
SUJET BLANC N°2

Durée : 5 heures.

Ce sujet est tiré du Concours Communs Polytechniques 2016 - Filière PSI.

Notations, définitions et rappels

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$] l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ [respectivement $\mathbb{C}$].
- Si $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$].
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$].
- Si $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que cette suite converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite $(M_k(i, j))_{k \in \mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i, j) de M_k converge vers le coefficient, noté $L(i, j)$, d'indice (i, j) de L .
- Un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ [respectivement de $\mathbb{C}^n$] est identifié à l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$].
- Pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|x\|_\infty = \max \{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $Sp(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et on note :

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|.$$

On rappelle que $\rho(A)$ est le rayon spectral de A .

- On note tM la transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- On rappelle que toute matrice symétrique réelle, c.à.d. matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tS = S$, est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. De plus, une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormée et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux, pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
- Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.
- Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où B est de probabilité non nulle, on notera $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B .

Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique. La première partie est consacrée à cette étude dans le cas où $n = 2$. Dans la seconde partie, on étudie le spectre des matrices stochastiques. Dans la troisième partie, on étudie l'existence d'une probabilité invariante par une matrice stochastique et la dernière partie est consacrée à l'étude des puissances d'une telle matrice.

Pour $\alpha \in [0, 1]$ et $\beta \in [0, 1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on note :

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}.$$

Il pourra être utile de noter $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

A - Puissances de $A(\alpha, \beta)$

Soient α et β deux réels de $[0, 1]$ tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

- 1 - Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha, \beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.
- 2 - Montrer que $A(\alpha, \beta)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.
- 3 - Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha, \beta)^p$
- 4 - Montrer que, pour $(\alpha, \beta) \neq (1, 1)$, la suite $(A(\alpha, \beta)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha, \beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$?

B - Application

Soient α et β deux réels de $]0, 1[$. Un message binaire de longueur $\ell \geq 1$, c'est à dire une suite finie $(a_1, a_2, \dots, a_\ell)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $a_i \in \{0, 1\}$, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément $x \in \{0, 1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On note X_0 la variable aléatoire définissant le message initial de longueur ℓ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au n -ième relais, le résultat du transfert noté X_n . On suppose que les relais sont indépendants les uns par rapport aux autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendants.

1 - Cas $\ell = 1$

- (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Indication : On appliquera la formule des probabilités totales, qui s'écrit, dans ce contexte

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = 1), \text{ pour } i \in \{0, 1\}.$$

- (b) Exprimer pour tout entier $n \geq 0$, les probabilités $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1)$.

On suppose pour toute la suite que $\mathbb{P}(X_0 = 0) \neq 0$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1) \neq 0$.

- (c) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout $j \in \{0, 1\}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \beta \\ \alpha & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Indication : remarquer que comme les relais sont indépendants, on a pour tout entier $n \geq 1$ et tous entiers i, j et k dans $\{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}_{X_0=j \cap X_n=k}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}_{X_n=k}(X_{n+1} = i).$$

(d) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1) = \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha + \beta}, \quad \text{où } \lambda = 1 - (\alpha + \beta).$$

(e) On fixe un entier $n \geq 0$ et on note C_n la probabilité pour que X_n soit conforme à X_0 . Remarquons que

$$C_n = \mathbb{P}\left((X_n = 0 \cap X_0 = 0) \cup (X_n = 1 \cap X_0 = 1)\right).$$

Montrer que $C_n = \psi_n\left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \psi_n\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 1)$, où ψ_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi_n : x \mapsto x + (1 - x)\lambda^n$.

(f) On pose $r = \min\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)$. Montrer que

$$C_n \geq r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n.$$

2 - Cas $\ell > 1$. Soit un entier $n \geq 0$. On pose $X_n = (X_n^1, \dots, X_n^\ell)$ où, pour $k \in \{1, \dots, \ell\}$, X_n^k est le résultat de la transmission du k -ième bit au n -ième relais. Soit Q_n la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial. Montrer que Q_n vérifie :

$$Q_n \geq (r + (1 - r)(1 - \alpha - \beta)^n)^\ell.$$

3 - On suppose dans cette question que $\alpha = \beta$.

(a) Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ?

On suppose de plus que $\alpha < 1/2$.

(b) Déterminer un réel $m > 0$ maximal tel que pour chaque entier $n \geq 0$, la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial, est toujours strictement supérieure à m .

(c) Soit $\varepsilon \in]0, 1 - m[$. Déterminer un entier naturel n_c tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au n_c -ième relais soit supérieure ou égale à ε (on appelle *taille critique* du réseau le plus petit entier ayant cette propriété).

PARTIE II : Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées et d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique [respectivement strictement stochastique] si et seulement si elle est à coefficients positifs [respectivement strictement positifs] et :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

A - Questions de cours sur $\mathbb{C}$

1 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Indication : on pourra utiliser le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\bar{z}$.

- 2 - Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si z_1 et z_2 ont même argument.
- 3 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

B - Coefficients

- 1 - Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique]. Montrer que pour tous i, j compris entre 1 et n , on a :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad [\text{respectivement } 0 < a_{ij} < 1].$$

- 2 - Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre associé.
- 3 - Montrer que le produit de deux matrices stochastiques [respectivement strictement stochastiques] est une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique].

C - Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

- 1 - Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty.$$

- 2 - En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall p \in \mathbb{N}, \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty.$$

- 3 - Montrer que $\rho(A) = 1$.

D - Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

- 1 - Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Indication : en notant x un vecteur propre associé à λ , on pourra considérer un indice i tel que $|x_i|$ soit maximal, et utiliser $(Ax)_i = \lambda x_i$.

- 2 - Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

E - Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

- 1 - On désigne par $A_1 = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne, et on note $B = A_1 - I_{n-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$.

Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :

$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij}.$$

- 2 - En déduire que B est à diagonale strictement dominante. Que peut-on déduire quant au rang de $A - I$?
- 3 - Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.
- 4 - En utilisant la question **D-1** (et **A**), montrer que si λ est une valeur propre de A de module 1, alors $\lambda = 1$.
- 5 - En déduire que

$$\forall \lambda \in Sp(A) \setminus \{1\}, |\lambda| < 1.$$

■ PARTIE III : Probabilité invariante ■

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i , elle reste au point i avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

A - Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position du point en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n .

1 - Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $P_n = Q^n P_0$ avec $Q = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2 - Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que :

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \text{et} \quad \Pi = Q\Pi.$$

B - Rapidité de convergence

- 1 - Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- 2 - Déterminer le rang de la matrice $Q + \frac{2}{10}I_4$.
- 3 - En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q .
- 4 - Montrer que Q est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ ayant pour premier vecteur 2Π . On notera P la matrice de passage correspondante.
- 5 - Montrer que

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{10} \end{pmatrix} {}^tP.$$

6 - En déduire que $(Q^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π .

7 - Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p - R = \left(-\frac{2}{10}\right)^p P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP$.

8 - En déduire qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on ait

$$\|Q^p - R\| = O(r^p).$$

9 - En utilisant les questions **A-1** et **B-6**, montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE IV : Puissances d'une matrice stochastique

Soit n un entier naturel non nul et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}.$$

Pour tout entier naturel non nul p , on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i,j) de A^p :

$$A^p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n , on note :

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}, \quad M_j^{(p)} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{k,j}^{(p)}.$$

1 - Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

2 - Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

3 - Majoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m) \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

4 - Convergence de ces suites

En déduire que, pour tout entier j compris entre 1 et n , les suites $\left(m_j^{(p)}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ et $\left(M_j^{(p)}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

5 - Conclusion

En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques.