
SUJET BLANC N°2 - CORRIGÉ

Durée *:* 5 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Les problèmes n°1 et n°2 feront l'objet de deux compositions distinctes.

PROBLEME I : Autour de la formule des différences divisées

Notations, définitions et rappels

- Étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[a,b]$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifiera les fonctions polynomiales définies sur un intervalle $[a,b]$ avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On considère ainsi $\mathbb{R}[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([a,b])$.
- Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: on rappelle ici que pour tous polynômes A, B de $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que :

$$A = BQ + R \quad , \quad \text{avec} \quad deg(R) < deg(B)\,.$$

Dans la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 1.
On considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ainsi que $n+1$ points distincts $x_0, \cdots, x_n$ de l'intervalle $[a,b]$.

Partie A - Résultats préliminaires

Le but de cette partie est de démontrer l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de f aux points $x_0, \cdots, x_n$, c'est à dire vérifiant :

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, \cdots, n\,. \tag{1}$$

I - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement si le polynôme $(X-a)$ divise P.

On effectue la division euclidienne de P par $(X-a)$: $P = Q(X-a) + c$, avec c une constante réelle. Ainsi, a est racine de P si et seulement si $c = 0$, c'est à dire $(X-a)$ divise P

II - Montrer par récurrence que tout polynôme non nul de degré $m \in \mathbb{N}$ admet au plus m racines.

Si $m = 0$, alors P est un polynôme constant non nul, et n'admet donc pas de racine.
Supposons la propriété vraie au rang m, et considérons un polynôme P non nul de degré $m+1$. Si P n'admet pas de racine, il n'y a rien à démontrer (P a donc au plus $m+1$ racines). Supposons que P admette une racine $a \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, $X - a$ divise P, c'est à dire $P = Q(X-a)$, avec $deg(Q) < deg(P)$. Par hypothèse de récurrence, Q admet au plus m racines, et donc P en admet au plus $m+1$.

On considère à présent l'application :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \Big(P(x_0), \cdots, P(x_n)\Big) \end{array}.$$

III - Montrer que Φ est linéaire.

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi(P+\lambda Q) &= \Big((P+\lambda Q)(x_0), \cdots, (P+\lambda Q)(x_n)\Big) \\ &= \Big(P(x_0), \cdots, P(x_n)\Big) + \lambda\Big(Q(x_0), \cdots, Q(x_n)\Big) \\ &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q).\end{aligned}$$

IV - Montrer que $Ker(\Phi) = \{0\}$.

*Si un polynôme P de degré au plus n est dans le noyau de Φ, alors il admet au moins $n+1$ racines (les $x_0, \cdots, x_n$). Donc P est nul en vertu de la question **A-II**.*

V - En déduire que Φ est bijective.

Φ étant linéaire, la question précédente donne l'injectivité. Par ailleurs, les dimensions des espaces de départ et d'arrivée de Φ étant les mêmes, les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité se confondent, ce qui permet de conclure.

VI - Conclure.

L'existence et l'unicité du polynôme interpolateur découlent directement du caractère bijectif de Φ.

Partie B - Formule de Newton et différences divisées

I - Justifier, par un argument simple, que la famille de polynômes :

$$\mathcal{E} = \left\{1, (X-x_0), (X-x_0)(X-x_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)\right\}$$

forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il suffit de constater que cette famille de $n+1$ polynômes est échelonnée en degrés.

Soit P_n, le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \cdots, x_n$. On considère la décomposition de P_n dans cette base :

$$P_n(X) = a_0 + a_1(X-x_0) + \cdots + a_n\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k),$$

où les a_i , $i = 0, \cdots, n$ sont des réels.

II - 1 - Montrer que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

En utilisant la forme précédente : $P_n(x_0) = a_0$. Or, P_n étant le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \cdots, x_n$, on a $f(x_0) = a_0$. Ensuite : $f(x_1) = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) = f(x_0) + a_1(x_1-x_0)$, d'où l'on tire la deuxième relation.

2 - On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout entier i vérifiant $2 \leqslant i \leqslant n$,

$$a_i = \frac{f(x_i) - \left[a_0 + a_1(x_i-x_0) + \cdots + a_{i-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{i-2}(x_i-x_k)\right]}{\displaystyle\prod_{k=0}^{i-1}(x_i-x_k)}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que $P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i-x_0) + \cdots + a_i\prod_{k=0}^{i-1}(x_i-x_k)$.

On a $P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1}(x_i - x_k)$. *Pour tout entier* $j \geqslant i$, *le produit* $\prod_{k=0}^{j}(x_i - x_k)$ *est nul (car "*x_k*" peut prendre la valeur* x_i*). Ainsi, tous les termes du type* $\prod_{k=0}^{j}(x_i - x_k)$ *avec* $j \geqslant i$ *sont nuls dans l'expression précédente, ce qui établit le résultat donné dans l'indication. Par suite :* $f(x_i) = P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + a_{i-1}\prod_{k=0}^{i-2}(x_i - x_k) + a_i \prod_{k=0}^{i-1}(x_i - x_k)$*, d'où l'on tire l'égalité demandée.*

III - Montrer par récurrence (sur i) que pour tout entier naturel $i \leqslant n$, les coefficients a_i ne dépendent que des points $x_0, \cdots, x_i$ (et pas des $x_{i+1}, \cdots, x_n$).
Pour $i = 0$*, on a vu que* $a_0 = f(x_0)$*, donc ceci est vrai pour* $i = 0$*. Supposons que cette propriété soit vraie jusqu'au rang* $i - 1$ *(c'est à dire que les* $a_0, \cdots, a_{i-1}$*) ne dépendent que des points* $x_0, \cdots, x_{i-1}$*. La question précédente permet d'affirmer que* a_i *ne dépend que des* $a_0, \cdots, a_{i-1}$ *et des* $x_0, \cdots, x_{i-1}, x_i$*. En utilisant l'hypohèse de récurrence, on obtient alors l'hérédité.*

On pose alors $a_i = f[x_0, \cdots, x_i]$ pour tout $i = 0, \cdots, n$, de sorte que

$$P_n(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n]\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)\,. \tag{2}$$

IV - Pour tout $i = 0, \cdots, n$, on pose $y_i = x_{n-i}$. Notons que $(y_i)_{i=0,\cdots,n}$ et $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$ définissent la même famille de points, et donc le même polynôme interpolateur P_n.

1 - Écrire la décomposition de P_n sous la forme (2) dans la base :

$$\mathcal{F} = \left\{1, (X - y_0), (X - y_0)(X - y_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1}(X - y_k)\right\}.$$

$$P_n(X) = f[y_0] + f[y_0, y_1](X - y_0) + \cdots + f[y_0, \cdots, y_n]\prod_{k=0}^{n-1}(X - y_k)\,. \tag{3}$$

2 - On considère l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{E}$ donnée par (2) et celle dans la base $\mathcal{F}$ obtenue à la question précédente. En raisonnant sur les termes d'ordre n, montrer que $f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_n, \cdots, x_0]$.
Les coefficients des termes d'ordre n *issus de (2) et (3) sont respectivement* $f[x_0, \cdots, x_n]$ *et* $f[y_0, \cdots, y_n]$*. Or,* $f[y_0, \cdots, y_n] = f[x_n, \cdots, x_0]$ *par définition.*

3 - a - Déterminer le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-2}(X - x_k)$.

Le terme d'ordre $n - 1$ *est* X^{n-1}*.*

b - Déterminer le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$.

Il s'agit d'un polynôme de degré n*. Les termes de degré* $n-1$ *s'obtiennent en choisissant* $n - 1$ *fois le terme en* X *dans le produit, et l'un des* x_k *comme dernier facteur. Il y a* n *termes de ce type, ce qui donne :* $\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right)X^{n-1}$.

c - En déduire le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme P_n donné par (2).
En combinant les deux questions précédentes, on obtient que le terme d'ordre $n - 1$ *du polynôme* P_n *donné par (2) est* $\left(f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_0, \cdots, x_n]\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right)X^{n-1}$

4 - En considérant à nouveau l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{F}$, et en raisonnant sur les termes d'ordre $n-1$, montrer que

$$f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_0, \cdots, x_n]\sum_{k=0}^{n-1} x_k = f[y_0, \cdots, y_{n-1}] - f[y_0, \cdots, y_n]\sum_{k=0}^{n-1} y_k \,.$$

Ce résultat est immédiat en reproduisant ce qui a été fait précédemment sur (3) et en identifiant les termes d'ordre $n-1$.

5 - En déduire que $f[x_0, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$.

*Indication : on pourra remarquer qu'en menant la même analyse effectuée au **B-IV-2** aux points d'interpolation $y_0, \cdots, y_{n-1}$, on a $f[y_0, \cdots, y_{n-1}] = f[y_{n-1}, \cdots, y_0]$.*

*D'après **A-II**, $f[x_0, \cdots, x_n] = f[y_0, \cdots, y_n]$, donc l'égalité précédente se réécrit :*

$$f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[y_0, \cdots, y_{n-1}] = f[x_0, \cdots, x_n]\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} y_k\Big)\,.$$

Par suite, en utilisant $\sum_{k=0}^{n-1} y_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $f[y_0, \cdots, y_{n-1}] = f[y_{n-1}, \cdots, y_0] = f[x_1, \cdots, x_n]$:

$$f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_1, \cdots, x_n] = f[x_0, \cdots, x_{n-1}]\Big(x_0 - x_n\Big)\,.$$

Partie C - Calcul d'erreur

On suppose à présent que f est $n+1$ fois dérivable.

I - Dans cette question, on fixe $x \in [a, b]$, distinct des $x_0, \cdots, x_n$, et on considère le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0, \cdots, x_n, x$:

$$P_{n+1}(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n, x]\prod_{k=0}^{n}(X - x_k)\,.$$

1 - Montrer que $P_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!f[x_0, \cdots, x_n, x]$.

P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Sa dérivée $(n+1)^e$ est donc constante, égale à $c(n+1)!$, où c est le coefficient du terme de plus haut degré, c'est à dire $f[x_0, \cdots, x_n, x]$.

2 - On considère la fonction définie par $e_{n+1}(t) = f(t) - P_{n+1}(t)$ pour tout réel $t \in [a, b]$. Montrer que e'_{n+1} s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a, b[$.

P_{n+1} interpole f aux points $x_0, \cdots, x_n, x$, c'est à dire que $P_n(x_i) = f(x_i) \forall i = 0, \cdots, n$ et $P_n(x) = f(x)$. Ainsi, e_{n+1} s'annule en $n+2$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$. Par ailleurs, e_{n+1} est continue sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ (comme somme d'un polynôme et d'une fonction $n+1$ fois dérivable). Le théorème de Rolle garantit l'existence de $n+1$ points distincts de $]a, b[$ en lesquels e_{n+1} s'annule.

3 - Montrer que $e_{n+1}^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$. En déduire qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f[x_0, \cdots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

En itérant $n+1$ fois le raisonnement précédent, on obtient que $e_{n+1}^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]a,b[$. En d'autres termes, il existe $\zeta \in]a,b[$ tel que $e_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = 0$, c'est à dire $f^{(n+1)}(\xi) = P_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$. En utilisant ce qui précède, $P_{n+1}^{(n+1)}$ est une constante, égale à $(n+1)! f[x_0, \cdots, x_n, x]$, ce qui donne le résultat.

II - Montrer que pour tout réel $x \in [a,b]$, on a :

$$f(x) - P_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \{x_0, \cdots, x_n\} , \\ f[x_0, \cdots, x_n, x] \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \text{ sinon } . \end{cases}$$

Indication : dans le cas où x est distinct des $x_0, \cdots, x_n$, on pourra écrire le polynôme interpolateur P_n de f aux points $x_0, \cdots, x_n$ en fonction du polynôme interpolateur P_{n+1} de f aux points $x_0, \cdots, x_n, x$.

Si $x \in \{x_0, \cdots, x_n\}$, alors on a bien $f(x) = P_n(x)$, où P_n est le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \cdots, x_n$. Si x est distinct de $x_0, \cdots, x_n$, on considère le polyôme interpolateur P_{n+1} de f aux points $x_0, \cdots, x_n, x$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n, x] \prod_{k=0}^{n} (X - x_k) \\ &= P_n(X) + f[x_0, \cdots, x_n, x] \prod_{k=0}^{n} (X - x_k) . \end{aligned}$$

On a donc $f(x) = P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, \cdots, x_n, x] \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$.

III - En déduire que si $x_0, \cdots, x_n$ sont des réels distincts d'un intervalle $[a,b]$, on a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| ,$$

où $M_{n+1} = \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

D'après ce qui précède, on a, pour tout $x \in]a,b[$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant |f[x_0, \cdots, x_n, x]| \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right| .$$

*D'autre part, la question **C-I-3-** garantit l'existence d'un $\xi \in]a,b[$ tel que $f[x_0, \cdots, x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, d'où l'on tire le résultat.*

Partie D - Application

On s'intéresse à la fonction $f : x \in [0,2] \longmapsto \sin(\pi x/2)$.

1. En utilisant l'écriture (2), et en se basant sur **II-1**, **IV-5**, déterminer les coefficients du polynôme interpolateur P_2 de f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

   En se basant sur (2) :

$$P_2(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](X - x_0)(X - x_1).$$

Le calcul donne :
$f[x_0] = f(x_0) = 0.$
$f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1.$
$f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1.$
$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -1.$
On en déduit : $P_2(X) = 1 \times (X - x_0) + (-1) \times (X - x_0)(X - x - 1) = 2X - X^2$.

2. Montrer que pour tout $t \in [0, 2]$, on a $|f^{(3)}(t)| \leqslant \dfrac{\Pi^3}{8}$.

   Pour tout $t \in [0, 2]$ *:* $\left|f^{(3)}(t)\right| = \left(\dfrac{\Pi}{2}\right)^3 \left|\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)\right| \leqslant \dfrac{\Pi^3}{8}$

3. Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$, $|f(x) - P_2(x)| \leqslant \dfrac{\Pi^3}{12}$.
   Pour tout $x \in [0, 2]$*, on a* $|x| \leqslant 2$*,* $|x - 1| \leqslant 1$ *et* $|x - 2| \leqslant 2$*, et donc* $|x(x - 1)(x - 2)| \leqslant 4$ *(cette estimation n'étant pas optimale). En revenant à la formule d'erreur* ***C-III*** *:*
   $\forall x \in [0, 2]$, $|f(x) - P_2(x)| \leqslant \dfrac{M_3}{3!} \left|\prod_{k=0}^{2} (x - x_k)\right| \leqslant \dfrac{1}{6} \times \dfrac{\Pi^3}{8} \times 4 = \dfrac{\Pi^3}{12}$

PROBLEME II : Un exemple de matrices stochastiques

Le but du problème est d'étudier le modèle suivant : on considère n points distincts ($n \geqslant 2$) dans le plan numérotés de 1 à n. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à $\alpha \in]0,1[$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable. On suppose qu'au départ la particule se trouve avec une probabilité p_i au point i et on étudie la limite des suites des probabilités $(p_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ où $p_i^{(k)}$ est la probabilité que la particule se trouve au point i après k secondes.

Notations, définitions et rappels

Pour les notations, définitions et rappels ci-dessous, on considère n et m deux entiers naturels non nuls.

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels.
- On note ${}^tA$ la transposée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels, et I_n désigne la matrice identité.
- Un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ sera représenté, soit par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, soit par le vecteur ligne $(x_1 \ \cdots \ x_n)$, où les x_i sont les coordonnées de x dans la base canonique.
- $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne usuelle, notée $\|\cdot\|_2$.
- Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On dit que cette suite converge vers une matrice A de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$, la suite $\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i,j) des $A^{(k)}$ converge vers le coefficient a_{ij} d'indice (i,j) de A.
- Une suite de vecteurs $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne si et seulement si la suite correspondante des vecteurs colonnes (resp. lignes) $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur colonne (resp. ligne) X correspondant.

Partie A - Cas de deux points

On fixe un réel $\alpha \in]0,1[$ et on note A la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

On considère une particule qui se déplace sur deux points distincts numérotés 1 et 2, de la façon suivante : chaque seconde, elle reste sur le même point avec un probabilité α ou change de point avec une probabilité égale à $(1-\alpha)$. On suppose qu'au départ la particule se trouve avec une probabilité p au point 1 (et donc $1-p$ au point 2). Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1,2\}$, on note $p_i^{(k)}$ la probabilité que la particule se trouve au point i après k secondes, et on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $\left(p_1^{(k)} \ p_2^{(k)}\right)$.

I - Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{(k)} = P^{(0)}A^k$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $p_1^{(k+1)} = p_1^{(k)} \times \alpha + p_2{(k)} \times (1-\alpha)$ et $p_2^{(k+1)} = p_1^{(k)} \times (1-\alpha) + p_2^{(k)} \times \alpha$ d'où $P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

On en déduit ainsi le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. En effet, on a :

- *$P^{(0)} = P^{(0)} I_2 = P^{(0)} A^0$.*
- *Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $P^{(k)} = P^{(0)} A^k$. Alors $P^{(k+1)} = P^{(k)} A = P^{(0)} A^k A = P^{(0)} A^{k+1}$.*

II - Vérifier que 1 est valeur propre de A.

Remarquons que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, 1 est valeur propre de A et le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

III - Montrer que A est diagonalisable.

On a $A - (2\alpha - 1)I_2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$. On voit ainsi facilement que $2\alpha - 1$ est valeur propre de A et que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à cette valeur propre. Comme $\alpha \neq 1$, la matrice A a deux valeurs propres distinctes et comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ elle est diagonalisable.

IV - Donner une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $D = Q^{-1}AQ$.

Par les questions précédentes, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres 1 et $2\alpha - 1$. On a ainsi par le théorème de changement de bases,

$$D = Q^{-1}AQ \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

V - Calculer explicitement A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a ainsi

$$A^k = QD^kQ^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2\alpha-1)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2\alpha-1)^k & 1-(2\alpha-1)^k \\ 1-(2\alpha-1)^k & 1+(2\alpha-1)^k \end{pmatrix}.$$

VI - En déduire que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur P que l'on déterminera. Que constate-t-on ?

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P^{(k)} &= P^{(0)}A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+(2\alpha-1)^k & 1-(2\alpha-1)^k \\ 1-(2\alpha-1)^k & 1+(2\alpha-1)^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2\alpha-1)^k(2p-1) & 1+(2\alpha-1)^k(1-2p) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\alpha \in]0,1[$, on a $(2\alpha - 1) \in]-1,1[$ et donc $(2\alpha-1)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $P^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ que l'on note P.

On constate que cette limite P ne dépend ni de α, ni de la condition initiale.

VII - Montrer que $\|P^{(k)} - P\|_2 = O(|2\alpha - 1|^k)$ (c'est-à-dire qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\|P^{(k)} - P\|_2 \leqslant C|2\alpha - 1|^k$). Que remarque-t-on sur la rapidité de la convergence de la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$?

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \|P^{(k)} - P\|_2 &= \left\| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2\alpha-1)^k(2p-1) & (2\alpha-1)^k(1-2p) \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{1}{2}|2\alpha-1|^k \left\| \begin{pmatrix} 2p-1 & 1-2p \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= O(|2\alpha-1|^k). \end{aligned}$$

La rapidité de la convergence est exponentielle en temps et à un facteur près indépendante de la condition initiale. En fait, comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\|P^{(k+1)} - P\|_2}{\|P^{(k)} - P\|_2} = |2\alpha - 1| < 1$, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge linéairement vers P avec pour vitesse $|2\alpha - 1|$.

Partie B - Convergence et matrices stochastiques

On fixe des entiers naturels non nuls l, m et n.

I - Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, et $\left(B^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $\left(A^{(k)}B^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

Pour k, i, j et s des entiers naturels tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant l$, notons respectivement $a_{is}^{(k)}$, a_{is}, $b_{sj}^{(k)}$ et b_{sj} les coefficients de $A^{(k)}$, A, $B^{(k)}$ et B d'indices (i,s), et (s,j).

Fixons un couple d'entiers (i,j) avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant l$. Pour $k \in \mathbb{N}$, le coefficient d'indice (i,j) de $A^{(k)}B^{(k)}$ vaut $\sum_{s=1}^{m} a_{is}^{(k)} b_{sj}^{(k)}$ et converge vers $\sum_{s=1}^{m} a_{is} b_{sj}$ que est le coefficient d'indice (i,j) de AB, par les propriétés de limites de sommes et produits (ou de manière équivalente par continuité de l'addition et de la multiplication).

Ainsi, la suite $\left(A^{(k)}B^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.

II - Définitions.

On dit qu'un vecteur ligne $X = (x_1 \ \cdots \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une densité de probabilité si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \geqslant 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = 1$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si chaque ligne de A est une densité de probabilité.

1 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que A est une matrice stochastique si et seulement si

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{ij} \in \mathbb{R}^+$ pour tout i,j. Si A est stochastique alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $a_{i1} + \ldots + a_{in} = 1$ d'où $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement si $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $a_{i1} + \ldots + a_{in} = 1$. Comme on a supposé de plus que les coefficients de A sont positifs ou nuls, A est stochastique.

2 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et $X \in \mathbb{R}^n$ une densité de probabilité. Montrer que XA est une densité de probabilité.

Comme A et X sont à coefficients positifs ou nuls, XA est également à coefficients positifs ou nuls. De plus, par la question précédente $XA \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1$. Ainsi XA est une densité de probabilité.

3 - Soit $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^n$, convergeant vers un vecteur ligne X. Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)}$ est une densité de probabilité, alors X est une densité de probabilité.

*Les coefficients de X étant limites de coefficients positifs ou nuls, ils sont également positifs ou nuls. De plus, par **I.1**, on a* $X\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \lim\limits_{k\to+\infty} X^{(k)}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = 1$, *donc X est une densité de probabilité.*

4 - Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant vers une matrice A. Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)}$ est une matrice stochastique, alors A est une matrice stochastique.

*Les coefficients de A étant limites de coefficients positifs ou nuls, ils sont également positifs ou nuls. De plus, par **I.1**, on a* $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \lim\limits_{k\to+\infty} A^{(k)}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. *On en déduit par **II.1.** que A est une matrice stochastique.*

Partie C - Diagonalisation de matrices symétriques particulières

On fixe pour cette partie un entier $n \geqslant 2$ et deux réels α et β.

On note $A(\alpha,\beta)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux valent α et les autres valent β.

I - Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que $A(\alpha,\beta)$ soit stochastique.

Cherchons une condition nécessaire : supposons que $A(\alpha,\beta)$ soit stochastique. Alors $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$. De plus comme la somme des coefficients de la première ligne vaut $\alpha + (n-1)\beta$, on a $\alpha + (n-1)\beta = 1$.

Réciproquement, si $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ et $\alpha + (n-1)\beta = 1$, alors chaque coefficient de A est positif ou nul. De plus, la somme des coefficients de chaque ligne vaut $\alpha + (n-1)\beta$, on en déduit que A est stochastique.

II - Vérifier que le vecteur colonne $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ est vecteur propre de $A(\alpha,\beta)$.

On a $A(\alpha,\beta)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = (\alpha+(n-1)\beta)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ *donc* $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de $A(\alpha,\beta)$ associé à la valeur propre $\alpha + (n-1)\beta$.*

III - Que vaut le rang de $A(\alpha,\beta) - (\alpha-\beta)I_n$ en fonction de β ?

On a $A(\alpha,\beta) - (\alpha-\beta)I_n = \begin{pmatrix}\beta & \beta & \cdots & \beta\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta & \beta & \cdots & \beta\end{pmatrix}$. *Le rang de cette matrice vaut 0 si $\alpha = 0$ et vaut 1 sinon.*

IV - En déduire que $A(\alpha,\beta)$ est diagonalisable.

Si $\beta = 0$, alors $A(\alpha,\beta) = \alpha I_n$ est diagonale. Supposons maintenant $\beta \neq 0$. Par le théorème du rang, on a $\dim\ker(A(\alpha,\beta) - (\alpha-\beta)I_n) = n-1$. Ainsi le sous-espace propre $E_{\alpha-\beta}$ associé à la valeur propre $\alpha-\beta$ est de dimension $n-1$. Comme $\beta \neq 0$, la valeur propre $\alpha+(n-1)\beta$ est distincte de $\alpha-\beta$. Notons $E_{\alpha+(n-1)\beta}$ le sous-espace propre associé. Comme $\dim E_{\alpha-\beta} =$

$n-1$ et qu'on est en dimension n, on a nécessairement $\dim E_{\alpha+(n-1)\beta} = 1$. Ainsi, $A(\alpha,\beta)$ est diagonalisable.

V - On suppose à partir de maintenant que $\beta \neq 0$.

1 - Donner une base de chacun des sous-espaces propres de A.

*Par **II.** et **IV.**, $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_{\alpha+(n-1)\beta}$. Comme $A(\alpha,\beta) - (\alpha-\beta)I_n = \begin{pmatrix} \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta \end{pmatrix}$, on voit facilement que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $E_{\alpha-\beta}$.*

2 - Montrer que les deux sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

On remarque que tout vecteur de la base ci-dessus de $E_{\alpha-\beta}$ est orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $E_{\alpha+(n-1)\beta}$ et $E_{\alpha-\beta}$ sont orthogonaux.

3 - En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres et dont le premier vecteur est égal à $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est de norme 1 et forme une base de $E_{\alpha+(n-1)\beta}$. On complète en une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. D'après la question précédente, le sous-espace propre $E_{\alpha+(n-1)\beta}$ est l'orthogonal de $E_{\alpha-\beta}$. On en déduit que les autres vecteurs de $\mathcal{B}$ appartiennent à $E_{\alpha+(n-1)\beta}$; ce sont donc également des vecteurs propres.

4 - On note Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$. Que vaut ${}^tQA(\alpha,\beta)Q$? (On ne fera pas de calculs.)

Q est la matrice de passage entre deux bases orthonormées, c'est donc une matrice orthogonale. Ainsi, d'après la question précédente, on a

$$ {}^tQA(\alpha,\beta)Q = Q^{-1}A(\alpha,\beta)Q = \begin{pmatrix} \alpha+(n-1)\beta & & & \\ & \alpha-\beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha-\beta \end{pmatrix}. $$

(Remarque : un théorème sur les matrices symétriques réelles affirme que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.)

Partie D - Cas de n points.

On fixe pour cette partie un entier $n \geqslant 2$ et un réel $\alpha \in]0,1[$.

On considère n points distincts dans le plan numérotés de 1 à n. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à α ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable. On suppose qu'au départ la particule se trouve avec une probabilité $p_i^{(0)}$ au point i. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $p_i^{(k)}$ la probabilité que la particule se trouve au point i après k secondes, et on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $\begin{pmatrix} p_1^{(k)} & \cdots & p_n^{(k)} \end{pmatrix}$.

I - Déterminer un réel β vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} A(\alpha, \beta)$$

où $A(\alpha, \beta)$ correspond à la matrice définie dans la partie précédente.

Rappelons que si la particule se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à α ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable. Notons β la probabilité de passer d'un point i à un point j pour $i \neq j$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$p_i^{(k+1)} = p_i^{(k)} \times \alpha + \sum_{j \neq i} p_j^{(k)} \times \beta$$

tel que $\alpha + (n-1)\beta = 1$. Alors, avec $\beta = \dfrac{1-\alpha}{n-1}$, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = P^{(k)} A(\alpha, \beta)$. (Dans ce cas $A(\alpha, \beta)$ est stochastique, voir parties précédentes.)

On note pour la suite A la matrice $A(\alpha, \beta)$.

II - En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{(k)} = P^{(0)} A^k$.

*On obtient ce résultat par récurrence de la même façon que dans **A.I.***

III - En utilisant la matrice de passage Q introduite en partie **C.V.**, montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$\frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

*Comme $\alpha \neq 1$, on a $\beta \neq 0$. On peut donc utiliser les résultats de la partie **C.V.** avec la matrice de passage Q de la base canonique à une base orthonormée dont le premier vecteur est $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Alors $A = Q \begin{pmatrix} \alpha + (n-1)\beta & & & \\ & \alpha - \beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha - \beta \end{pmatrix} {}^t Q = Q \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha - \beta & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha - \beta \end{pmatrix} {}^t Q$ *et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$A^k = Q \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (\alpha - \beta)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha - \beta)^k \end{pmatrix} {}^t Q.$$

*Or $\alpha - \beta = \alpha - \dfrac{1-\alpha}{n-1} = \dfrac{n\alpha - 1}{n-1}$. Comme $\alpha \in]0,1[$, on en déduit que $\alpha - \beta \in]-1/(n-1), 1[\subseteq]-1, 1[$. Ainsi, $(\alpha - \beta)^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc par **B.I.***

$$A^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} Q \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} {}^t Q.$$

Enfin, comme le première colonne de Q vaut $\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, *on obtient*

$$Q\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}{}^tQ = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}{}^tQ = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

IV - En déduire que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur P que l'on déterminera.

Par ***B.I.****, la suite* $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $P = \frac{1}{n}P^{(0)}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$. *Comme* $P^{(0)}$ *est une densité de probabilité, on en déduit que* $P = \frac{1}{n}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$.

V - Montrer que $\|P^{(k)} - P\|_2 = O\left(\left|\frac{n\alpha - 1}{n-1}\right|^k\right)$. (Indication : on pourra utiliser la norme subordonnée sur la matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)

Pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
P^{(k)} - P &= P^{(0)}Q\begin{pmatrix}1 & & & \\ & (\alpha-\beta)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha-\beta)^k\end{pmatrix}{}^tQ - P^{(0)}\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}{}^tQ\\
&= P^{(0)}Q\begin{pmatrix}0 & & & \\ & (\alpha-\beta)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha-\beta)^k\end{pmatrix}{}^tQ
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|P^{(k)} - P\|_2 &= \left\|Q\begin{pmatrix}0 & & & \\ & (\alpha-\beta)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha-\beta)^k\end{pmatrix}{}^tQ\,{}^tP^{(0)}\right\|_2\\
&\leqslant |||Q|||\cdot\left|\left|\left|\begin{pmatrix}0 & & & \\ & (\alpha-\beta)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\alpha-\beta)^k\end{pmatrix}\right|\right|\right|\cdot|||\,{}^tQ|||\,\|P^{(0)}\|_2\\
&\leqslant |\alpha-\beta|^k|||Q|||\cdot\left|\left|\left|\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}\right|\right|\right|\cdot|||\,{}^tQ|||\,\|P^{(0)}\|_2 = O\left(\left|\frac{n\alpha-1}{n-1}\right|^k\right).
\end{aligned}$$