
SUJET BLANC 2 : **Matrices semblables et matrices transposées**- Corrigé

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes de tailles n.

Pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ ou de $M_n(\mathbb{C})$, on note ${}^tA$ sa matrice transposée d'une matrice A et $\det(A)$ son déterminant.

Le but du sujet est de montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

A - Questions préliminaires

Dans cette partie, on fixe un corps commutatif $\mathbb{K}$ (qui sera le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$) et on note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille n.

1. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.
   1.1. Exprimer ${}^t(AB)$ en fonction de ${}^tA$ et ${}^tB$. (On ne demande pas de démonstration.)
   Corrigé. ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.

   1.2. Montrer que si C est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$, alors $\left({}^tC\right)^{-1} = {}^t\left(C^{-1}\right)$. On écrira par la suite simplement ${}^tC^{-1}$.
   Corrigé. *On a $CC^{-1} = I_n$ d'où ${}^t(CC^{-1}) = {}^t\left(C^{-1}\right)\ {}^tC = I_n$ et ainsi $\left({}^tC\right)^{-1} = {}^t\left(C^{-1}\right)$.*

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
   Soit u un endomorphisme de E, et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ et B sa matrice dans la base $\mathcal{B}_2$.
   Exprimer B en fonction de A, de P et P^{-1}. (On ne demande pas de démonstration.)
   Corrigé. *On a $B = P^{-1}AP$.*

3. Soient M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On rappelle que M est dite semblable à N s'il existe une matrice inversible Q de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$.
   Montrer que si M est semblable à N, alors N est semblable à M.
   Corrigé. *Supposons que M est semblable à N. Notons Q une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$ telle que $M = Q^{-1}NQ$. Alors, $N = QMQ^{-1} = \left(Q^{-1}\right)^{-1} MQ^{-1}$ et donc N est semblable à M.*

4. Soit A, B et C trois matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est semblable à B et que B est semblable à C.
   4.1. Montrer que A est semblable à C.
   Corrigé. *Notons P et Q deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$. On obtient ainsi $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$ et donc A est semblable à C.*

   4.2. Montrer que ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.
   Corrigé. *On part maintenant de $B = P^{-1}AP$, qu'on transpose ${}^tB = {}^tP\ {}^tA\ {}^tP^{-1}$; ce qui prouve que ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.*

5. Supposons pour cette question que $n \geq 2$.
   Soit un entier p tel que $1 \leq p < n$, et des matrices $B, B' \in M_p(\mathbb{K})$, $C, C' \in M_{n-p}(\mathbb{K})$.
   Considérons les matrices A et A' de $M_n(\mathbb{K})$ définies par $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}$.

Montrer que si B et B' sont semblables et C et C' sont semblables alors A et A' le sont également.

Corrigé. *Notons P et Q deux matrices inversibles respectivement de $M_p(\mathbb{K})$ et $M_{n-p}(\mathbb{K})$ telles que $B' = P^{-1}BP$ et $C' = Q^{-1}CQ$. Soit $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$. On vérifie immédiatement que R est inversible d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et que $A' = R^{-1}AR$. Ainsi, A et A' sont semblables.*

6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

   6.1. Montrer que si A est diagonale, alors A et ${}^tA$ sont semblables.

   Corrigé. *Supposons que A est diagonale. Alors, $A = {}^tA = I^{-1}\,{}^tAI$, et donc A et ${}^tA$ sont semblables.*

   6.2. Montrer que si A est diagonalisable, alors A et ${}^tA$ sont semblables.

   Corrigé. *Supposons que A est diagonalisable. Alors, il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{K})$ et une matrice diagonale D de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$. En transposant, on a ${}^tA = {}^tP^{-1}D\,{}^tP$, car D est diagonale. Ainsi, A et ${}^tA$ sont semblables toutes les deux à D, et donc semblables.*

   6.3. Soit $\lambda \in K$. Montrer que si $A + \lambda I_n$ est semblable à sa transposée, alors A est semblable également à sa transposée.

   Corrigé. *Supposons que $A+\lambda I_n$ est semblable à sa transposée. Alors, il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{K})$, telle que ${}^t(A + \lambda I_n) = P^{-1}(A + \lambda I_n)P$.*

   Comme ${}^t(A + \lambda I_n) = {}^tA + \lambda {}^tI_n = {}^tA + \lambda I_n$ et $P^{-1}(A + \lambda I_n)P = P^{-1}AP + \lambda P^{-1}I_nP = P^{-1}AP + \lambda I_n$, il suit que ${}^tA = P^{-1}AP$, c'est-à-dire A et ${}^tA$ sont semblables.

B - Cas $n = 2$

Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, non diagonale, qu'on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on cherche à résoudre l'équation $(\mathcal{E})$: ${}^tAP = PA$, où l'inconnue P est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qu'on cherchera sous la forme $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

1. Trouver un ensemble de conditions portant sur les inconnues x, y, z et t, qui soit nécessaire et suffisant pour que P vérifie $(\mathcal{E})$.

   On ramènera cet ensemble à deux conditions, l'une étant $y = z$ et l'autre ne portant que sur x, y et t.

   Corrigé. *On a :* ${}^tAP = PA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + cz & ay + ct \\ bx + dz & by + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + ct & bz + dt \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} cy & = & cz \\ ay + ct & = & bx + dy \\ az + ct & = & bx + dz \\ by & = & bz \end{array} \right.$

   Comme A n'est pas diagonale, les réels b et c ne sont pas tous les deux nuls, et ainsi en simplifiant la première ou la dernière ligne du système ci-dessus, on obtient :

   ${}^tAP = PA \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & z \\ ay + ct & = & bx + dy \end{array} \right.$

2. En prenant l'un des nombres x ou t nul, l'autre égal à $d - a$ et, dans chacun des deux cas, en choisissant convenablement y, trouver deux matrices P_1 et P_2 solutions de $(\mathcal{E})$.

   Corrigé. *Si on prend $x = 0$, $t = d - a$ et $y = z = c$ on obtient une solution $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & d - a \end{pmatrix}$ de $(\mathcal{E})$.*

   Si on prend $x = d - a$, $t = 0$ et $y = z = -b$ on obtient une solution $P_2 = \begin{pmatrix} d - a & -b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ de $(\mathcal{E})$.

3. Montrer que l'une au moins des matrices P_1 et P_2 est inversible.
   Corrigé. *Comme b et c ne sont pas tous les deux nuls, P_1 (si $c \neq 0$) ou P_2 (si $b \neq 0$) est inversible.*
4. En déduire que A et ${}^tA$ sont semblables.
   Corrigé. *La question précédente montre qu'il existe une matrice P inversible solution de $(\mathcal{E})$. Alors, ${}^tAP = PA$, d'où $A = P^{-1}\,{}^tAP$ et donc A et ${}^tA$ sont semblables.*

C - Un résultat utile pour la suite du problème

On utilise maintenant des matrices complexes. On note i le complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

1. Soit C une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (A, B) de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ tel que $C = A + iB$.
   Corrigé. *Par existence et unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire de tout nombre complexe, on en déduit que l'unique couple (A, B) de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $C = A+iB$ est celui où A est la matrice constituée des parties réelles des coefficients de C, et B celle constituée des parties imaginaires des coefficients de C.*
2. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que ces deux matrices, considérées comme éléments de $M_n(\mathbb{C})$, sont semblables.
   2.1. Montrer qu'il existe deux matrices P_1 et P_2 de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $P_1A = BP_1$, $P_2A = BP_2$ et $\det(P_1 + iP_2) \neq 0$.
   Corrigé. *Comme A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$, et donc $PA = BP$. Par la question précédente, il existe P_1 et P_2 de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $P = P_1 + iP_2$. On obtient : $(P_1 + iP_2)\,A = B\,(P_1 + iP_2) = P_1A + iP_2A = BP_1 + iBP_2$. Comme A, B, P_1 et P_2 sont des matrices réelles, les matrices P_1A, P_2A, BP_1 et BP_2 sont également réelles ; et par l'unicité de la question précédente, on a $P_1A = BP_1$ et $P_2A = BP_2$. Enfin, comme $P = P_1+iP_2$ est inversible, on a également* $\det(P_1 + iP2) \neq 0$.
   2.2. Soit g l'application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = \det(P_1 + zP_2)$.
      2.2.1. Vérifier que g n'est pas la fonction nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
      Corrigé. *Par ce qui précède $g(i) \neq 0$.*
      2.2.2. En déduire qu'il existe un réel x_0 tel que $\det(P_1 + x_0P_2) \neq 0$.
      Corrigé. *Comme g est une fonction polynomiale non nulle, elle ne s'annule sur $\mathbb{C}$ qu'en un nombre fini de nombres complexes. Il existe donc des réels où elle ne s'annule pas, ce qui permet de conclure.*
   2.3. Conclure que les matrices A et B, considérées comme éléments de $M_n(\mathbb{R})$, sont semblables.
   Corrigé. *Si on pose $Q = P_1 + x_0P_2$, cette matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est inversible et on a $QA = BQ$, d'où $A = Q^{-1}BQ$ et ainsi A et B sont semblables comme éléments de $M_n(\mathbb{R})$.*

D - Cas des matrices nilpotentes

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que A est nilpotente s'il existe un entier naturel m tel que $A^m = 0$.

Pour toute cette partie, on suppose que A est nilpotente. On note p l'indice de nilpotence de A, c'est-à-dire le plus petit entier naturel p tel que $A^p = 0$.

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$. On note u l'endomorphisme de E ayant pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
   On note pour la suite x_0 un tel vecteur.
   Corrigé. *Comme p est l'indice de nilpotence de A, on a $A^{p-1} \neq 0$ et donc $u^{p-1} \neq 0$, ce qui permet de conclure.*

2. On définit pour $i \in [[1,p]]$, $e_i = u^{p-i}(x_0)$.
   Soit $i,j \in [[1,p]]$ tel que $i \leq j$. Que peut-on dire de $u^j(e_i)$ et de $u^{i-1}(e_i)$?
   Corrigé. *On a $u^j(e_i) = u^{p+j-i}(x_0) = 0$ car $p+j-i \geq p$ et $u^p = 0$. Par ailleurs, $u^{i-1}(e_i) = u^{p-1}(x_0) \neq 0$.*
3. En déduire que $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de E.
   Corrigé. *Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0$.*
   Par ce qui précède, pour chaque $j \in [[0, p-1]]$,
   $$u^j(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i) = \sum_{i=j+1}^p \lambda_i u^j(e_i) = 0 \text{ avec } u^j(e_{j+1}) \neq 0.$$
   On en déduit successivement que $\lambda_p = 0$, $\lambda_{p-1} = 0$, ..., $\lambda_1 = 0$. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est donc libre.
4. Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Vérifiez que F est stable par u.
   Corrigé. *Notons que pour tout $i \in [[2,p]]$, $u(e_i) = e_{i-1}$. Soit $x \in F$. Il existe alors $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$ tels que $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$.*
   Ainsi, $u(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i u(e_i) = \sum_{i=2}^p \alpha_i e_{i-1} \in F$. Le sous-espace vectoriel F est donc stable par u.
5. Soit u_F l'endomorphisme de F défini par $u_F(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$. On note $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ la matrice de u_F dans la base $(e_1, \dots, e_p)$, et $B' = (b'_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$ la matrice de u_F dans la base $(e_p, e_{p-1}, \dots, e_1)$.
   Vérifiez que $B' = ^t B$.
   Corrigé. *Soit $i,j \in [[1,p]]$. Comme $u(e_1) = 0$ et pour tout $k \in [[2,p]]$, $u(e_k) = e_{k-1}$, on voit facilement que $b_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i+1$ et sinon $b_{ij} = 0$. De même, $b'_{ij} = 1$ si et seulement si $i = j+1$ et sinon $b'_{ij} = 0$. Ainsi, $b'_{ij} = b_{ij}$.*
6. En déduire que B et ${}^tB$ sont semblables.
   Corrigé. *B et ${}^tB$ sont les matrices du même endomorphisme u (dans deux bases différentes), donc d'après la partie A elles sont semblables.*
7. Supposons que $p = n$. Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.
   Corrigé. *Dans ce cas, A est semblable à B et par la partie A, comme B et ${}^tB$ sont semblables, il en est de même de A et ${}^tA$.*
8. Supposons que $p < n$.
   Le but de cette question est de montrer qu'il existe un supplémentaire G de F dans E qui est stable par u (c.à.d. tel que $E = F \oplus G$ avec $u(G) \subset G$).
   Pour cela, on complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
   On note U la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

   8.1. On considère la matrice carrée $V \in M_n(\mathbb{C})$ dont la i-ème ligne est égale à la première ligne de U^{i-1} pour chaque $i \in [[1,n]]$.

   8.1.1. Montrer que les lignes de V à partir de la $p+1$-ème sont nulles.
   Corrigé. *Rappelons que $u^p = 0$. Ainsi, pour tout $i \in [[p+1, n]]$, la matrice U^{i-1} est nulle et, en particulier, pour tout $i \in [[p+1, n]]$, la i-ème ligne de V est également nulle .*

   8.1.2. Que peut-on en déduire sur le rang de V.
   Corrigé. *Comme V à $n-p$ lignes nulles, son rang est au plus p.*

   8.2. Soit $i \in [[1,p]]$.

   8.2.1. Pour $j \in [[1,p]]$, exprimer $u^{i-1}(e_j)$ suivant que $i < j$, $i = j$, ou $i > j$, dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.
   Corrigé. *Dans la question 2, on a déjà remarqué que si $i > j$ alors $u^{i-1}(e_j) = 0$. Si $i \leq j$, on a $u^{i-1}(e_j) = u^{p+i-1-j}(x_0) = e_{1+j-i}$. En particulier, $u^{j-1}(e_j) = e_1$.*

8.2.2. En déduire les p premiers termes de la i-ème ligne de V.

Corrigé. *Par la question précédente, le seul terme non nul de la première ligne de U^{i-1} parmi les p premiers termes est le i-ème terme qui vaut 1. Il en est de même pour la i-ème ligne de V qui est égale à la première ligne de U^{i-1}.*

8.3. On note v l'endomorphisme de E qui a pour matrice V dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

8.3.1. Vérifier que pour tout $j \in [[1, p]]$, $v(e_j) = e_j$.

Corrigé. *Soit $j \in [[1, p]]$. Par 8.1.1 et 8.2.2, la j-ème colonne de V a pour seul coefficient non nul, le j-ème coefficient qui vaut 1. Ainsi, $v(e_j) = e_j$.*

8.3.2. En déduire que $\operatorname{Im} v = F$.

Corrigé. *Par la question précédente, tout $j \in [[1, p]]$, $e_j = v(e_j) \in \operatorname{Im} v$. Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, on en déduit que $F \subset \operatorname{Im} v$. Enfin, par 8.1.2,* $\operatorname{rg} v = \dim \operatorname{Im} v \leq p = \dim F$, *d'où* $\operatorname{Im} v = F$.

8.3.3. Vérifier que pour tout $x \in \operatorname{Im} v$, on a $v(x) = x$.

Corrigé. *Ceci suit du fait que* $\operatorname{Im} v = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ *et que pour tout $j \in [[1, p]]$, $v(e_j) = e_j$.*

8.3.4. Montrer que $E = \operatorname{Im} v \oplus \ker v$.

Corrigé. *Comme E est de dimension finie, par le théorème du rang, on a* $\dim \operatorname{Im} v + \dim \ker v = \dim E$. *Il reste donc à vérifier que* $\operatorname{Im} v \cap \ker v = \{0\}$. *Soit* $x \in \operatorname{Im} v \cap \ker v = \{0\}$. *Comme $x \in \operatorname{Im} v$, par la question précédente, $u(x) = x$ et comme $x \in \ker v$, $x = u(x) = 0$.*

8.4. Soit $x \in E$ et X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

8.4.1. Montrer que $x \in \ker v$ si et seulement si pour tout $i \in [[1, p]]$, la première coordonnée de $U^{i-1}X$ est nulle.

Corrigé. *Notons que pour tout $i \in [[p+1, n]]$, la i-ème coordonnée de VX est toujours nulle. Ainsi, $x \in \ker v$ si et seulement si pour chaque $i \in [[1, p]]$, la i-ème coordonnée de VX est nulle, ce qui est équivalent à pour tout $i \in [[1, p]]$, la première coordonnée de $U^{i-1}X$ est nulle.*

8.4.2. En déduire que si $x \in \ker v$ alors $u(x) \in \ker v$.

Corrigé. *Supposons que $x \in \ker v$. Alors, pour tout $i \in [[1, p]]$, la première coordonnée de $U^{i-1}X$ est nulle et donc pour tout $i \in [[1, p-1]]$, la première coordonnée de $U^{i-1}(UX)$ est nulle. De plus, comme $U^p = 0$, la première coordonnée de $U^{p-1}(UX)$ est également nulle. Ainsi, $u(x) \in \ker v$.*

8.5. Conclure.

Corrigé. *Il suffit de considérer $G = \ker v$. C'est un sous-espace supplémentaire de* $\operatorname{Im} u = F$ *qui est stable par u.*

9. Montrer par récurrence sur n que A et ${}^tA$ sont semblables.

Corrigé. *Supposons que pour tout $0 < i < n$, toute matrice nilpotente de taille i est semblable à sa transposée. (Remarque, cette hypothèse est évidemment vérifiée si $n = 1$.)*

Si $p = n$, alors d'après la question 7, A et ${}^tA$ sont semblables.

Supposons $p < n$ et considérons d'après la question 8 un supplémentaire G de F stable par u. Notons u_G l'endomorphisme de G défini par $u_G(x) = u(x)$ pour tout $x \in G$. Considérons une base $(f_{p+1}, \dots, f_n)$ de G, et C la matrice de u_G dans cette base. Alors, $(e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ forme une base de E et u a pour matrice $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$. Comme $u^p = 0$, on a $u_G^p = 0$ et ainsi C est nilpotente de taille strictement inférieure à n. Par hypothèse de récurrence, C et ${}^tC$ sont semblables. Comme B et ${}^tB$ sont également semblables, il suit par la partie A que ${}^tA' = \begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ 0 & {}^tC \end{pmatrix}$ est semblable à A'. Enfin, comme A et A' sont semblables, on en déduit à nouveau que A et ${}^tA$ sont semblables.

E - Cas général

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note χ_A son polynôme caractéristique.

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$. On note u l'endomorphisme de E ayant pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

1. Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, k un entier naturel non nul et $Q \in \mathbb{C}[X]$, tel que $\chi_A = (X - \lambda)^k Q$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. On pose pour la suite $F = \ker((u - \lambda id_E)^k)$.
   Corrigé. *D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_A admet une racine $\lambda \in \mathbb{C}$. Si on note k sa multiplicité et Q le quotient de χ_A par $(X - \lambda)^k$, on obtient le résultat voulu.*
2. Justifier que $\dim F > 0$. On pose $m = \dim F$.
   Corrigé. *λ étant une racine du polynôme caractéristique, c'est une valeur propre de u. Tout vecteur propre associé à λ appartient alors F, donc $\dim F > 0$.*
3. On rappelle le lemme des noyaux : si R et S sont deux polynômes premiers entre-eux de $\mathbb{C}[X]$ alors $\ker((RS)(u)) = \ker R(u) \oplus \ker S(u)$. De plus, ces sous-espaces vectoriels sont stables par u.

   En déduire qu'il existe un supplémentaire G de F dans E tel que G est également stable par u.

   Corrigé. *D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(u) = 0$. Comme $Q(\lambda) \neq 0$, on a Q et $(X-\lambda)^k$ sont premiers entre-eux. Si on pose $G = \ker Q(u)$, on obtient par le lemme des noyaux que $E = F \oplus G$ et F et G sont deux sous-espaces vectoriels stables par u.*
4. Soit u_F l'endomorphisme de F défini par $u_F(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$. On note $\mathcal{B}_F$ une base de F et on note B la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$.

   Vérifier que $B - \lambda I_m$ est une matrice nilpotente.

   Corrigé. *Pour tout $x \in F$, $(u - \lambda id_E)^k(x) = 0$, donc $(B - \lambda I_m)^k = 0$ et ainsi, $B - \lambda I_m$ est une matrice nilpotente.*
5. En déduire que B et ${}^tB$ sont semblables.
   Corrigé. *D'après la partie D, $(B - \lambda I_m)$ et ${}^t(B - \lambda I_m)$ sont semblables. Il suit par la partie A que B et ${}^tB$ le sont également.*
6. Montrer par récurrence sur n que A et ${}^tA$ sont semblables.
   Corrigé. *Notons que toute matrice de taille 1 est égale à sa transposée (et donc semblable à sa transposée).*

   Supposons que pour tout $0 < i < n$, toute matrice de taille i est semblable à sa transposée.

   Si $m = n$ alors A est semblable à B et on conclut par la partie A.

   Si $m < n$, on considère u_G l'endomorphisme de G défini par $u_G(x) = u(x)$ pour tout $x \in G$ et on note C sa matrice dans une base de G. Par hypothèse de récurrence C et ${}^tC$ sont également semblables. De plus, A est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ ce qui permet de conclure par la partie A.
7. En déduire que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée en tant que matrice de $M_n(\mathbb{R})$.
   Corrigé. *Soit $A' \in M_n(\mathbb{R})$. Par ce qui précède, A' et ${}^tA'$, considérées comme matrices de $M_n(\mathbb{C})$, sont semblables. Elles le sont également dans $M_n(\mathbb{R})$ par la partie C.*