
Sujet blanc n°2

***Durée** :* 5 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Les problèmes n°1 et n°2 feront l'objet de deux compositions distinctes.

PROBLEME I : Autour de la formule des différences divisées

Notations, définitions et rappels

- Étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[a,b]$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifiera les fonctions polynomiales définies sur un intervalle $[a,b]$ avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On considère ainsi $\mathbb{R}[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([a,b])$.
- Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: on rappelle ici que pour tous polynômes A, B de $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que :

$$A = BQ + R \quad , \quad \text{avec} \quad deg(R) < deg(B)\,.$$

Dans la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 1.
On considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ainsi que $n+1$ points distincts $x_0, \cdots, x_n$ de l'intervalle $[a,b]$.

Partie A - Résultats préliminaires

Le but de cette partie est de démontrer l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de f aux points $x_0, \cdots, x_n$, c'est à dire vérifiant :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, \cdots, n\,. \tag{1}$$

I - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement si le polynôme $(X-a)$ divise P.

II - Montrer par récurrence que tout polynôme non nul de degré $m \in \mathbb{N}$ admet au plus m racines.

On considère à présent l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto \Big(P(x_0), \cdots, P(x_n)\Big) \end{aligned}\,.$$

III - Montrer que Φ est linéaire.

IV - Montrer que $Ker(\Phi) = \{0\}$.

V - En déduire que Φ est bijective.

VI - Conclure.

Partie B - Formule de Newton et différences divisées

I - Justifier, par un argument simple, que la famille de polynômes :

$$\mathcal{E} = \left\{ 1, (X - x_0), (X - x_0)(X - x_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k) \right\}$$

forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit P_n, le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \cdots, x_n$. On considère la décomposition de P_n dans cette base :

$$P_n(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)\,,$$

où les a_i , $i = 0, \cdots, n$ sont des réels.

II - 1 - Montrer que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

2 - On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout entier i vérifiant $2 \leqslant i \leqslant n$,

$$a_i = \frac{f(x_i) - \left[a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + a_{i-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{i-2} (x_i - x_k) \right]}{\displaystyle\prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k)}\,.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que $P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k)$.

III - Montrer par récurrence (sur i) que pour tout entier naturel $i \leqslant n$, les coefficients a_i ne dépendent que des points $x_0, \cdots, x_i$ (et pas des $x_{i+1}, \cdots, x_n$).

On pose alors $a_i = f[x_0, \cdots, x_i]$ pour tout $i = 0, \cdots, n$, de sorte que

$$P_n(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)\,. \tag{2}$$

IV - Pour tout $i = 0, \cdots, n$, on pose $y_i = x_{n-i}$. Notons que $(y_i)_{i=0,\cdots,n}$ et $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$ définissent la même famille de points, et donc le même polynôme interpolateur P_n.

1 - Écrire la décomposition de P_n sous la forme (2) dans la base :

$$\mathcal{F} = \left\{ 1, (X - y_0), (X - y_0)(X - y_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1} (X - y_k) \right\}.$$

2 - On considère l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{E}$ donnée par (2) et celle dans la base $\mathcal{F}$ obtenue à la question précédente. En raisonnant sur les termes d'ordre n, montrer que $f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_n, \cdots, x_0]$.

3 - a - Déterminer le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-2} (X - x_k)$.

b - Déterminer le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$.

c - En déduire le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme P_n donné par (2).

4 - En considérant à nouveau l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{F}$, et en raisonnant sur les termes d'ordre $n - 1$, montrer que

$$f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_0, \cdots, x_n] \sum_{k=0}^{n-1} x_k = f[y_0, \cdots, y_{n-1}] - f[y_0, \cdots, y_n] \sum_{k=0}^{n-1} y_k\,.$$

5 - En déduire que $f[x_0,\cdots,x_n] = \dfrac{f[x_1,\cdots,x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$.

Indication : on pourra remarquer qu'en menant la même analyse effectuée au ***B-IV-2*** *aux points d'interpolation* $y_0,\cdots,y_{n-1}$*, on a* $f[y_0,\cdots,y_{n-1}] = f[y_{n-1},\cdots,y_0]$.

Partie C - Calcul d'erreur

On suppose à présent que f est $n+1$ fois dérivable.

I - Dans cette question, on fixe $x \in [a,b]$, distinct des $x_0,\cdots,x_n$, et on considère le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0,\cdots,x_n,x$:

$$P_{n+1}(X) = f[x_0] + f[x_0,x_1](X-x_0) + \cdots + f[x_0,\cdots,x_n,x]\prod_{k=0}^{n}(X-x_k)\,.$$

1 - Montrer que $P_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!f[x_0,\cdots,x_n,x]$.

2 - On considère la fonction définie par $e_{n+1}(t) = f(t) - P_{n+1}(t)$ pour tout réel $t \in [a,b]$. Montrer que e'_{n+1} s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a,b[$.

3 - Montrer que $e_{n+1}^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]a,b[$. En déduire qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f[x_0,\cdots,x_n,x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

II - Montrer que pour tout réel $x \in [a,b]$, on a :

$$f(x) - P_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \{x_0,\cdots,x_n\}\ , \\ f[x_0,\cdots,x_n,x]\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x-x_k) \text{ sinon }\ . \end{cases}$$

Indication : dans le cas où x *est distinct des* $x_0,\cdots,x_n$*, on pourra écrire le polynôme interpolateur* P_n *de* f *aux points* $x_0,\cdots,x_n$ *en fonction du polynôme interpolateur* P_{n+1} *de* f *aux points* $x_0,\cdots,x_n,x$.

III - En déduire que si $x_0,\cdots,x_n$ sont des réels distincts d'un intervalle $[a,b]$, on a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right|\ ,$$

où $M_{n+1} = \sup_{t\in[a,b]}|f^{(n+1)}(t)|$.

Partie D - Application

On s'intéresse à la fonction $f : x \in [0,2] \longmapsto \sin(\pi x/2)$.

1. En utilisant l'écriture (2), et en se basant sur **B-II-1**, **B-IV-5**, déterminer les coefficients du polynôme interpolateur P_2 de f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,2]$, on a $|f^{(3)}(t)| \leqslant \dfrac{\Pi^3}{8}$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $|f(x) - P_2(x)| \leqslant \dfrac{\Pi^3}{12}$.

PROBLEME II : Un exemple de matrices stochastiques

Le but du problème est d'étudier le modèle suivant : on considère n points distincts ($n \geqslant 2$) dans le plan numérotés de 1 à n. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à $\alpha \in]0,1[$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable. On suppose qu'au départ la particule se trouve avec une probabilité p_i au point i et on étudie la limite des suites des probabilités $(p_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ où $p_i^{(k)}$ est la probabilité que la particule se trouve au point i après k secondes.

Notations, définitions et rappels

Pour les notations, définitions et rappels ci-dessous, on considère n et m deux entiers naturels non nuls.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels.
- On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels, et I_n désigne la matrice identité.
- Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sera représenté, soit par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, soit par le vecteur ligne $(x_1 \ \cdots \ x_n)$, où les x_i sont les coordonnées de x dans la base canonique.
- $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne usuelle, notée $\|\cdot\|_2$.
- Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On dit que cette suite converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, la suite $\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i,j) des $A^{(k)}$ converge vers le coefficient a_{ij} d'indice (i,j) de A.
- Une suite de vecteurs $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne si et seulement si la suite correspondante des vecteurs colonnes (resp. lignes) $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur colonne (resp. ligne) X correspondant.

Partie A - Cas de deux points

On fixe un réel $\alpha \in]0,1[$ et on note A la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

On considère une particule qui se déplace sur deux points distincts numérotés 1 et 2, de la façon suivante : chaque seconde, elle reste sur le même point avec un probabilité α ou change de point avec une probabilité égale à $(1-\alpha)$. On suppose qu'au départ la particule se trouve avec une probabilité p au point 1 (et donc $1-p$ au point 2). Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1,2\}$, on note $p_i^{(k)}$ la probabilité que la particule se trouve au point i après k secondes, et on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $\left(p_1^{(k)} \ p_2^{(k)}\right)$.

I - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{(k)} = P^{(0)}A^k$.

II - Vérifier que 1 est valeur propre de A.

III - Montrer que A est diagonalisable.

IV - Donner une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $D = Q^{-1}AQ$.

V - Calculer explicitement A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

VI - En déduire que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur P que l'on déterminera. Que constate-t-on ?

VII - Montrer que $\|P^{(k)} - P\|_2 = O(|2\alpha - 1|^k)$ (c'est-à-dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|P^{(k)} - P\|_2 \leqslant C|2\alpha - 1|^k$). Que remarque-t-on sur la rapidité de la convergence de la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

Partie B - Convergence et matrices stochastiques

On fixe des entiers naturels non nuls l, m et n.

I - Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et $\left(B^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $\left(A^{(k)}B^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

II - Définitions.
On dit qu'un vecteur ligne $X = (x_1 \ \cdots \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une densité de probabilité si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \geqslant 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = 1$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si chaque ligne de A est une densité de probabilité.

1 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que A est une matrice stochastique si et seulement si

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et $X \in \mathbb{R}^n$ une densité de probabilité. Montrer que XA est une densité de probabilité.

3 - Soit $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^n$, convergeant vers un vecteur ligne X. Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)}$ est une densité de probabilité, alors X est une densité de probabilité.

4 - Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant vers une matrice A. Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)}$ est une matrice stochastique, alors A est une matrice stochastique.

Partie C - Diagonalisation de matrices symétriques particulières

On fixe pour cette partie un entier $n \geqslant 2$ et deux réels α et β.

On note $A(\alpha, \beta)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux valent α et les autres valent β.

I - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que $A(\alpha, \beta)$ soit stochastique.

II - Vérifier que le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $A(\alpha, \beta)$.

III - Que vaut le rang de $A(\alpha, \beta) - (\alpha - \beta)I_n$ en fonction de β ?

IV - En déduire que $A(\alpha, \beta)$ est diagonalisable.

V - On suppose à partir de maintenant que $\beta \neq 0$.

1 - Donner une base de chacun des sous-espaces propres de A.

2 - Montrer que les deux sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

3 - En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres et dont le premier vecteur est égal à $\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

4 - On note Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$. Que vaut ${}^tQA(\alpha, \beta)Q$? (On ne fera pas de calculs.)

Partie D - Cas de n points.

On fixe pour cette partie un entier $n \geqslant 2$ et un réel $\alpha \in]0, 1[$.

On considère n points distincts dans le plan numérotés de 1 à n. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à α ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable. On suppose qu'au départ la particule se trouve avec une probabilité $p_i^{(0)}$ au point i. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $p_i^{(k)}$ la probabilité que la particule se trouve au point i après k secondes, et on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $\begin{pmatrix} p_1^{(k)} & \cdots & p_n^{(k)} \end{pmatrix}$.

I - Déterminer un réel β vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} A(\alpha, \beta)$$

où $A(\alpha, \beta)$ correspond à la matrice définie dans la partie précédente.

On note pour la suite A la matrice $A(\alpha, \beta)$.

II - En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{(k)} = P^{(0)} A^k$.

III - En utilisant la matrice de passage Q introduite en partie **C.V.**, montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$\frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

IV - En déduire que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur P que l'on déterminera.

V - Montrer que $\|P^{(k)} - P\|_2 = O\left(\left|\frac{n\alpha - 1}{n - 1}\right|^k\right)$. (Indication : on pourra utiliser la norme subordonnée sur la matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)