

Durée : 5 heures.

Ce sujet est principalement un extrait du Concours Communs Polytechniques 2016 - Filière PSI et de la seconde épreuve du CAPES de 2017.

Notations

- \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels et \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.
- Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans \mathbb{R} [respectivement dans \mathbb{C}].
- On note tM la transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$].
- Si $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que cette suite converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, la suite $(a_{ij}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i, j) de $A^{(k)}$ converge vers le coefficient, noté a_{ij} , d'indice (i, j) de A .
- Soit $(X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n [respectivement de \mathbb{C}^n] et $X = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de \mathbb{R}^n [respectivement de \mathbb{C}^n]. On dit que la suite $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X si pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x_i .
- Pour tout vecteur $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|X\|_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$.
- Pour tout vecteur ligne $X = (x_1 \ \dots \ x_n)$ on note tX le vecteur colonne transposé $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (et réciproquement).
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $Sp(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|.$$

■ PARTIE I : matrices stochastiques et densités de probabilité ■

A - Convergence. Soit $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs lignes de \mathbb{R}^n convergeant vers un vecteur X , $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers les matrices A et B .

Montrer que les suites $(X^{(k)}A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(A^{(k)}B^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers XA et AB .

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la j -ème coordonnée du vecteur $X^{(k)}A^{(k)}$ vaut $\sum_{i=1}^n x_i^{(k)} a_{ij}^{(k)}$ et converge, par les propriétés de limites de sommes et produits, vers $\sum_{i=1}^n x_i a_{ij}$, qui correspond à la j -ème coordonnée du vecteur XA . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Pour $k \in \mathbb{N}$, le coefficient d'indice (i, j) de $A^{(k)}B^{(k)}$ vaut $\sum_{s=1}^n a_{is}^{(k)} b_{sj}^{(k)}$ et converge vers $\sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$, qui est le coefficient d'indice (i, j) de AB . Ainsi, les suites $(X^{(k)}A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(A^{(k)}B^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers XA et AB .

B - Définitions.

On dit qu'un vecteur ligne $X = (x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ est une densité de probabilité si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \geq 0$ et $x_1 + \dots + x_n = 1$. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si chaque ligne de A est une densité de probabilité.

1 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Montrer que A est une matrice stochastique si et seulement si $\mathbf{1}$ est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Supposons que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $a_{ij} \in \mathbb{R}^+$ pour tout i, j . Si A est stochastique alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $a_{i1} + \dots + a_{in} = 1$ d'où $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Réciproquement si

$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $a_{i1} + \dots + a_{in} = 1$. Comme on a supposé de plus que les coefficients de A sont positifs ou nuls, A est stochastique.

2 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique et $X = (x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathbb{R}^n$ une densité de probabilité. Montrer que XA est une densité de probabilité.

Comme A et X sont à coefficients positifs ou nuls, XA est également à coefficients positifs ou nuls. De plus, par la question précédente $XA \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1$. Ainsi XA est une densité de probabilité.

3 - Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que AB est une matrice stochastique. *Comme A et B sont à coefficients positifs ou nuls, AB est également à coefficients positifs ou nuls. De plus, $AB \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$*

*$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi par **B.1.** AB est stochastique.*

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 1]$, la matrice $\alpha A + (1 - \alpha)B$ est également stochastique. Soit $\alpha \in [0, 1]$. *Comme A et B sont à coefficients positifs ou nuls, et α et $(1 - \alpha)$ sont positifs ou nuls, les coefficients de $\alpha A + (1 - \alpha)B$ sont également positifs ou nuls. De plus*

*$(\alpha A + (1 - \alpha)B) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi par **B.1.** $\alpha A + (1 - \alpha)B$ est stochastique.*

4 - Soit $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{R}^n , convergeant vers un vecteur X . Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^{(k)}$ est une densité de probabilité, alors X est une densité de probabilité.

*Les coefficients de X étant limites de coefficients positifs ou nuls, ils sont également positifs ou nuls. De plus, par **A.1.**, on a $X \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow +\infty} X^{(k)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 1$, donc X est une densité de probabilité.*

5 - Soit $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant vers une matrice A . Montrer que, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)}$ est une matrice stochastique, alors A est une matrice stochastique.

*Les coefficients de A étant limites de coefficients positifs ou nuls, ils sont également positifs ou nuls. De plus, par **A.1.**, on a $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lim_{k \rightarrow +\infty} A^{(k)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit par **B.1.** que A est une matrice stochastique.*

Dans cette partie, on fixe $n \geq 2$.

A - Questions de cours sur \mathbb{C}

- 1 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ et $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Indication : on pourra utiliser le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\bar{z}$.

Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ où x_1, y_1, x_2 et y_2 sont des réels. Rappelons que $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$ et que l'on a les propriétés suivantes :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- $z_1 \bar{z}_1 = (x_1 + iy_1)(x_1 - iy_1) = x_1^2 - ix_1 y_1 + ix_1 y_1 + y_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = |z_1|^2$
- $z_1 + \bar{z}_1 = 2\operatorname{Re}(z_1) \leq 2|z_1|$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

D'où, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

De plus, $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$, et ainsi $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

- 2 - Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si z_1 et z_2 ont même argument. On suppose dans cette question que z_1 et z_2 sont deux complexes non nuls. L'inégalité triangulaire ci-dessus est une égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| \cdot |z_2|$. Si l'on note θ_1 et θ_2 les arguments respectifs de z_1 et z_2 dans $[0, 2\pi[$, alors $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2)$ et on a donc l'égalité ci-dessus si et seulement si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$. Or, comme $\theta_1 - \theta_2 \in]-\pi, \pi[$, on a $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$ si et seulement si $\theta_1 - \theta_2 = 0$, ce qui permet de conclure.
- 3 - Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$. C'est une conséquence classique de l'inégalité triangulaire : soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ d'où le résultat.
- 4 - Soit $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de \mathbb{C}^n et X un vecteur de \mathbb{C}^n . Montrer que $(X^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X si et seulement si $\|X^{(k)} - X\|_\infty$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Cela suit immédiatement de des inégalités suivantes : pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$|x_j^{(k)} - x_j| \leq \|X^{(k)} - X\|_\infty \leq \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i|.$$

B - Coefficients

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est strictement stochastique si elle est stochastique à coefficients strictement positifs.

- 1 - Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique]. Montrer que pour tous i, j compris entre 1 et n , on a :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \quad [\text{respectivement } 0 < a_{ij} < 1].$$

Si A est stochastique, les coefficients d'une ligne sont positifs ou nuls et de somme égale à 1. Ils valent donc tous au plus 1 et finalement sont tous dans $[0, 1]$.

Si A est strictement stochastique, elle est stochastique à coefficients non nuls et ses coefficients sont donc tous dans $]0, 1[$. Si, par l'absurde, on avait un coefficient $a_{ij} = 1$, comme il y a au moins deux coefficients sur la ligne i et qu'ils sont strictement positifs, la somme sur la ligne i serait strictement supérieure à 1 ce qui est contradictoire avec le caractère stochastique. Ainsi, les coefficients sont tous dans $]0, 1[$.

- 2 - Montrer que le produit de deux matrices strictement stochastiques est une matrice strictement stochastique. On a vu précédemment que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique. De plus si les coefficients des deux matrices sont strictement positifs, c'est encore vrai pour leur produit.

C - Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

- 1 - Montrer que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty.$$

Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$|(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n a_{ij} = \|x\|_\infty$$

et on en déduit en passant au maximum que

$$\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$$

- 2 - En déduire que

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \forall p \in \mathbb{N}, \|A^p X\|_\infty \leq \|X\|_\infty.$$

On a vu dans la question **I-B-3** que le produit de matrices stochastiques le restait, ainsi le résultat précédent s'applique à la matrice A^p pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $p = 0$, c'est évident car $A^0 = I_n$.

- 3 - Montrer que $\rho(A) = 1$. Soit λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre associé. On a $AX = \lambda X$ et, avec la question précédente

$$|\lambda| \|X\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$$

Comme $\|X\|_\infty > 0$ (X est vecteur propre et donc non nul) on en déduit que $|\lambda| \leq 1$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre, $\rho(A) \leq 1$. De plus, 1 est une valeur propre de A car A est stochastique, et cette inégalité est donc une égalité :

$$\rho(A) = 1$$

D - Diagonale strictement dominante

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

- 1 - Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Indication : en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ , on pourra considérer un indice i tel que $|x_i|$ soit maximal, et utiliser le fait que la i -ème coordonnée de AX vaut λx_i . Soit X un vecteur propre associé à λ , et $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal. On a alors $|x_i| > 0$ (car X , vecteur propre, est non nul) et comme $(AX)_i = \lambda x_i$, on a

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Comme $|x_i| > 0$ on peut conclure que

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- 2 - Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

Indication : on pourra vérifier que 0 ne peut être valeur propre de A . Si, par l'absurde, A n'était pas inversible, alors 0 serait une valeur propre de A et, par la question précédente, il existerait $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

ce qui contredit le caractère strictement dominant de la diagonale. Ainsi, toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

E - Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

- 1 - On désigne par $A_1 = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne, et on note $B = A_1 - I_{n-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$.

Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a :

$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$|b_{ii}| = |a_{ii} - 1| = 1 - a_{ii} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij} + a_{in} > \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{ij}.$$

(On utilise ci-dessus le fait que A étant strictement stochastique, on a $0 \leq a_{ii} \leq 1$, $\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = 1$ et $a_{in} > 0$.)

- 2 - En déduire que B est à diagonale strictement dominante. Que peut-on déduire quant au rang de $A - I_n$? *La question précédente montrer que B est à diagonale strictement dominante car pour tout $i \neq j$, on a $b_{ij} = a_{ij} > 0$. En particulier, B est inversible. Ses $n - 1$ lignes sont donc indépendantes et c'est a fortiori vrai de celle de $A - I_n$. On a donc*

$$\text{rg}(A - I_n) \geq n - 1$$

- 3 - Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1. *Par le théorème du rang, $\ker(A - I_n)$ est de dimension au plus 1. Comme A est stochastique, on sait que 1 est valeur propre de A et donc $\ker(A - I_n)$ est au moins de dimension 1. On conclut ainsi que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1 (et a pour base le vecteur e).*
- 4 - En utilisant la question **D-1** (et **A**), montrer que si λ est une valeur propre de A de module 1, alors $\lambda = 1$. *Par la question **D-1**, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}$. Par l'inégalité triangulaire, on obtient*

$$|\lambda| - a_{ii} = |\lambda| - |a_{ii}| \leq |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} a_{ij}.$$

*Si $|\lambda| = 1$, cette inégalité est une égalité et en particulier $|(\lambda - a_{ii}) + a_{ii}| = |\lambda - a_{ii}| + |a_{ii}|$. Par **A-2**, les nombres a_{ii} et $\lambda - a_{ii}$ doivent avoir même argument. Comme a_{ii} est un réel strictement positif, ceci impose que $\lambda - a_{ii}$ soit un réel strictement positif et donc que λ soit également un réel strictement positif. Comme $|\lambda| = 1$, ceci donne $\lambda = 1$.*

- 5 - En déduire que

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}, |\lambda| < 1.$$

*La question précédente entraîne que 1 est l'unique valeur propre de module 1 et comme $\rho(A) = 1$ par **C-3**, on obtient*

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \setminus \{1\}, |\lambda| < 1.$$

———— PARTIE III : Probabilité invariante ————

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i , elle reste au point i avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

A - Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position du point en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et P_n la loi de X_n . On identifie la loi P_n au vecteur ligne $(\mathbb{P}(X_n = 1) \dots \mathbb{P}(X_n = 4))$.

- 1 - Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $P_n = P_0 Q^n$ avec $Q = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *Soit $n \geq 0$.*

Par formule des probabilités totales avec le système complet $((X_n = i))_{1 \leq i \leq 4}$, on a pour tout $j \in \{1, \dots, 4\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(X_n = i) \mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$$

$\mathbb{P}_{X_n=i}(X_{n+1}=j)$ vaut $1/10$ si $i=j$ et $3/10$ sinon. On a donc $P_{n+1} = P_n Q$.
 Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = P_0 Q^n$$

- 2 - Montrer qu'il existe une unique densité de probabilité $\Pi = (p_1 \cdots p_n)$ telle que $\Pi = \Pi Q$.
 Indication : on pourra remarquer que le vecteur colonne ${}^t \Pi$ doit être un vecteur propre de ${}^t Q = Q$. Si Π convient, ${}^t \Pi$ est un vecteur propre pour ${}^t Q = Q$ associé à la valeur propre 1. Comme Q est strictement stochastique, la partie précédente montre que le sous-espace propre correspondant est de dimension 1 et est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition sur la somme des coordonnées de Π impose que $\Pi = \frac{1}{4}(1 \ 1 \ 1 \ 1)$.
 Réciproquement, ce vecteur convient.

B - Rapidité de convergence

On considère l'espace euclidien \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire et de la norme euclidienne usuels. On rappelle que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur \mathbb{R} dans une base orthonormée.

- 1 - Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur \mathbb{R} . Q est symétrique réelle donc diagonalisable (et ceci par le biais d'une matrice orthogonale).

- 2 - Déterminer le rang de la matrice $Q + \frac{2}{10}I_4$. $Q + \frac{2}{10}I_4 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Toutes ses colonnes étant identiques et non nulles, le rang de cette matrice est 1.

- 3 - En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q . On sait par la partie précédente que 1 est valeur propre et à pour espace propre le sous-espace vectoriel engendré par ${}^t \Pi$. D'après la question précédente et le théorème du rang, $\frac{-2}{10}$ est une autre valeur propre de Q ayant un espace propre associé de dimension 3. C'est donc l'unique autre valeur propre. Comme Q est symétrique réelle, le second espace propre est l'orthogonal de $\text{Vect}({}^t \Pi)$. On peut aussi remarquer

facilement, que ce second espace à pour base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

- 4 - Montrer que Q est diagonalisable dans une base orthonormée de \mathbb{R}^4 ayant pour premier vecteur $2{}^t \Pi$. On notera P la matrice de passage correspondante. Comme Q est symétrique réelle, on sait que Q est diagonalisable dans une base orthonormée de \mathbb{R}^4 . Comme l'espace propre associé à 1 est engendré par ${}^t \Pi$ et que la norme euclidienne de ${}^t \Pi$ vaut $1/2$, on peut prendre pour premier vecteur de cette base $2{}^t \Pi$.

- 5 - Montrer que

$$Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{10} \end{pmatrix} {}^t P.$$

La matrice P étant la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormée, il s'agit d'une matrice orthogonale et donc $P^{-1} = {}^t P$. La formule de changement de base permet de conclure.

6 - En déduire que $(Q^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π . Par une récurrence immédiate, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$Q^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} {}^tP.$$

Comme $|-2/10| < 1$ et en utilisant la propriété de la convergence d'un produit $\mathbf{I}-\mathbf{A}$, la suite $(Q^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$R = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP = 4 \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 & p_1p_4 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 & p_2p_4 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 & p_3p_4 \\ p_4p_1 & p_4p_2 & p_4p_3 & p_4^2 \end{pmatrix} = 4 {}^t\Pi\Pi$$

(Ci-dessus, on utilise le fait que la première colonne de P vaut $2 {}^t\Pi$.)

7 - Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $Q^p - R = \left(-\frac{2}{10}\right)^p P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP$. Soit $p \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} Q^p - R &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} {}^tP - P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tP \\ &= P \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) {}^tP \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{-2}{10}\right)^p \end{pmatrix} {}^tP \\ &= \left(-\frac{2}{10}\right)^p P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP. \end{aligned}$$

8 - En déduire qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on ait

$$\|Q^p - R\| = O(r^p).$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\|Q^p - R\| = \left| \left(-\frac{2}{10} \right)^p \right| \left\| P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tP \right\|$$

et donc

$$\|Q^p - R\| = O\left(\left(\frac{2}{10}\right)^p\right).$$

- 9** - En utilisant les questions **A-1** et **B-6**, montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu. *En utilisant la propriété de la convergence d'un produit I-A, on en déduit à l'aide de A-1 et B-6 que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P_0 4^{\text{tIII}}$. Or, $P_0 {}^t\Pi = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(X_0 = i) = \frac{1}{4}$ et donc*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \Pi.$$

Ainsi, quand n tend vers $+\infty$ on a autant de chance de se retrouver sur chaque point et cela quelle que soit la position initiale. (De plus, d'après la question précédente la convergence est rapide quelle que soit cette position initiale.)

PARTIE IV : Puissances d'une matrice stochastique

Soit n un entier naturel non nul et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}.$$

Pour tout entier naturel non nul p , on note $a_{ij}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i, j) de A^p :

$$A^p = \left(a_{ij}^{(p)} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n , on note :

$$m_j^{(p)} = \min_{1 \leq k \leq n} a_{kj}^{(p)}, \quad M_j^{(p)} = \max_{1 \leq k \leq n} a_{kj}^{(p)}.$$

1 - Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

Fixons pour cette question et les deux suivantes, un entier naturel non nul p et un entier $j \in \{1, \dots, n\}$. Comme A est stochastique, on a

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_{kj}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{ij}^{(p)} \leq \sum_{i=1}^n a_{ki} M_j^{(p)} = M_j^{(p)}.$$

En passant au maximum sur k , on en déduit que

$$M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

De même

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_{kj}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{ij}^{(p)} \geq \sum_{i=1}^n a_{ki} m_j^{(p)} = m_j^{(p)}.$$

En passant au minimum sur k , on en déduit que

$$m_j^{(p+1)} \geq m_j^{(p)}.$$

$m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)}$ est immédiat (minimum plus petit que maximum). Comme A et toutes ses puissances sont strictement stochastiques, tous les coefficients sont strictement positifs et $m_j^{(p)} > 0$. Finalement

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

2 - Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m \left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \right).$$

On note k un indice tel que $a_{kj}^{(p+1)} = m_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} &= a_{kj}^{(p+1)} - m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{ij}^{(p)} - \sum_{i=1}^n a_{ki} m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{ki}}_{\geq m} \underbrace{(a_{ij}^{(p)} - m_j^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^n (a_{ij}^{(p)} - m_j^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont positifs ou nuls, et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$. Ainsi,

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).$$

De même, on note ℓ un indice tel que $a_{\ell j}^{(p+1)} = M_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} &= M_j^{(p)} - a_{\ell j}^{(p+1)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{\ell i} M_j^{(p)} - \sum_{i=1}^n a_{\ell i} a_{ij}^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{\ell i}}_{\geq m} \underbrace{(M_j^{(p)} - a_{ij}^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^n (M_j^{(p)} - a_{ij}^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont positifs ou nuls, et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$. Ainsi,

$$M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).$$

3 - Majoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n , on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m) (M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned} M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} &= M_j^{(p+1)} - M_j^{(p)} \\ &+ M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \\ &+ m_j^{(p)} - m_j^{(p+1)} \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré avec la seconde inégalité de la question précédente. Le troisième est majoré grâce à la première inégalité. On obtient

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1 - 2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).$$

4 - Convergence de ces suites

En déduire que, pour tout entier j compris entre 1 et n , les suites $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. *Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Remarquons que $0 = m_j^{(0)} < m_j^{(1)} \leq M_j^{(1)} < M_j^{(0)} = 1$ et que l'on a donc également*

$$M_j^{(1)} - m_j^{(1)} \leq (1 - 2m)(M_j^{(0)} - m_j^{(0)}) = 1 - 2m.$$

Notons de plus que cette inégalité entraîne que $1 - 2m \geq 0$.

La question 1 montre que $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante alors que $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ décroît. Comme $1 - 2m \geq 0$, la question précédente donne par récurrence, que pour tout $p \geq 0$,

$$0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq (1 - 2m)^p (M_j^{(0)} - m_j^{(0)});$$

Enfin, comme $m > 0$, on a $|1 - 2m| < 1$ et ainsi, $(1 - 2m)^p \rightarrow 0$. On en déduit que $M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \rightarrow 0$ et les suites sont adjacentes.

5 - Conclusion

En déduire que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques. *Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, notons c_j la limite commune à $(M_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(m_j^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$. Comme $m_j^{(p)} \leq a_{k,j}^{(p)} \leq M_j^{(p)}$ pour tout k , tous les coefficients de la colonne j dans la suite (A^p) tendent vers c_j . (A^p) converge donc vers la matrice L dont toutes les lignes valent (c_1, \dots, c_n) . Comme A^p est stochastique pour tout p , L l'est aussi.*