
SUJET BLANC N°3

Durée : 5 heures.

Ce sujet est constitué de deux parties **indépendantes** :

- ***Partie I :*** Autour d'un théorème de Mertens (inspiré du CAPES 2008).
- ***Partie II :*** Intégration numérique.

Dans chacune des parties, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, en veillant à clairement l'indiquer.

PARTIE I : Autour d'un théorème de Mertens

Notations et rappels

- On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs.
- Si E désigne un ensemble fini, on note $\#E$ le cardinal de cet ensemble, c'est à dire le nombre d'éléments de E.
- Si x désigne un réel, on notera $[x]$ sa partie entière, c'est à dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; autrement dit, $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant :

$$[x] \leq x < [x] + 1\,.$$

- Dans tout l'énoncé, la lettre p désignera toujours, et exclusivement un nombre premier, ceci y compris lorsque la lettre p sera utilisée comme symbole d'indice d'une somme ou d'un produit. Par exemple, la notation $\displaystyle\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ désigne la somme des inverses des nombres premiers inférieurs ou égaux au réel x.
- Étant donnés un entier $n \geq 1$ et un nombre premier p, on appelle *valuation p-adique* de n l'entier noté $v_p(n)$ et égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n. Par exemple, si l'on prend $n = 350 = 2 \times 5^2 \times 7$, on a $v_2(350) = 1$, $v_3(350) = 0$, $v_5(350) = 2$, $v_7(350) = 1$ et $v_p(350) = 0$ pour tout nombre premier $p \geq 11$.
  On admet les propriétés élémentaires suivantes :
  - $v_p(n)$ est l'entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n.
  - Pour tout $n \geq 1$ fixé, la suite $(v_p(n))_{p\in\mathcal{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire $n = \displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(n)}$ (ce produit pouvant alors être considéré comme un produit fini). Cette écriture n'est alors rien d'autre que la décomposition en facteurs premiers de l'entier n.
  - Pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathcal{P}$, on a :

$$v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)\,.$$

  Aucune preuve de ces trois résultats n'est demandée aux candidats.

A - Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de n !

On considère un entier $n \geq 2$ et un nombre premier p. Pour tout entier $k \geq 0$, on considère les sous-ensembles finis U_k, V_k et Ω_k de $\mathbb{N}$ définis par :

$$\begin{array}{ll} U_k & = \left\{a \in \{1, \cdots, n\} \mid p^k \text{ divise } a\right\} \\ V_k & = \left\{a \in \{1, \cdots, n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a\right\} \\ \Omega_k & = \{a \in \{1, \cdots, n\} \mid v_p(a) = k\} \end{array}$$

1 - Justifier qu'il existe un plus petit entier $k_0 \geq 0$ tel que $n < p^{k_0}$. Montrer que $k_0 \geq 1$ et expliciter k_0 en fonction de n et p.

2 - (a) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \cdots, k_0 - 1\}$, l'ensemble U_{k+1} est strictement inclus dans U_k et que pour $k \geq k_0$ on a $U_k = \emptyset$.
Indication : Pour l'inclusion stricte, on pourra considérer l'entier $a = p^k$.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \cdots, k_0 - 1\}$, l'ensemble V_k est strictement inclus dans V_{k+1} et que pour $k \geq k_0$ on a $V_k = \{1, \cdots, n\}$.

(c) (i) On suppose $k_0 \geq 2$. Montrer que les ensembles $\Omega_0, \cdots, \Omega_{k_0-1}$ sont disjoints.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde.

(ii) Soit $a \in \{1, \cdots, n\}$. Montrer que $v_p(a) \leq k_0 - 1$.

(iii) En déduire que la famille de parties $\{\Omega_0, \cdots, \Omega_{k_0-1}\}$ forme une partition de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$.

3 - (a) Pour tout $k \geq 0$, établir que $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$.

(b) Calculer, pour tout $k \geq 0$, $\#U_k$ et $\#V_k$ en fonction de n et p.
Indication : on remarquera que $\#U_k$ est le nombre de multiples de p^k parmi les éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, c'est à dire : $\#\left\{q \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq qp^k \leq n\right\}$.

(c) En déduire que $\#\Omega_k = \left[\dfrac{n}{p^k}\right] - \left[\dfrac{n}{p^{k+1}}\right]$ pour tout $k \geq 0$.
Indication : on pourra d'abord montrer que $\Omega_k = U_k \setminus U_{k+1}$.

4 - (a) Montrer que $v_p(n!) = \displaystyle\sum_{a=1}^{n} v_p(a)$.
Indication : utiliser les propriétés de la valuation p-adique, énoncées au début de cette partie.

(b) En déduire que

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 0} k \# \Omega_k .$$

Indication : la famille d'ensembles $\{\Omega_0, \cdots, \Omega_{k_0-1}\}$ formant une partition de $\{1, \cdots, n\}$, toute somme $\displaystyle\sum_{a=1}^{n}$ peut formellement s'écrire sous la forme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k_0-1} \sum_{a \in \Omega_k}$.

(c) En déduire la **Formule de Legendre :**

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right] .$$

B - Un théorème de Mertens

Dans toute cette partie, on considère un entier $n \geq 2$.

1 - Prouver que pour tout $p \in \mathcal{P}$ on a

$$\frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \le \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}\,.$$

*Indication : on pourra utiliser l'encadrement $x - 1 < [x] \le x$ valable pour tout réel x, et la formule de Legendre établie au **4-(c)**.*

2 - **(a)** Soit p un diviseur premier de $n!$. Montrer qu'il divise l'un des éléments de $[\![1, n]\!]$.

(b) En déduire que $v_p(n!) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ vérifiant $p > n$.

(c) Montrer que $n! = \prod\limits_{p \le n} p^{v_p(n!)}$.

(d) En utilisant **1-** et **2-(c)**, montrer que

$$n\sum_{p\le n}\frac{\ln(p)}{p} - \sum_{p\le n}\ln(p) < \ln(n!) \le n\sum_{p\le n}\frac{\ln(p)}{p} + n\sum_{p\le n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}\,.$$

3 - **(a)** Calculer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{k\ge 0}\frac{x^k}{2^k}$, et déterminer sa série dérivée.

(b) Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{k\ge 0}\frac{x^k}{2^k}$. Donner l'expression analytique de f et de f'.

(c) Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{r\ge 0}\frac{r}{2^r}$ et prouver que $\sum\limits_{r\ge 0}\frac{r}{2^r} = 2$.

4 - **(a)** Pour tout entier $r \ge 1$, montrer que $\sum\limits_{2^{r-1}<m\le 2^r}\frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{2^r}$.

Indication : on pourra mettre $\frac{1}{m(m-1)}$ sous la forme $\frac{a}{m} + \frac{b}{(m-1)}$ avec a, b réels.

(b) En déduire que si l'on pose $U_r = \sum\limits_{2^{r-1}<m\le 2^r}\frac{\ln(m)}{m(m-1)}$ pour tout entier $r \ge 1$, alors on a $U_r \le \frac{r}{2^r}\ln(2)$.

(c) Montrer que la série $\sum\limits_{r\ge 1}U_r$ converge. Donner un majorant de $\sum\limits_{r=1}^{+\infty}U_r$.

(d) Justifier rapidement que $\lim\limits_{m\to\infty} m^{3/2}\frac{\ln(m)}{m(m-1)} = 0$. En déduire que la série $\sum\limits_{m\ge 2}\frac{\ln(m)}{m(m-1)}$ est convergente.

(e) Montrer que l'on a :

$$\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{\ln(m)}{m(m-1)} \le \ln(4)\,.$$

Indication : utiliser $\sum\limits_{m=2}^{+\infty}\frac{\ln(m)}{m(m-1)} = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{r=1}^{k}\left(\sum\limits_{m=2^{r-1}+1}^{2^r}\frac{\ln(m)}{m(m-1)}\right)$.

5 - **(a)** Montrer que l'on a : $1 - \frac{1}{2n} \le n\ln(1+\frac{1}{n}) \le 1$ et $\ln(1+\frac{1}{n}) \ge \frac{1}{2n}$.
Indication : on commencera par déterminer pour quels réels positifs u on a les inégalités $u - u^2/2 \le \ln(1+u) \le u$.

On note à présent $\mathbb{P}(n)$ la propriété suivante :

"*Il existe un réel* $\theta_n \in [0,1]$ *tel que* $\ln(n!) = n\ln(n) - n + 1 + \theta_n \ln(n)$".

On cherche à établir ce résultat par récurrence sur $n \geq 2$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(2)$ est vraie.

(c) On suppose $\mathbb{P}(n)$ vraie. On note θ_{n+1} l'entier vérifiant la relation :

$$\theta_{n+1}\ln(n+1) = \ln((n+1)!) - ((n+1)\ln(n+1) - (n+1) + 1)\ .$$

Montrer que $\theta_{n+1}\ln(n+1) = 1 - n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \theta_n \ln(n)\,.$

(d) En déduire que $\theta_{n+1} \geq 0$.
Indication : on pourra utiliser ***5-(a)****.*

(e) Monter que $\theta_{n+1} \leq 1$. Conclure.

6 - (a) Montrer que $n\ln(n) - n + 1 \leq \ln(n!) \leq n\ln(n) - n + 1 + \ln(n)\,.$

(b) Prouver, en utilisant les questions **2-(d)** et **4-(e)**, que :

$$\ln(n) - (1+\ln(4)) < \sum_{p\leq n} \frac{\ln(p)}{p}\,.$$

7 - (a) Dans cette question, on admettra le résultat suivant : $\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$.

En utilisant les questions **2-(d)** et **6-(a)**, montrer que :

$$\sum_{p\leq n} \frac{\ln(p)}{p} < \ln(n) + \ln(4) - 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n}\,.$$

(b) Monter que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est majorée par $\dfrac{1}{e}$ sur $[1,+\infty]$.

(c) En déduire que :

$$\sum_{p\leq n} \frac{\ln(p)}{p} < \ln(n) + \ln(4)\,.$$

(d) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{p\leq n} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(n)\right)_{n\geq 2}$ est bornée.

PARTIE II : Intégration numérique

Notations et rappels

- Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- Si $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
- Un vecteur $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- Étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[a,b]$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifiera les fonctions polynomiales définies sur un intervalle $[a,b]$ avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On considère ainsi $\mathbb{R}[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([a,b])$.
- Étant donnés un entier $n \geq 2$ et $a_1, \cdots, a_n$, n éléments de $\mathbb{R}$, on pose :

$$M(a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

  communément appelée **matrice de Vandermonde**.
  On admettra le résultat suivant :

$$W(a_1, \cdots, a_n) := \det(M(a_1, \cdots, a_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

  En particulier, $\det(M(a_1, \cdots, a_n)) \neq 0$ si et seulement si les $a_1, \cdots, a_n$ sont tous distincts.
- Enfin, on adoptera la convention $M(a) = 1$ pour tout réel a.

A - Généralités

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et deux réels a, b tels que $a < b$.
On considère une fonction réelle f définie et continue sur un intervalle $[a,b]$. On pose $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
On cherche une approximation de $I(f)$, notée $J(f)$, sous la forme suivante :

$$J(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

où les $(x_k)_{k=0,\cdots,n}$ sont $n+1$ points distincts de $[a,b]$ vérifiant

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$$

(communément appelés **points d'intégration**) et les $(\lambda_i)_{i=0,\cdots,n}$ sont des réels (communément appelés **poids d'intégration**). La méthode d'approximation est dite **d'ordre n** si $I(P) = J(P)$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n.

On dit dans ce cas que J est une **formule d'intégration d'ordre n aux points d'intégration** $(x_0, \cdots, x_n)$.

1 - Montrer que I et J sont des applications linéaires du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$.

2 - Justifier rapidement que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension finie. Quelle est sa dimension ?

3 - Montrer que $I_{|\mathbb{R}_n[X]} = J_{|\mathbb{R}_n[X]}$ si et seulement si I et J coïncident sur les polynômes $X^i : x \longmapsto x^i$ pour tout $i = 0, \cdots, n$.

4 - **(a)** Calculer $I(X^0)$ et $J(X^0)$. En déduire que $I(X^0) = J(X^0) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = (b-a)$.

(b) Calculer $I(X^i)$ et $J(X^i)$ pour tout $i = 1, \cdots, n$.

(c) Montrer que la condition : $I(X^i) = J(X^i)$ pour tout $i = 0, \cdots, n$ équivaut à :

$$ {}^t M(x_0, \cdots, x_n). \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \vdots \\ \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}, \qquad (1) $$

où $M(x_0, \cdots, x_n)$ est la matrice de Vandermonde de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, définie dans le préambule de la **Partie II.** En déduire que la formule J est une formule d'intégration d'ordre n aux points $x_0, \cdots, x_n$ si et seulement si les $(\lambda_i)_{i=0,\cdots,n}$ sont solution de (1).

5 - En déduire l'existence et l'unicité d'une formule d'intégration d'ordre n aux points d'intégration $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$. *(On pourra utiliser les rappels sur le déterminant de la matrice de Vandermonde).*

6 - ***Application aux formules d'intégration classiques :*** L'objectif ici est de déterminer la formule d'intégration d'ordre n associée à des exemples classiques de choix de n points dans l'intervalle $[a, b]$.

Méthode des rectangles

(a) On pose $n = 0$ et $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.
Utiliser la formule (1) pour retrouver la formule du rectangle (pour la matrice de Vandermonde de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, on adoptera la convention $M(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$ J(f) = (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right). $$

Méthode de Simpson

(b) On considère le cas $n = 2$ avec $a = x_0 = 0, x_1 = \dfrac{1}{2}$ et $b = x_2 = 1$.
Utiliser (1) pour retrouver la formule de Simpson :

$$ J(f) = \left[\frac{1}{6} f(0) + \frac{4}{6} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} f(1)\right]. $$

(c) On se place sur un intervalle $[a, b]$ quelconque. On considère $f \in \mathcal{C}([a, b])$ et la transformation affine $\phi : x \in [0, 1] \longmapsto a + x(b - a)$. Montrer que

$$ \int_a^b f(t)dt = (b-a) \int_0^1 g(x)dx, $$

où l'on a posé $g = f \circ \phi$. En déduire une généralisation de la formule précédente.

B - Erreur d'approximation

On rappelle ici que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$, on note par

$$ I(f) = \int_a^b f(t)dt, $$

l'intégrale de f entre a et b, et

$$ J(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x_k) $$

la formule d'intégration d'ordre n aux points $x_0, \cdots, x_n$ qui lui est associée.
On cherche à présent à estimer l'erreur d'approximation. On note :

$$ E(f) = I(f) - J(f). $$

1 - Justifier rapidement que $E : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathbb{R}$ est linéaire.

2 - On note respectivement par E_R et E_S les applications obtenues en utilisant les formules d'approximation établies au **6 -(a)** et **6 -(b)**.

(a) Calculer $E_R(X)$ et $E_R(X^2)$. En déduire l'ordre exact de la méthode des rectangles.

(b) On travaille ici sur l'intervalle $[0,1]$. Calculer $E_S(X^3)$ et $E_S(X^4)$. En déduire l'ordre exact de la méthode de Simpson.

3 - Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$, on a $E_R(f) = E_R(r)$, où r est la fonction de $\mathcal{C}([a,b])$ définie par :

$$r(x) = \int_a^x (x-t)f''(t)dt \quad , \quad x \in [a,b]\,.$$

Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour $x \in [a,b]$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt\,.$$

On se place à présent sur l'intervalle $[a,b] = [0,1]$, et on s'intéresse aux fonctions de deux variables continues sur $[0,1]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$h: \begin{array}{ccl} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\;x\;,\;t\;) & \longmapsto & h(x,t) \end{array}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$ fixé, on notera $h(\cdot,t)$ la fonction qui à tout $x \in [0,1]$ associe le réel $h(x,t)$.

On admettra enfin que $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 h(x,t)dtdx = \int_0^1\int_0^1 h(x,t)dxdt$ pour toute fonction continue $h : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ (théorème de Fubini).

4 - Montrer que $\displaystyle\int_0^1 E_R(h(\cdot,t))dt = E_R(g)$, où g est la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 h(x,t)dt$ pour tout $x \in [0,1]$.

5 - Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. On considère la fonction :

$$u(x,t) : \begin{array}{ccl} [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\;x\;,\;t\;) & \longmapsto & (x-t)_+ = \left\{ \begin{array}{l} x-t \text{ si } x \geq t\,, \\ 0 \text{ sinon }. \end{array}\right. \end{array}$$

(a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\displaystyle\int_0^1 u(x,t)f''(t)dt = \int_0^x (x-t)f''(t)dt\,.$

(b) En déduire que $E_R(f) = E_R(g)$, où g est la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 u(x,t)f''(t)dt$ pour tout $x \in [0,1]$.

6 - Montrer que $E_R(f) = \displaystyle\int_0^1 E_R(u(\cdot,t))f''(t)dt$.

Indication : On pourra poser $h(x,t) = u(x,t)f''(t)$ et utiliser le résultat de la question (**4-**).

7 - Montrer que, pour $t \in [0,1]$:

$$K(t) := E_R(u(\cdot,t)) = \left\{ \begin{array}{ll} t^2/2 & \text{si } t \leq 1/2\,, \\ (1-t^2)/2 & \text{sinon }. \end{array}\right.$$

K est communément appelé **noyau de Péano** d'ordre 1 associé à la méthode.

8 - En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a :

$$|E_R(f)| \leq \frac{1}{24}\|f''\|_\infty\,.$$