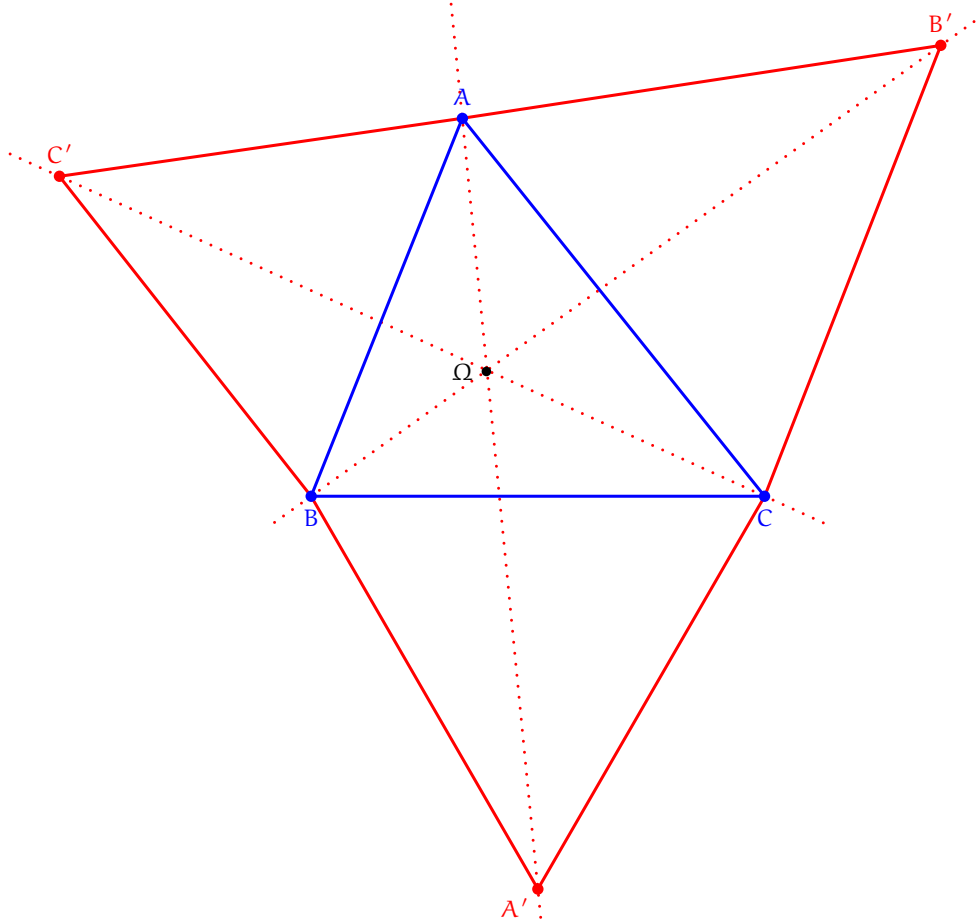
Donc,  $(\star)$  est une égalité si et seulement si  $M = O$  ou encore  $z = 0$

**II. 5.**  $\sum_{k=1}^n MA_k = \sum_{k=1}^n |z - z_k| \geq \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n OA_k$  avec égalité si et seulement si  $z = 0$  ou encore  $M = O$ .

Donc,  $\sum_{k=1}^n MA_k$  admet un minimum à savoir  $\sum_{k=1}^n OA_k$  et ce minimum est atteint en un unique point à savoir  $M = O$ .

## Partie C

I. Figure.



II.  $B' = r_{A, \frac{\pi}{3}}(C)$ . Donc,  $b' = a + e^{\frac{i\pi}{3}}(c - a) = a - j^2(c - a)$ . De même,  $B = r_{A, \frac{\pi}{3}}(C')$  et donc  $b = a + e^{\frac{i\pi}{3}}(c' - a) = a - j^2(c' - a)$ .

III.  $\frac{b' - b}{c - c'} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}(c - a) - e^{\frac{i\pi}{3}}(c' - a)}{c - c'} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}(c - c')}{c - c'} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ . Donc,  $\frac{b' - b}{c - c'}$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$ .

IV. Puisque  $\Omega$  est strictement compris à l'intérieur au triangle ABC et que les points  $B'$  et  $C'$  sont extérieurs à ce triangle, les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega B}$  et  $\overrightarrow{B'B}$  sont non nuls, colinéaires et de même sens de même que les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega C}$  et  $\overrightarrow{C'C}$ . Donc,

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) &= (\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{C'C}) = \arg\left(\frac{c - c'}{b - b'}\right) [2\pi] = -\arg\left(\frac{b - b'}{c - c'}\right) [2\pi] = -\arg\left(-e^{\frac{i\pi}{3}}\right) [2\pi] \\ &= -\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) [2\pi] \\ &= \frac{2\pi}{3} [2\pi]. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles des points A, B et C, on obtient finalement  $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) = (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .

V. Notons  $a$ ,  $b$  et  $c$  les affixes respectives des vecteurs  $\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A}$ ,  $\frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B}$  et  $\frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C}$ .

D'après la question précédente,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont trois nombres complexes de module 1 tels que  $\arg\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  et  $\arg\left(\frac{c}{b}\right) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ . Donc,  $b = ja$  et  $c = jb = j^2a$  où  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  puis

$$a + b + c = a(1 + j + j^2) = 0$$

ou encore  $\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \vec{0}$ .

**VI.** On choisit un repère orthonormé direct d'origine  $\Omega$ . Les conditions de la partie B sont vérifiées par les points  $A_1 = A$ ,  $A_2 = B$  et  $A_3 = C$  car, entre autres, l'égalité  $\frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \frac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \frac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \vec{0}$  s'écrit  $\frac{z_A}{|z_A|} + \frac{z_B}{|z_B|} + \frac{z_C}{|z_C|} = 0$ .

D'après la partie B, pour tout point  $M$  du plan,  $MA + MB + MC \geq \Omega A + \Omega B + \Omega C$  avec égalité si et seulement si  $M = \Omega$ .

## Problème 2

### Partie A

**I. 1. Questions de cours.** Soit  $A \in \mathbb{R}$ . Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée,  $A$  n'est pas un majorant de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Donc, il existe un entier  $n_0$  tel que  $u_{n_0} > A$ .

Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, pour  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \geq u_{n_0} > A$ .

On a montré que :  $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)$ . Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**I. 2.** Soit  $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Par hypothèse,  $E$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{R}$ . Donc,  $E$  admet dans  $\mathbb{R}$  une borne supérieure que l'on note  $\ell$ .

Montrons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le réel  $\ell$ . Puisque  $\ell$  est un majorant de  $E$ , pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq \ell$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\ell$  est le plus petit des majorants de  $E$ ,  $\ell - \varepsilon$  n'est pas un majorant de  $E$ . Donc, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$ . Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, pour  $n \geq n_0$ , on a  $u_n \geq u_{n_0} > \ell - \varepsilon$  et donc  $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell$ .

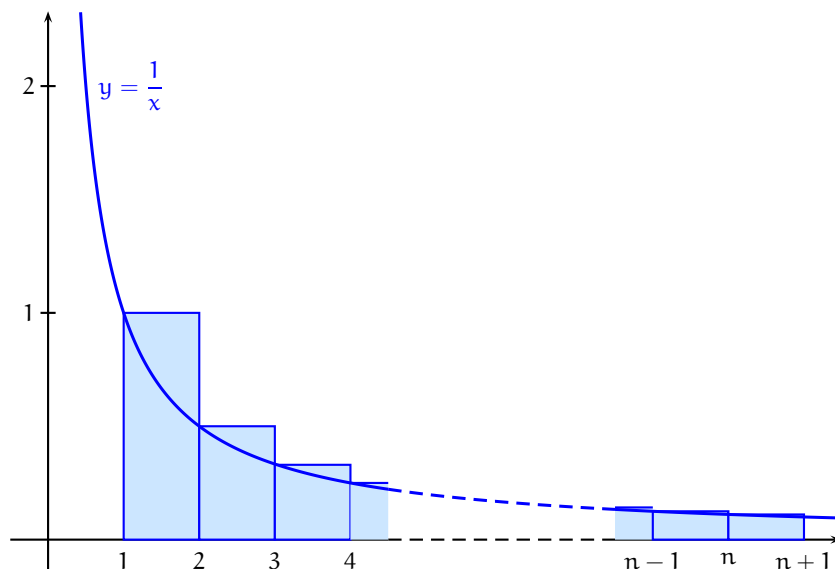
On a montré que :  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \ell - \varepsilon < u_n \leq \ell)$ . Donc, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

**I. 3.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante. Alors, la suite  $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. D'après la question précédente,

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (-u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (-u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est minorée.}$$

Une suite décroissante converge si et seulement si elle est minorée.

**II. 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $a_n$  est la somme des aires, exprimées en unité d'aire, des rectangles ci-dessous :



**II. 2. a.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ ,  $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ . En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - (n+1)) \times \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}.$$

**II. 2. b.** Supposons par l'absurde que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. Notons  $\ell$  sa limite. Quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'inégalité de la question précédente, on obtient  $\ell - \ell \geq \frac{1}{2}$  ou encore  $0 \geq \frac{1}{2}$ . Ceci est absurde et donc la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge.

**II. 3. a.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  de sorte que  $[k, k+1] \subset ]0, +\infty[$ . Pour tout réel  $t$  de  $[k, k+1]$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ . Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k) \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq (k+1-k) \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

**II. 3. b.** L'inégalité à démontrer est vraie quand  $n=1$  car  $a_1 = 1$  et  $\ln 1 = 0$ .

Soit  $n \geq 2$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ . En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \text{ ou encore } \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \text{ ou enfin } a_n - 1 \leq \ln n.$$

D'autre part, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ . En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ ou encore } \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq a_n \text{ ou encore } \ln(n+1) \leq a_n \text{ ou enfin } \ln n \leq a_n \text{ car } \ln n \leq \ln(n+1).$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n - 1 \leq \ln n \leq a_n.$$

**II. 3. c.** D'après la question précédente,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\ln n \leq a_n \leq \ln n + 1$  puis

$$\forall n \geq 2, 1 \leq \frac{a_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Les deux membres extrêmes de cet encadrement tendent vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et donc  $\frac{a_n}{\ln n}$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou encore

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n.$$

**II. 4.** D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq a_n - \ln n \leq 1$ . Donc, la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n - (\ln(n+1) - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$ . D'après la question II.3.a., pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_{n+1} - b_n \leq 0$ . La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc décroissante.

La suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et est minorée par 0. Donc, la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un réel positif ou nul.

## Partie B

**I. 1. a.** Il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour  $k \geq n_0$ ,  $-\varepsilon \leq u_k \leq \varepsilon$ . Soit  $n \geq n_0 + 1$ . En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient  $\sum_{k=n_0+1}^n -\varepsilon \leq \sum_{k=n_0+1}^n u_k \leq \sum_{k=n_0+1}^n \varepsilon$  ou encore  $-(n-n_0)\varepsilon \leq \sum_{k=n_0+1}^n u_k \leq (n-n_0)\varepsilon$  ce qui

implique  $-n\varepsilon \leq \sum_{k=n_0+1}^n u_k \leq n\varepsilon$ .

On en déduit que  $\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - n\varepsilon \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + n\varepsilon$  puis que  $\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$ . Cet encadrement reste vrai quand  $n = n_0$  et donc

$$\forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right) - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right) + \varepsilon.$$

**I. 1. b.** Soit  $n \geq n_0$ . Donc,  $\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right) - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right) + \varepsilon$ .

$\sum_{k=1}^{n_0} u_k$  est une expression constante quand  $n$  varie et donc  $\frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par suite, il

existe  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq n_1$ ,  $-\varepsilon \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right) \leq \varepsilon$ .

Soit  $n = \text{Max}\{n_0, n_1\}$ . Pour  $n \geq N$ , on a  $-2\varepsilon \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right) - \varepsilon \leq v_n \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n_0} u_k \right) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$ .

