
SUJET BLANC N°2

Durée : 5 heures.
Ce sujet est principalement un extrait du Concours Communs Polytechniques 2016 - Filière PSI et de la seconde épreuve du CAPES de 2017.

Notations

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ [respectivement dans $\mathbb{C}$].
- On note ${}^tM$ la transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$].
- Si $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que cette suite converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite $\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i,j) de $A^{(k)}$ converge vers le coefficient, noté a_{ij}, d'indice (i,j) de A.
- Soit $\left(X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ [respectivement de $\mathbb{C}^n$] et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ [respectivement de $\mathbb{C}^n$]. On dit que la suite $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X si pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, la suite $(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x_i.
- Pour tout vecteur $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|X\|_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$.
- Pour tout vecteur ligne $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ on note ${}^tX$ le vecteur colonne transposé $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (et réciproquement).
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $Sp(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A défini par
$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda| .$$

PARTIE I : matrices stochastiques et densités de probabilité

A - Convergence. Soit $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers un vecteur X, $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(B^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers les matrices A et B.

Montrer que les suites $\left(X^{(k)}A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(A^{(k)}B^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers XA et AB.

B - Définitions.

On dit qu'un vecteur ligne $X = (x_1 \ \cdots \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une densité de probabilité si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \geq 0$ et $x_1 + \ldots + x_n = 1$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si chaque ligne de A est une densité de probabilité.

1 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que A est une matrice stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

2 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et $X = (x_1 \ \cdots \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ une densité de probabilité. Montrer que XA est une densité de probabilité.

3 - Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que AB est une matrice stochastique.

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1]$, la matrice $\alpha A + (1-\alpha)B$ est également stochastique. .

4 - Soit $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, convergeant vers un vecteur X. Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)}$ est une densité de probabilité, alors X est une densité de probabilité.

5 - Soit $\left(A^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant vers une matrice A. Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)}$ est une matrice stochastique, alors A est une matrice stochastique.

PARTIE II : Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, on fixe $n \geq 2$.

A - Questions de cours sur $\mathbb{C}$

1 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
Indication : on pourra utiliser le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\bar{z}$.

2 - Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si z_1 et z_2 ont même argument.

3 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|$.

4 - Soit $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ et X un vecteur de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers X si et seulement si $\|X^{(k)} - X\|_\infty$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini.

B - Coefficients

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique si elle est stochastique à coefficients strictement positifs.

1 - Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique]. Montrer que pour tous i, j compris entre 1 et n, on a :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad [\text{respectivement } 0 < a_{ij} < 1] \,.$$

2 - Montrer que le produit de deux matrices strictement stochastiques est une matrice strictement stochastique.

C - Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1 - Montrer que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \,,\ \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty \,.$$

2 - En déduire que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \, , \, \forall p \in \mathbb{N}, \|A^p X\|_\infty \leq \|X\|_\infty \, .$$

3 - Montrer que $\rho(A) = 1$.

D - Diagonale strictement dominante

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \, , \, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \, .$$

1 - Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \, .$$

Indication : en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ, on pourra considérer un indice i tel que $|x_i|$ soit maximal, et utiliser le fait que la i-ème coordonnée de AX vaut λx_i.

2 - Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.
Indication : on pourra vérifier que 0 ne peut être valeur propre de A.

E - Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

1 - On désigne par $A_1 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne, et on note $B = A_1 - I_{n-1} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1}$.
Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij} \, .$$

2 - En déduire que B est à diagonale strictement dominante. Que peut-on déduire quant au rang de $A - I_n$?

3 - Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.

4 - En utilisant la question **D-1** (et **A**), montrer que si λ est une valeur propre de A de module 1, alors $\lambda = 1$.

5 - En déduire que

$$\forall \lambda \in Sp(A) \setminus \{1\} \, , \, |\lambda| < 1 \, .$$

PARTIE III : Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

A - Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position du point en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et P_n la loi de X_n. On identifie la loi P_n au vecteur ligne $(\mathbb{P}(X_n = 1) \ \cdots \ \mathbb{P}(X_n = 4))$.

1 - Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $P_n = P_0 Q^n$ avec $Q = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2 - Montrer qu'il existe une unique densité de probabilité $\Pi = (p_1 \ \cdots \ p_n)$ telle que $\Pi = \Pi Q$.
Indication : on pourra remarquer que le vecteur colonne ${}^t\Pi$ doit être un vecteur propre de ${}^tQ = Q$.

B - Rapidité de convergence

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire et de la norme euclidienne usuels. On rappelle que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée.

1 - Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2 - Déterminer le rang de la matrice $Q + \dfrac{2}{10} I_4$.

3 - En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.

4 - Montrer que Q est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ ayant pour premier vecteur $2\,{}^t\Pi$. On notera P la matrice de passage correspondante.

5 - Montrer que

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \dfrac{-2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-2}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{-2}{10} \end{pmatrix} {}^tP.$$

6 - En déduire que $(Q^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π.

7 - Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p - R = \left(-\dfrac{2}{10}\right)^p P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP$.

8 - En déduire qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on ait

$$\|Q^p - R\| = O(r^p)\,.$$

9 - En utilisant les questions **A-1** et **B-6**, montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

PARTIE IV : Puissances d'une matrice stochastique

Soit n un entier naturel non nul et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \, .$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note $a_{ij}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i,j) de A^p :

$$A^p = \left(a_{ij}^{(p)} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \, .$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n, on note :

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leq k \leq n} a_{kj}^{(p)} \quad , \quad M_j^{(p)} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{kj}^{(p)} \, .$$

1 - Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)} \, .$$

2 - Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right) \, .$$

3 - Majoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m) \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right) \, .$$

4 - Convergence de ces suites

En déduire que, pour tout entier j compris entre 1 et n, les suites $\left(m_j^{(p)} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ et $\left(M_j^{(p)} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

5 - Conclusion

En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques.