Sujet blanc n°1

Durée *:* 5 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Notations, définitions et rappels

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$.
Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie A - Quelques résultats généraux

I - Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

II - Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

III - Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

V - Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

VI - En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.
Indication : on pourra nommer (HR_k) la propriété supposée à la question ***V -*** *et raisonner par récurrence finie sur l'entier k.*

Partie B - Etude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

I - Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions **II -** à **VII -**, n désigne un entier naturel.

II - Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

III - On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

IV - Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question **B-III -**.*

V - Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2 - 1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

VI - Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question précédente, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2 - 1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

VII - Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, [en précisant la valeur propre associée.]de valeur propre associée $k(k+1)$ (résultat nécessaire par la suite). *On pourra utiliser la question **B-VI -**.*

VIII - Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ. Reformuler ? Montrer que $\mathrm{Sp}(\phi) = \{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$. et que le sous espace propre associé à la valeur propre $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ est $\mathrm{Vect}(L_n)$.

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Partie C - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

I - Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\| \cdot \|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

II - Etablir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle \phi(P), Q \rangle = -\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)P'(t)Q'(t)dt$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \ \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle.$$

III - Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. *On pourra utiliser la question **B-VII -**.*

IV - Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle P, L_n \rangle = 0$.

V - On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}} L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

VI - Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2, \ \text{où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle.$$

VII - Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leqslant \|P\|^2$.

Partie D - Fonction génératrice

On admet dans la suite du problème que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$ et on considère la série entière de la variable t : $\sum L_n(x)t^n$. On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

I - Montrer que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leqslant r^n$. *On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.*

II - Pour $x \in [-1,1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum L_n(x)t^n$. Montrer que : $R(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.

III - Pour $x \in [-1,1]$ et $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on pose $S_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$. Montrer que S_x est solution sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0.$$

IV - En déduire que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

V - Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question **IV -**, de retrouver l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2. *Précision : il ne s'agit pas ici de mener à bout le calcul mais juste d'expliquer rapidement la méthode.*

Partie E - Expression intégrale des polynômes de Legendre

Pour $\theta \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n(\theta) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i \sin\theta \cos u)^n du$.

I - Soit $t \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction v_n de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $v_n(u) = t^n(\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n$.

1 - Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$.

2 - Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n(u)$, où $u \in [-\pi,\pi]$.

II - En déduire l'égalité : $\forall t \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$.

Dans les questions **III -** et **IV -**, a désigne un réel strictement positif.

III - Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\cos u}{1 + a^2\cos^2 u} du = 0$. *On pourra utiliser un changement de variable défini par* $v = \pi - u$.

IV - Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{du}{1 + a^2\cos^2 u} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. *On pourra d'abord utiliser le changement de variable défini par* $u = \arctan v$ *pour établir que* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{du}{1 + a^2\cos^2 u} = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dv}{1 + v^2 + a^2}$.

V - En déduire que :

$$\forall t \in]-1,1[, \forall \theta \in [0,\pi], \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}.$$

On pourra mettre l'expression $\dfrac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$ *sous forme algébrique et calculer séparément* R *et* I*, les parties réelles et imaginaires de cette intégrale. En particulier, montrer que* $I = 0$.

VI - Déduire des questions **D-IV -**, **E-II -** et de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0,\pi], L_n(\cos\theta) = w_n(\theta)$.

VII - Justifier que : $\forall x \in [-1,1], \forall t \in]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

VIII - Prouver que : $\forall x \in [-1,1], R(x) = 1$. *On pourra raisonner par l'absurde et montrer qu'alors, pour tout* z *de* $\mathbb{C}$ *tel que* $|z| < R(x)$*, on a* $(z^2 - 2xz + 1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2 = 1$.

Partie F - Application à l'approximation d'intégrales

Dans les questions **I -** à **IX -**, n désigne un entier naturel non nul.

I - Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \cdots < t_{2n}$ vérifiant : $\forall i \in [\![1, 2n]\!], h(t_i) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $h^{(2n-1)}(c) = 0$.

II - Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par : $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ell_i(P) = P(x_i)$ (on rappelle que $x_1, \ldots, x_n$ désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes). Montrer que $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.

III - En déduire que pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n-uplet $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k \ell_k$.

IV - Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)dt = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

V - Montrer que la relation de la question **E-IV -** reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. *On pourra, pour* $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$*, utiliser la division euclidienne de* P *par* L_n *et la question* ***C-IV -***.

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

VI - Montrer que : $\exists! H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \forall i \in [\![1,n]\!], \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H_n'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$. *On pourra commencer par déterminer le noyau de l'application linéaire de* $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ *dans* $\mathbb{R}^{2n}$ *qui à* P *associe :* $(P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n))$.

On rappelle que A_n a été défini à la question **A-VI -**.

VII - Soit $x \in [-1,1]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!], x \neq x_i$.

Montrer que : $\exists c \in [-1,1], f(x) - H_n(x) = \dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$. *On pourra utiliser l'application* g *définie sur* $[-1,1]$ *par* $g(t) = f(t) - H_n(t) - \dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!}K$*, où* K *est un réel dépendant de* x *à préciser, et appliquer le résultat de la question* ***E-I -*** *à la fonction* g'.

VIII - Montrer que : $\forall y \in [-1,1],\ \exists c \in [-1,1],\ f(y) - H_n(y) = \dfrac{A_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c).$

IX - Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \max\limits_{t \in [-1,1]} |f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)) \right| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt.$$

X - Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt.$