On a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* / \forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq N \Rightarrow -2\varepsilon \leq v_n \leq 2\varepsilon)$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

**I. 2.** On suppose que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un certain réel  $\ell$ . Alors, la suite  $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

D'après la question précédente,  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ou encore  $\left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - \ell$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Ceci montre que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ , alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

**II. 1.** Montrons par récurrence que pour tout  $n \geq 2$ ,  $x_n$  existe et  $0 < x_n < 1$ .

•  $x_2 = \frac{1 \times (1+1)}{1+2} = \frac{2}{3}$ . Donc, le résultat est vrai pour  $n = 2$ .

• Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $x_n$  existe et  $0 < x_n < 1$ . Alors,  $1 + 2x_n \neq 0$  puis  $x_{n+1}$  existe puis  $x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} > 0$ .

Ensuite,

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} - 1 = \frac{x_n^2 - x_n - 1}{1+2x_n} = \frac{\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}{1+2x_n}.$$

Par hypothèse de récurrence,  $x_n \in ]0, 1[$  puis  $\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$  puis  $\left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$  et finalement  $x_{n+1} - 1 < 0$ .

On a montré par récurrence que pour tout  $n \geq 2$ ,  $x_n$  existe et  $0 < x_n < 1$  et donc aussi  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < x_n \leq 1$ .

**II. 2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $x_n > 0$ ,

$$x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n} \leq \frac{x_n(1+2x_n)}{1+2x_n} = x_n.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_{n+1} \leq x_n$  et donc la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.

**II. 3.** La suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée par 0. Donc la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un certain réel  $\ell \geq 0$ .

Puisque  $\ell \geq 0$ ,  $1 + 2\ell \neq 0$  et donc, quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans l'égalité  $x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}$ , on obtient  $\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell}$ . Or,

$$\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell} \Leftrightarrow \frac{\ell(1+2\ell) - \ell(1+\ell)}{1+2\ell} = 0 \Leftrightarrow \frac{\ell^2}{1+2\ell} = 0 \Leftrightarrow \ell = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

**II. 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  $x_n$  et  $x_{n+1}$  ne sont pas nuls puis

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n - (1+x_n)}{x_n(1+x_n)} = \frac{x_n}{x_n(1+x_n)} = \frac{1}{1+x_n}.$$

**II. 5.** D'après les questions II.3. et II.4.,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+0} = 1$ . Donc, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 1.

**II. 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1} \right) \text{ (somme télescopique).}$$

On en déduit que  $x_n = \frac{1}{nv_{n-1} + \frac{1}{x_1}} = \frac{1}{nv_{n-1} + 1}$ . Puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 1, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge

vers 1 d'après la question I.2. et donc  $x_n = \frac{1}{nv_{n-1} + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n(1 + o(1)) + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n + o(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

**III. 1.** Si la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un certain réel  $\ell$ , alors  $x_{n+1} - x_n$  tend vers  $\ell - \ell = 0$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et en particulier, la suite  $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.

**III. 2. a.** Pour  $n \geq 1$ , posons  $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k)$ . Pour  $n \geq 1$ ,  $y_n = \frac{1}{n} (x_{n+1} - x_1)$  (somme télescopique) puis pour  $n \geq 2$ ,  $x_n = (n-1)y_{n-1} + x_1$  et donc

$$\frac{x_n}{n} = \left( 1 - \frac{1}{n} \right) y_{n-1} + x_1.$$

Puisque  $x_{n+1} - x_n$  tend vers  $\ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même  $y_{n-1}$  d'après le lemme de CÉSARO. On en déduit que  $\frac{x_n}{n}$  tend vers  $(1-0)\ell + 0 = \ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = \ell.$$

**III. 2. b.** Si  $\ell \neq 0$ , on en déduit que  $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell n$  et en particulier, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge. Plus précisément, si  $\ell > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  et si  $\ell < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$ .

**III. 2. c.** Pour  $n \geq 1$ , posons  $x_n = \ln(n)$ .  $x_{n+1} - x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pourtant, la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge. Donc, si  $x_{n+1} - x_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  n'est pas nécessairement convergente.

## Partie C

**I. 1.** Pour  $n \geq 1$ ,

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k = -\frac{1 - (-1)^n}{2n} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Mais alors,  $\forall n \geq 1$ ,  $|v_n| \leq \frac{1}{n}$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

**I. 2.** Pourtant, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge car la suite extraite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 1 et la suite extraite  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $-1 \neq 1$ .

La réciproque de la proposition énoncée à la question I.2. de la partie B est fautive.

**II. 1.** Si  $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$ , alors  $\forall n \geq 1$ ,  $u_n = 0$  puis  $\forall n \geq 1$ ,  $v_n = 0$ . Dans ce cas, les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent vers 0.

**II. 2.** Soit  $n \geq 1$ .

$$u_{n+2} - u_n = \sin((n+2)\alpha) - \sin(n\alpha) = 2 \sin \alpha \cos((n+1)\alpha) = 2 \sin \alpha c_{n+1}$$

et

$$u_{n+2} + u_n = \sin((n+2)\alpha) + \sin(n\alpha) = 2 \cos \alpha \sin((n+1)\alpha) = 2 \cos \alpha u_{n+1}$$



**II. 3. a.** Notons  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

Puisque  $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$ ,  $\sin \alpha \neq 0$ . Par suite, pour  $n \geq 2$ ,  $c_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2 \sin \alpha}$  d'après la première relation de la question précédente. Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $c_n$  tend vers  $\frac{\ell - \ell}{2 \sin \alpha} = 0$ . Donc, la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$  dans la deuxième relation, on obtient  $2\ell = 2 \cos \alpha \ell$  puis  $(1 - \cos \alpha) \ell = 0$  et donc  $\ell = 0$  car  $\cos \alpha \neq 1$ .

**II. 3. b.** Ainsi, les suites  $(u_n)_{n \geq 1} = (\sin(n\alpha))_{n \geq 1}$  et  $(c_n)_{n \geq 1} = (\cos(n\alpha))_{n \geq 1}$  convergent toutes les deux vers 0 puis la suite  $(u_n^2 + c_n^2)_{n \geq 1}$  converge vers  $0^2 + 0^2 = 0$ .

Mais ceci est impossible car pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n^2 + c_n^2 = 1$ . Donc la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  diverge.

**II. 3. c.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(e^{ik\alpha}) = \frac{1}{n} \operatorname{Im} \left( \sum_{k=1}^n (e^{i\alpha})^k \right) \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{Im} \left( e^{i\alpha} \frac{1 - e^{in\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} \right) \quad (\text{car } \alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi} \Rightarrow e^{i\alpha} \neq 1) \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{Im} \left( e^{i\alpha(1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2})} \frac{e^{-in\alpha/2} - e^{in\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2}} \right) = \frac{1}{n} \operatorname{Im} \left( e^{i(n+1)\alpha/2} \frac{-2i \sin(n\alpha/2)}{-2i \sin(\alpha/2)} \right) \\ &= \frac{\sin \left( \frac{(n+1)\alpha}{2} \right) \sin \left( \frac{n\alpha}{2} \right)}{n \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right)}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $n \geq 1$ ,  $|v_n| \leq \frac{1}{n \left| \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right|}$  et en particulier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

**III. 1.** Soit  $n \geq 1$ .

$$nu_{n+1} = (2n - (n+1))u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

**III. 2.** Soit  $n \geq 1$ .

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^n u_k \right) = \frac{1}{n} (2nv_{2n} - nv_n) = 2v_{2n} - v_n.$$

**III. 3.** Par hypothèse, la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge vers un certain réel  $\ell$ . On en déduit que  $2nv_{2n} - v_n$  tend vers  $2\ell - \ell = \ell$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Par suite, à partir d'un certain rang  $n_0$ , on a  $u_{n+1} \leq 2v_{2n} - v_n \leq \ell + 1$ .

Ainsi, la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante et, à partir d'un certain rang,  $u_n \leq \ell + 1$ . On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge.

Si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante, en appliquant le résultat précédent à la suite  $(-u_n)_{n \geq 1}$  qui est croissante, on obtient de même la convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ . On a donc montré que

si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est monotone, alors la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge.