Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre printemps 2016 - 2017
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

SUJET BLANC N°2 - Corrigé

Durée : 5 heures.
Ce sujet est tiré du Concours Communs Polytechniques 2016 - Filière PSI.

Notations, définitions et rappels

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$] l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ [respectivement $\mathbb{C}$].
- Si $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$].
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$].
- Si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que cette suite converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite $(M_k(i,j))_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i,j) de M_k converge vers le coefficient, noté $L(i,j)$, d'indice (i,j) de L.
- Un vecteur $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ [respectivement de $\mathbb{C}^n$] est identifié à l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$].
- Pour tout vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $Sp(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et on note :
$$\rho(A) = \max_{\lambda\in Sp(A)} |\lambda|.$$
On rappelle que $\rho(A)$ est le rayon spectral de A.
- On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- On rappelle que toute matrice symétrique réelle, c.à.d. matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tS = S$, est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. De plus, une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormée et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux, pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
- Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.
- Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où B est de probabilité non nulle, on notera $\mathbb{P}_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B.

Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique. La première partie est consacrée à cette étude dans le cas où $n = 2$. Dans la seconde partie, on étudie le spectre des matrices stochastiques. Dans la troisième partie, on étudie l'existence d'une probabilité invariante par une matrice stochastique et la dernière partie est consacrée à l'étude des puissances d'une telle matrice.

PARTIE I : Le cas de la dimension 2

Pour $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [0,1]$ avec $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, on note :

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Il pourra être utile de noter $\lambda = 1-(\alpha+\beta)$.

A - Puissances de $A(\alpha,\beta)$
Soient α et β deux réels de $[0,1]$ tels que $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

1 - Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha,\beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.

Corrigé : $A(\alpha,\beta) - I_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$ *n'est pas la matrice nulle car* $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ *et son rang vaut clairement* 1. *On remarque que le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est élément du noyau de* $A(\alpha,\beta) - I_2$ *qui, par le théorème du rang, est de dimension* 1. *Ainsi* 1 *est valeur propre de* $A(\alpha,\beta)$ *et le sous-espace propre associé vaut* $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2 - Montrer que $A(\alpha,\beta)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.

Corrigé : *Posons* $\lambda = 1-(\alpha+\beta)$. *Alors* $A(\alpha,\beta) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ *n'est pas la matrice nulle car* $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ *et le vecteur* $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ *est clairement un élément du noyau de cette matrice. La matrice* $A(\alpha,\beta) \in M_2(\mathbb{R})$ *a donc une seconde valeur propre* $\lambda \neq 1$, *elle est donc diagonalisable. Les vecteurs* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ *forment une base de vecteurs propres de* $\mathbb{R}^2$ *et on a ainsi*

$$P^{-1}A(\alpha,\beta)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \textit{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$$

3 - Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha,\beta)^p$

Corrigé : *Notons* $A = A(\alpha,\beta)$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. *Montrons par récurrence que pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *on a* $A^p = PD^pP^{-1}$.

- *Initialisation : c'est immédiat pour* $p = 0$ *car* $A^0 = I_2 = PI_2P^{-1} = PD^0P^{-1}$.
- *Hérédité : supposons le résultat vrai au rang* $p \geq 0$. *On a alors* $A^{p+1} = A^pA = PD^pP^{-1}PDP^{-1} = PD^{p+1}P^{-1}$ *ce qui montre le résultat au rang* $p+1$.

Le calcul de l'inverse de P *donne* $P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *On a ainsi pour tout* $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = PD^pP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} 1 & \alpha\lambda^p \\ 1 & -\beta\lambda^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha\lambda^p & \alpha(1-\lambda^p) \\ \beta(1-\lambda^p) & \alpha+\beta\lambda^p \end{pmatrix}$$

4 - Montrer que, pour $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$, la suite $(A(\alpha,\beta)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha,\beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha,\beta) = (1,1)$?

Corrigé : *Si $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$ alors $0 < \alpha+\beta < 2$ et donc $-1 < \lambda < 1$. Ainsi $\lambda^p \to 0$ quand $p \to +\infty$ et la question précédente montre que*

$$\lim_{p\to+\infty} A^p = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta & \alpha\\ \beta & \alpha\end{pmatrix} = L(\alpha,\beta).$$

Si $\alpha=\beta=1$ alors $\lambda=-1$ et les suites coordonnées ne convergent pas : en effet, on a $A(1,1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $A(1,1)^2 = I_2$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A(1,1)^{2p} = I_2$ et $A(1,1)^{2p+1} = A(1,1)$, ce qui donne deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes.

B - Application

Soient α et β deux réels de $]0,1[$. Un message binaire de longueur $\ell \geq 1$, c'est à dire une suite finie $(a_1, a_2, \cdots, a_\ell)$ où pour tout $i \in \{1,\cdots,\ell\}$, $a_i \in \{0,1\}$, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément $x \in \{0,1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On note X_0 la variable aléatoire définissant le message initial de longueur ℓ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au n-ième relais, le résultat du transfert noté X_n. On suppose que les relais sont indépendants les uns par rapport aux autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendants.

1 - Cas $\ell = 1$

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_{n+1}=0)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\alpha & \beta\\ \alpha & 1-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\end{pmatrix}.$$

Indication : On appliquera la formule des probabilités totales, qui s'écrit, dans ce contexte

$\mathbb{P}(X_{n+1}=i) = \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=i)\mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=i)\mathbb{P}(X_n=1)$, pour $i \in \{0,1\}$.

Corrigé : *Soit $n \geq 0$. La formule des probabilités totales se traduit matriciellement par*

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_{n+1}=0)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=0) & \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=0)\\ \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=1) & \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\end{pmatrix}$$

Or, $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=1) = \alpha$ (probabilité d'erreur pour un passage de 0 à 1) et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=0) = \beta$ (probabilité d'erreur pour un passage de 1 à 0) puis $\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=0) = 1-\alpha$ (passage sans erreur sur 0) et $\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=1) = 1-\beta$ (passage sans erreur sur 1) ; ce qui donne :

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_{n+1}=0)\\ \mathbb{P}(X_{n+1}=1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\alpha & \beta)\\ \alpha & 1-\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\end{pmatrix} = {}^tA(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\end{pmatrix}$$

(b) Exprimer pour tout entier $n \geq 0$, les probabilités $\mathbb{P}(X_n=0)$ et $\mathbb{P}(X_n=1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_0=0)$ et $\mathbb{P}(X_0=1)$.

Corrigé : *Par une récurrence immédiate, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n=0)\\ \mathbb{P}(X_n=1)\end{pmatrix} = {}^t(A(\alpha,\beta)^n)\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_0=0)\\ \mathbb{P}(X_0=1)\end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}(X_n=0) = \frac{\beta+\alpha\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0=0) + \frac{\beta(1-\lambda^n)}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0=1),$$

$$\mathbb{P}(X_n=1) = \frac{\alpha(1-\lambda^n)}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0=0) + \frac{\alpha+\beta\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0=1).$$

On suppose pour toute la suite que $\mathbb{P}(X_0 = 0) \neq 0$ et $\mathbb{P}(X_0 = 1) \neq 0$.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout $j \in \{0, 1\}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Indication : remarquer que comme les relais sont indépendants, on a pour tout entier $n \geq 1$ et tous entiers i, j et k dans $\{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}_{X_0=j \cap X_n=k}(X_{n+1} = i) = \mathbb{P}_{X_n=k}(X_{n+1} = i).$$

Corrigé : *Pour $n = 0$, on a*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=0}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=0}(X_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=1}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=1}(X_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=1}(X_1 = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=1}(X_1 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1-\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le relation est donc vérifiée pour $n = 0$.
Soit $n \geq 1$ et $j \in \{0, 1\}$. La formule des probabilités totales donne

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j \cap X_n=0}(X_{n+1} = 0) & \mathbb{P}_{X_0=j \cap X_n=1}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j \cap X_n=0}(X_{n+1} = 1) & \mathbb{P}_{X_0=j \cap X_n=1}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'indépendance des relais, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) & \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) & \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

et ainsi, la relation demandée.

(d) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha + \beta} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1) = \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha + \beta}, \quad \text{où } \lambda = 1 - (\alpha + \beta).$$

Corrigé : *On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1\}$,*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_n = 1) \end{pmatrix} = {}^t(A(\alpha, \beta)^n) \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=j}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=j}(X_0 = 1) \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^n & \beta(1 - \lambda^n) \\ \alpha(1 - \lambda^n) & \alpha + \beta\lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^n & \beta(1 - \lambda^n) \\ \alpha(1 - \lambda^n) & \alpha + \beta\lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0) = \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha + \beta} \quad et \quad \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1) = \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha + \beta}, \quad où\ \lambda = 1 - (\alpha + \beta).$$

(e) On fixe un entier $n \geq 0$ et on note C_n la probabilité pour que X_n soit conforme à X_0. Remarquons que

$$C_n = \mathbb{P}\left((X_n = 0 \cap X_0 = 0)\bigcup(X_n = 1 \cap X_0 = 1)\right).$$

Montrer que $C_n = \psi_n\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \psi_n\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 1)$, où ψ_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi_n : x \mapsto x + (1-x)\lambda^n$.

Corrigé : *Comme* $(X_n = 0 \cap X_0 = 0)\bigcap(X_n = 1 \cap X_0 = 1) = \emptyset$, *on a*

$$\begin{aligned}
C_n &= \mathbb{P}\left((X_n = 0 \cap X_0 = 0)\bigcup(X_n = 1 \cap X_0 = 1)\right) \\
&= \mathbb{P}_{X_0=0}(X_n = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}_{X_0=1}(X_n = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \frac{\beta + \alpha\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_0 = 0) + \frac{\alpha + \beta\lambda^n}{\alpha+\beta}\mathbb{P}(X_1 = 1) \\
&= \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\lambda^n\right)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\lambda^n\right)\mathbb{P}(X_0 = 1) \\
&= \psi_n\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \psi_n\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\mathbb{P}(X_0 = 1).
\end{aligned}$$

(f) On pose $r = \min\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$. Montrer que

$$C_n \geq r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n.$$

Corrigé : *La fonction ψ_n est dérivable de dérivée $\psi_n'(x) = 1-\lambda^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $|\lambda| < 1$, cette dérivée est toujours positive et donc ψ est croissante. Ainsi,*

$$C_n \geq \psi_n(r)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \psi_n(r)\mathbb{P}(X_0 = 1) = \psi_n(r) = r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n.$$

2 - Cas $\ell > 1$. Soit un entier $n \geq 0$. On pose $X_n = (X_n^1, \cdots, X_n^\ell)$ où, pour $k \in \{1, \cdots, \ell\}$, X_n^k est le résultat de la transmission du k-ième bit au n-ième relais. Soit Q_n la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial. Montrer que Q_n vérifie :

$$Q_n \geq (r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n)^\ell.$$

Corrigé : *Pour chaque bit la probabilité que le message soit conforme est égal au nombre C_n introduit dans la question* **1-(e)**. *Ainsi, la probabilité pour que le message soit conforme vaut C_n^ℓ, d'où le résultat.*

3 - On suppose dans cette question que $\alpha = \beta$.

(a) Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ?

Corrigé : *Dans ce cas, on a* $r = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{1}{2}$ *et donc dans la question* **1-(f)**, *on obtient l'égalité*

$$C_n = \psi_n(\frac{1}{2})\mathbb{P}(X_0 = 0) + \psi_n(\frac{1}{2})\mathbb{P}(X_0 = 1) = \psi_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2\alpha)^n.$$

L'inégalité précédente est alors une égalité et

$$Q_n = \left(\frac{1 + (1-2\alpha)^n}{2}\right)^l.$$

On suppose de plus que $\alpha < 1/2$.

(b) Déterminer un réel $m > 0$ maximal tel que pour chaque entier $n \geq 0$, la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial, est toujours strictement supérieure à m.

Corrigé : *Dans ce cas, $0 < (1-2\alpha) < 1$. Ainsi, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et elle converge vers $m = \dfrac{1}{2^l}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Q_n > m$ et le réel m est maximal avec cette propriété.*

(c) Soit $\varepsilon \in]0, 1-m[$. Déterminer un entier naturel n_c tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au n_c-ième relais soit supérieure ou égale à ε (on appelle *taille critique* du réseau le plus petit entier ayant cette propriété).

Corrigé : *Il s'agit de trouver un entier n_n tel que $Q_{n_c} < 1-\varepsilon$. Notons qu'un tel entier existe car $1-\varepsilon > m$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $Q_n < 1-\varepsilon$ si et seulement si $\left(\dfrac{1+(1-2\alpha)^n}{2}\right)^l < 1-\varepsilon$ si et seulement si $(1-2\alpha)^n < 2(1-\varepsilon)^{1/l}-1$. Notons que $2(1-\varepsilon)^{1/l}-1 > 0$ car $1-\varepsilon > m = \dfrac{1}{2^l}$. Ainsi, $Q_n < 1-\varepsilon$ si et seulement si $n\ln(1-2\alpha) < \ln(2(1-\varepsilon)^{1/l}-1)$ si et seulement si $n > \ln\left(\dfrac{2(1-\varepsilon)^{1/l}-1}{1-2\alpha}\right)$. Il suffit de prendre pour n_c un entier strictement supérieur à la partie entière de $\ln\left(\dfrac{2(1-\varepsilon)^{1/l}-1}{1-2\alpha}\right)$.*

PARTIE II : Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées et d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique [respectivement strictement stochastique] si et seulement si elle est à coefficients positifs [respectivement strictement positifs] et :

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\,.$$

A - Questions de cours sur $\mathbb{C}$

1 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ et $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

Indication : on pourra utiliser le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\bar{z}$.

Corrigé : *Soit $z_1 = x_1+iy_1$ et $z_2 = x_2+iy_2$ où x_1, y_1, x_2 et y_2 sont des réels. Rappelons que $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ et que l'on a les propriétés suivantes :*

— $\overline{z_1+z_2} = \overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = (x_1+x_2)-i(y_1+y_2) = \overline{z_1}+\overline{z_2}$,

— $\overline{z_1z_2} = \overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)} = x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+x_2y_1) = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$,

— $z_1\overline{z_1} = (x_1+iy_1)x_1-iy_1) = x_1^2-ix_1y_1+ix_1y_1+y_1^2 = x_1^2+y_1^2 = |z_1|^2$

— $z_1+\overline{z_1} = 2Re(z_1) \leq 2|z_1|$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\\
&= |z_1|^2+|z_2|^2+2Re(z_1\overline{z_2})\\
&\leq |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2.
\end{aligned}$$

D'où, $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.

De plus, $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = |z_1|^2\cdot|z_2|^2$, et ainsi $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

2 - Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si z_1 et z_2 ont même argument.

Corrigé : *On suppose dans cette question que z_1 et z_2 sont deux complexes non nuls. L'inégalité triangulaire ci-dessus est une égalité si et seulement si $Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1| \cdot |z_2|$. Si l'on note θ_1 et θ_2 les arguments respectifs de z_1 et z_2 dans $[0, 2\pi[$, alors $Re(z_1\overline{z_2}) = |z_1| \cdot |z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2)$ et on a donc l'égalité ci-dessus si et seulement si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$. Or, comme $\theta_1 - \theta_2 \in]-2\pi, 2\pi[$, on a $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$ si et seulement si $\theta_1 - \theta_2 = 0$, ce qui permet de conclure.*

3 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.

Corrigé : *C'est une conséquence classique de l'inégalité triangulaire : soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ d'où le résultat.*

B - Coefficients

1 - Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique]. Montrer que pour tous i, j compris entre 1 et n, on a :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad \text{[respectivement } 0 < a_{ij} < 1\text{]}.$$

Corrigé : *Si A est stochastique, les coefficients d'une ligne sont positifs et de somme plus petite que 1. Ils sont donc tous plus petits que 1 et finalement tous dans $[0, 1]$.*
Si A est strictement stochastique, elle est stochastique à coefficients non nuls et ses coefficients sont donc tous dans $]0, 1]$. Si, par l'absurde, on avait un coefficient $a_{ij} = 1$, comme il y a au moins deux coefficients sur la ligne i et qu'ils sont > 0, la somme sur la ligne i serait > 1 ce qui est contradictoire avec le caractère stochastique. Ainsi, les coefficients sont tous dans $]0, 1[$.

2 - Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \cdots, 1)$ est un vecteur propre associé.

Corrigé : *Soit A une matrice à coefficients positifs. Elle est donc stochastique si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Or,*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ (Ae)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

et la condition devient $Ae = e$ c'est à dire que e est propre pour A associé à 1, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour que A soit stochastique.

3 - Montrer que le produit de deux matrices stochastiques [respectivement strictement stochastiques] est une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique].

Corrigé : *Soient A, B deux matrices de taille n et $C = AB$. On a*

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k,j}$$

Si A et B sont à coefficients positifs, il en est de même pour C.
Si A et B sont à coefficients strictement positifs, il en est de même pour C.
Enfin, si A et B sont stochastiques, alors par la question précédente $ABe = Ae = e$ et donc AB est stochastique (respectivement strictement stochastique) si A et B le sont.

C - Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1 - Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \ \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty.$$

Corrigé : *Soit $x \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a*

$$|(Ax)_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \|x\|_\infty$$

et on en déduit en passant au maximum que

$$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

2 - En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \, , \, \forall p \in \mathbb{N}, \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty \, .$$

Corrigé : *On a vu dans la question* **B-3** *que le produit de matrices stochastiques le restait, ainsi le résultat précédent s'applique à la matrice A^p pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $p = 0$, c'est évident car $A^p = I_n$.*

3 - Montrer que $\rho(A) = 1$.

Corrigé : *Soit λ une valeur propre complexe de A et x un vecteur propre associé. On a $Ax = \lambda x$ et, avec la question précédente*

$$|\lambda|\|x\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Comme $\|x\|_\infty > 0$ (x est vecteur propre et donc non nul) on en déduit que $|\lambda| \leq 1$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre, $\rho(A) \leq 1$. De plus, 1 est une valeur propre de A car A est stochastique, et cette inégalité est donc une égalité :

$$\rho(A) = 1$$

D - Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \, , \, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \, .$$

1 - Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \, .$$

Indication : en notant x un vecteur propre associé à λ, on pourra considérer un indice i tel que $|x_i|$ soit maximal, et utiliser $(Ax)_i = \lambda x_i$.

Corrigé : *Soit x un vecteur propre associé à λ, et $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal. On a alors $|x_i| > 0$ (car x, vecteur propre, est non nul) et comme $(Ax)_i = \lambda x_i$, on a*

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \leq |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Comme $|x_i| > 0$ on peut conclure que

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

2 - Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

Corrigé : *Si, par l'absurde, A n'était pas inversible, alors 0 serait une valeur propre de A et, par la question précédente, il existerait $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que*

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ce qui contredit le caractère strictement dominant de la diagonale. Ainsi, toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

E - Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

1 - On désigne par $A_1 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne, et on note $B = A_1 - I_{n-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$.

Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij} .$$

Corrigé : *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a*

$$|b_{ii}| = |a_{ii} - 1| = 1 - a_{ii} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij} + a_{in} > \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij}.$$

(On utilise ci-dessus le fait que A étant strictement stochastique, on a $0 \leq a_{ii} \leq 1$, $\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = 1$ et $a_{in} > 0$.)

2 - En déduire que B est à diagonale strictement dominante. Que peut-on déduire quant au rang de $A - I$?

Corrigé : *La question précédente montrer que B est à diagonale strictement dominante car pour tout $i \neq j$, on a $b_{ij} = a_{ij} > 0$. En particulier, B est inversible. Ses $n-1$ lignes sont donc indépendantes et c'est a fortiori vrai de celle de $A - I_n$. On a donc*

$$\mathrm{rg}(A - I_n) \geq n - 1$$

3 - Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.

Corrigé : *Par le théorème du rang, $\ker(A - I_n)$ est de dimension au plus 1. Comme A est stochastique, on sait que 1 est valeur propre de A et donc $\ker(A - I_n)$ est au moins de dimension 1. On conclut ainsi que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1 (et a pour base le vecteur e.*

4 - En utilisant la question **D-1** (et **A**), montrer que si λ est une valeur propre de A de module 1, alors $\lambda = 1$.

Corrigé : *Par la question **D-1**, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient*

$$|\lambda| - a_{ii} = |\lambda| - |a_{ii}| \leq |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}.$$

*Si $|\lambda| = 1$, cette inégalité est une égalité et en particulier $|(\lambda - a_{ii}) + a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}| + |a_{ii}|$. Par **A-2**, les nombres a_{ii} et $\lambda - a_{ii}$ doivent avoir même argument. Comme a_{ii} est un réel strictement positif, ceci impose que $\lambda - a_{ii}$ soit un réel strictement positif et donc que λ soit également un réel strictement positif. Comme $|\lambda| = 1$, ceci donne $\lambda = 1$.*

5 - En déduire que
$$\forall \lambda \in Sp(A) \setminus \{1\} \ , \ |\lambda| < 1 \, .$$

Corrigé : *La question précédente entraîne que* 1 *est l'unique valeur propre de module* 1 *et comme* $\rho(A) = 1$ *par* ***C-3****, on obtient*
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}, \ |\lambda| < 1.$$

PARTIE III : Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

A - Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position du point en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n.

1 - Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $P_n = Q^n P_0$ avec $Q = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé : *Soit* $n \geq 0$. *Par formule des probabilités totales avec le système complet* $((X_n = i))_{1 \leq i \leq 4}$, *on a pour tout* $j \in \{1, \ldots, 4\}$,
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}_{X_n = i}(X_{n+1} = j) \mathbb{P}(X_n = i)$$

$\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$ *vaut* $1/10$ *si* $i = j$ *et* $3/10$ *sinon. On a donc* $P_{n+1} = QP_n$.
Une récurrence immédiate donne alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P_n = Q^n P_0$$

2 - Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que :
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad \text{et} \quad \Pi = Q\Pi \, .$$

Corrigé : *Si* Π *convient, c'est un vecteur propre pour* Q *associé à la valeur propre* 1. *Comme* Q *est strictement stochastique, la partie précédente montre que le sous-espace propre correspondant* *est de dimension* 1 *et est engendré par* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. *La condition sur la somme des coordonnées de* Π *impose que* $\Pi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. *Réciproquement, ce vecteur convient.*

B - Rapidité de convergence

1 - Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : *Q est symétrique réelle donc diagonalisable (et ceci par le biais d'une matrice orthogonale).*

2 - Déterminer le rang de la matrice $Q + \frac{2}{10}I_4$.

Corrigé : $Q + \frac{2}{10}I_4 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&3&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&3\end{pmatrix}$. *Toutes ses colonnes étant identiques et non nulles, le rang de cette matrice est* 1.

3 - En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.

Corrigé : *On sait par la partie précédente que* 1 *est valeur propre et à pour espace propre le sous-espace vectoriel engendré par* Π. *D'après la question précédente et le théorème du rang,* $\frac{-2}{10}$ *est une autre valeur propre de* Q *ayant un espace propre associé de dimension* 3. *C'est donc l'unique autre valeur propre. Comme* Q *est symétrique réelle, le second espace propre est l'orthogonal de* $\mathrm{Vect}(\Pi)$. *On peut aussi remarquer facilement, que ce second espace à pour base* $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

4 - Montrer que Q est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ ayant pour premier vecteur 2Π. On notera P la matrice de passage correspondante.

Corrigé : *Comme* Q *est symétrique réelle, on sait que* Q *est diagonalisable dans une base orthonormée de* $\mathbb{R}^4$. *Comme l'espace propre associé à* 1 *est engendré par* Π *et que la norme euclidienne de* Π *vaut* $1/2$, *on peut prendre pour premier vecteur de cette base* 2Π.

5 - Montrer que

$$Q = P\begin{pmatrix}1&0&0&\\0&\frac{-2}{10}&0&0\\0&0&\frac{-2}{10}&0\\0&0&0&\frac{-2}{10}\end{pmatrix}{}^tP.$$

Corrigé : *La matrice de passe* P *étant une matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée, il s'agit d'une matrice orthogonale et donc* $P^{-1} = {}^tP$. *La formule de changement de base permet de conclure.*

6 - En déduire que $(Q^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π.

Corrigé : *Par une récurrence immédiate, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$Q^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} {}^tP.$$

Comme $|-2/10| < 1$ et l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PM\,{}^tP$ est continue, la suite $(Q^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP = 4 \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 & p_1p_4 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 & p_2p_4 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 & p_3p_4 \\ p_4p_1 & p_4p_2 & p_4p_3 & p_4^2 \end{pmatrix} = 4\Pi\,{}^t\Pi$$

(Ci-dessus, on utilise le fait que la première colonne de P vaut 2Π.)

7 - Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p - R = \left(-\frac{2}{10}\right)^p P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP.$

Corrigé : *Soit $p \in \mathbb{N}$, alors*

$$\begin{aligned} Q^p - R &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} {}^tP - P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP \\ &= P \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) {}^tP \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} {}^tP \\ &= \left(-\frac{2}{10}\right)^p P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP. \end{aligned}$$

8 - En déduire qu'il existe $r \in]0,1[$ tel que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on ait

$$\|Q^p - R\| = O(r^p)\,.$$

Corrigé : *Soit $\|\cdot\|$ une norme $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,*

$$\|Q^p - R\| = \left|\left(-\frac{2}{10}\right)^p\right| \left\| P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP \right\|$$

et donc

$$\|Q^p - R\| = O\left(\left(\frac{2}{10}\right)^p\right).$$

9 - En utilisant les questions **A-1** et **B-6**, montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

Corrigé : *L'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a M associe MP_0 étant continue, on en déduit à l'aide de **A-1** et **B-6** que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $4\Pi\,{}^t\Pi P_0$.*
Or, ${}^t\Pi P_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{4}$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \Pi.$$

Ainsi, quand n tend vers $+\infty$ on a autant de chance de se retrouver sur chaque point et cela quelle que soit la position initiale. (De plus, d'après la question précédente la convergence est rapide quelle que soit cette position initiale.)

PARTIE IV : Puissances d'une matrice stochastique

Soit n un entier naturel non nul et $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1\le i,j\le n} a_{ij}\,.$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i,j) de A^p :

$$A^p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n, on note :

$$m_j^{(p)} = \min_{1\le k\le n} a_{k,j}^{(p)} \quad , \quad M_j^{(p)} = \max_{1\le k\le n} a_{k,j}^{(p)}\,.$$

1 - Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$0 < m_j^{(p)} \le m_j^{(p+1)} \le M_j^{(p+1)} \le M_j^{(p)}\,.$$

Corrigé : *Fixons pour cette question et les deux suivantes, un entier naturel non nul p et un entier $j \in \{1,\dots,n\}$. Comme A est stochastique, on a*

$$\forall k \in \{1,\dots,n\},\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^n a_{k,i}a_{i,j}^{(p)} \le \sum_{i=1}^n a_{k,i}M_j^{(p)} = M_j^{(p)}.$$

En passant au maximum sur k, on en déduit que

$$M_j^{(p+1)} \le M_j^{(p)}.$$

De même

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\},\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} m_j^{(p)} = m_j^{(p)}.$$

En passant au minimum sur k, on en déduit que

$$m_j^{(p+1)} \geq m_j^{(p)}.$$

$m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)}$ *est immédiat (minimum plus petit que maximum). Comme M et toutes ses puissances sont strictement stochastiques, tous les coefficients sont strictement positifs et $m_j^{(p)} > 0$. Finalement*

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

2 - Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right).$$

Corrigé : *On note k un indice tel que $a_{k,j}^{(p+1)} = m_j^{(p+1)}$. On a alors*

$$\begin{aligned}
m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} &= a_{k,j}^{(p+1)} - m_j^{(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} - \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} m_j^{(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{k,i}}_{\geq m} \underbrace{(a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)})}_{\geq 0} \\
&\geq m \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)})
\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont positifs ou nuls, et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$. Ainsi,

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).$$

De même, on note ℓ un indice tel que $a_{\ell,j}^{(p+1)} = M_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned}
M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} &= M_j^{(p)} - a_{\ell,j}^{(p+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{\ell,i} M_j^{(p)} - \sum_{i=1}^{n} a_{\ell,i} a_{i,j}^{(p)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{\ell,i}}_{\geq m} \underbrace{(M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)})}_{\geq 0} \\
&\geq m \sum_{i=1}^{n} (M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)})
\end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont positifs ou nuls, et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$. Ainsi,

$$M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).$$

3 - Majoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right) .$$

Corrigé : *On a tout d'abord*

$$\begin{aligned} M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} &= M_j^{(p+1)} - M_j^{(p)} \\ &+ M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \\ &+ m_j^{(p)} - m_j^{(p+1)} \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré avec la seconde inégalité de la question précédente. Le troisième est majoré grâce à la première inégalité. On obtient

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).$$

4 - Convergence de ces suites

En déduire que, pour tout entier j compris entre 1 et n, les suites $\left(m_j^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(M_j^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Corrigé : *Soit $j \in \{1,\dots,n\}$. Remarquons que $0 = m_j^{(0)} < m_j^{(1)} \leq M_j^{(1)} < M_j^{(0)} = 1$ et que l'on a donc également*

$$M_j^{(1)} - m_j^{(1)} \leq (1-2m)(M_j^{(0)} - m_j^{(0)}) = 1-2m.$$

Notons de plus que cette inégalité entraîne que $1-2m \geq 0$.

*La question **1** montre que $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante alors que $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ décroît. Comme $1-2m \geq 0$, la question précédente donne par récurrence, que pour tout $p \geq 0$,*

$$0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq (1-2m)^p(M_j^{(0)} - m_j^{(0)});$$

Enfin, comme $m > 0$, on a $|1-2m| < 1$ et ainsi, $(1-2m)^p \to 0$. On en déduit que $M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \to 0$ et les suites sont adjacentes.

5 - Conclusion

En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques.

Corrigé : *Pour $j \in \{1,\dots,n\}$, notons c_j la limite commune à $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$. Comme $m_j^{(p)} \leq a_{k,j}^{(p)} \leq M_j^{(p)}$ pour tout k, tous les coefficients de la colonne j dans la suite (A^p) tendent vers c_j. (A^p) converge donc vers la matrice L dont toutes les lignes valent $(c_1,\dots,c_n)$. Comme A^p est stochastique pour tout p, L l'est aussi (passage à la limite dans une suite constante égale à 1).*