

PARTIE I - Autour d'un théorème de Mertens

A - Une formule de Legendre sur la valuation p -adique de $m!$

1- Soit $k \in \mathbb{N}$. $p^k > m \Leftrightarrow k \ln(p) > \ln(m) \Leftrightarrow k > \frac{\ln(m)}{\ln(p)}$. L'entier k_0 cherché est donc le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{\ln(m)}{\ln(p)}$, c'est à dire : $k_0 = \left\lceil \frac{\ln(m)}{\ln(p)} \right\rceil + 1$.
 $p \geq m \Rightarrow \frac{\ln(m)}{\ln(p)} \geq 0$; on en déduit $\left\lceil \frac{\ln(m)}{\ln(p)} \right\rceil \geq 0$ et donc $k_0 \geq 1$.

2- (a) Soit $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$.
 • Soit $\alpha \in U_{k+1}$. Alors p^{k+1} divise α , et donc p^k divise α . Ainsi $\alpha \in U_k$.
 On en déduit $U_{k+1} \subset U_k$.
 • D'autre part, $p^k \in U_k$, et p^{k+1} ne divise pas p^k , c'est à dire $p^k \notin U_{k+1}$.
 On en déduit l'inclusion stricte.
 • Soit $k \geq k_0$. Par définition de k_0 , $p^{k_0} > m$. Donc $p^k \geq p^{k_0} > m$ et p^k ne peut diviser aucun des éléments de $\{1, \dots, m\}$. En d'autres termes, $U_k = \emptyset$.

(b) Notons que $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $V_k = \overline{U_k}$. On déduit alors le résultat de la question (a).

(c) (i) On suppose $k_0 \geq 2$. Supposons que les $(\Omega_i)_{i=0, \dots, k_0-1}$ ne soient pas disjointes. Alors il existe $k_1, k_2 \in \{0, \dots, k_0-1\}$ tels que $k_1 \neq k_2$ et $\Omega_{k_1} \cap \Omega_{k_2} \neq \emptyset$. Considérons alors un entier α dans cette intersection. Alors $v_p(\alpha) = k_1$ et $v_p(\alpha) = k_2$, et donc $k_1 = k_2$, ce qui est absurde. On en déduit que les $(\Omega_i)_{i=0, \dots, k_0-1}$ sont deux à deux disjointes.

(ii) Soit $\alpha \in \{1, \dots, m\}$. Par définition, $p^{v_p(\alpha)}$ divise α .
 $v_p(\alpha) \geq k_0 \Rightarrow p^{k_0} \mid \alpha \Rightarrow p^{k_0} > m$. Donc si $v_p(\alpha)$ est supérieur ou égal à k_0 , $p^{v_p(\alpha)}$ ne peut diviser α . Ainsi, on a $v_p(\alpha) \leq k_0$.

(iii) On déduit de ce qui précède que les $(\Omega_i)_{i=0, \dots, k_0-1}$ sont disjointes et que pour tout $\alpha \in \{0, \dots, m-1\}$ on a $0 \leq v_p(\alpha) \leq k_0-1$. Ainsi, pour tout $\alpha \in \{1, \dots, m\}$, il existe un unique $k \in \{0, \dots, k_0-1\}$ tel que $\alpha \in \Omega_k$. D'autre part, on a $\Omega_k \subset \{1, \dots, m\}$ pour tout $k \in \{0, \dots, k_0-1\}$. On déduit de ceci que $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{k_0-1}\}$ forme une partition de $\{1, \dots, m\}$.

3- (a) Soit $k \geq 0$. On a : $\alpha \in \Omega_k \Leftrightarrow v_p(\alpha) = k \Leftrightarrow p^k \mid \alpha$ et $p^{k+1} \nmid \alpha$
 $\Leftrightarrow \alpha \in U_k$ et $\alpha \notin U_{k+1}$
 $\Leftrightarrow \alpha \in U_k \cap V_{k+1}$
 Donc $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$

3- (b). Soit $k \geq 0$. U_k est l'ensemble des éléments de $\{1, \dots, m\}$ tels que p^k divise a . (2)

$$\text{Ainsi: } U_k = \{a \in \{1, \dots, m\} \mid \exists q \in \mathbb{N}, a = qp^k\}.$$

$$\text{Donc } \#U_k = \# \{q \in \mathbb{N}^*, 1 \leq qp^k \leq m\}. \text{ Or: } 1 \leq qp^k \leq m \Leftrightarrow \frac{1}{p^k} \leq q \leq \frac{m}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leq q \leq \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor \text{ (car } q \in \mathbb{N})$$

$$\text{On en déduit: } \# \{q \in \mathbb{N}^*, 1 \leq qp^k \leq m\} = \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor, \text{ d'où le résultat.}$$

• V_k étant le complémentaire de U_k dans $\{1, \dots, m\}$ (de cardinal m), on en tire:
 $\#V_k = m - \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor.$

(c) Soit $k \geq 0$. On voit que $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1} = U_k \cap \overline{U_{k+1}} = U_k \setminus U_{k+1}.$

D'autre part, U_{k+1} ÉTANT INCLUS DANS U_k , on en déduit:

$$\# \Omega_k = \#U_k - \#U_{k+1} = \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^{k+1}} \right\rfloor.$$

4- (a) $N_p(m!) = N_p\left(\prod_{a=1}^m a\right) = \sum_{a=1}^m N_p(a)$

$$\Omega_k = \emptyset \quad \forall k \geq k_0$$

(b) $N_p(m!) = \sum_{a=1}^m N_p(a) = \sum_{k=1}^{k_0-1} \left(\sum_{a \in \Omega_k} N_p(a) \right) = \sum_{k=1}^{k_0-1} \left(\sum_{a \in \Omega_k} k \right) = \sum_{k=1}^{k_0-1} k \# \Omega_k \xrightarrow{\substack{\uparrow \\ \text{\tiny } \{ \Omega_0, \dots, \Omega_{k_0-1} \} \text{ partition de } \{1, \dots, m\} \\ \text{\tiny } N_p(a)=k \Leftrightarrow a \in \Omega_k}} = \sum_{k \geq 0} k \# \Omega_k$

(c) Rappelons que la somme obtenue ci-dessus est une somme finie; les sommes ci-dessous sont donc bien définies.

$$\begin{aligned} N_p(m!) &= \sum_{k \geq 0} k \left(\left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{k \geq 0} k \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k \geq 0} k \left\lfloor \frac{m}{p^{k+1}} \right\rfloor \\ &= \sum_{k \geq 1} k \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k \geq 1} (k-1) \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor. \end{aligned}$$

B - Un théorème de Mertens

(3)

1- Soit $p \in \mathcal{P}$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left[\frac{m}{p^k} \right] \leq \frac{m}{p^k}$.

$$\text{Ainsi: } \nu_p(m!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{m}{p^k} \right] \leq \sum_{k \geq 1} \frac{m}{p^k} = \frac{m}{p} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^k} = \frac{m}{p} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) = \frac{m}{p-1}$$

Un calcul élémentaire donne $\frac{m}{p} + \frac{m}{p(p-1)} = \frac{m}{p-1}$, d'où la première inégalité.

D'autre part, on a $\sum_{k \geq 1} \left[\frac{m}{p^k} \right] \geq \left[\frac{m}{p} \right] > \frac{m}{p} - 1$.

$$\text{On obtient donc: } \frac{m}{p} - 1 < \nu_p(m!) \leq \frac{m}{p} + \frac{m}{p(p-1)} \quad (*)$$

2- (a) On effectue une récurrence sur $j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

• Pour $j=2$, on a $j! = 2$. Donc $p \nmid j! \Rightarrow p \nmid j$ et le résultat est vrai.

• Supposons la propriété vraie au rang m .

Soit p un diviseur premier de $(j+1)!$. On a $p \mid (j+1)!$, donc le théorème de Gauss donne: $p \mid (j+1)$ ou $p \mid j!$.

En utilisant l'hyp. de récurrence, p divise l'un des éléments de $\{1, \dots, j+1\}$. Ceci permet de conclure.

(b) Soit p premier vérifiant $p > m$. p ne divise aucun des éléments de $\{1, \dots, m\}$. D'après ce qui précède, il ne peut diviser $m!$. Donc $\nu_p(m!) = 0$.

(c) D'après les résultats préliminaires, on a: $m! = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(m!)}$.

D'après ce qui précède, $\nu_p(m!) = 0 \forall p > m$. Il en résulte que $m! = \prod_{p \leq m} p^{\nu_p(m!)}$.

(d) En utilisant (c), on a $\ln(m!) = \sum_{p \leq m} \nu_p(m!) \ln(p)$.

Par suite, avec (*):

$$\bullet \ln(m!) \leq \sum_{p \leq m} \left(\frac{m}{p} + \frac{m}{p(p-1)} \right) \ln(p) = m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} + m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$$

$$\bullet \ln(m!) > \sum_{p \leq m} \ln(p) \left(\frac{m}{p} - 1 \right) = m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{p \leq m} \ln(p)$$

3- (a) Considérons la série entière $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{2^k}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{2^{k+1}} / \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$. D'après le critère de d'Alembert, le rayon de CR est 2. On pose donc, pour tout $x \in]-2, 2[$, $f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{2^k}$, et $f'(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{k x^{k-1}}{2^k} = \sum_{k \geq 0} \frac{(k+1)}{2^{k+1}} x^k$ ($R=2$ est aussi le rayon de CR de la série dérivée).

(b) Montrons que pour tout $x \in]-2, 2[$, on a $f(x) = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{x}{2} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$; on en déduit que $\forall x \in]-2, 2[, f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}$.

(c) En utilisant 3-(a), on a $f'(1) = \sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^k}$, et d'après 3-(b), $f'(1) = \frac{2}{(2-1)^2} = 2$.

On en déduit immédiatement que la série $\sum_{n \geq 0} n 2^n$ CR, et la somme vaut 2.

4- (a) Soit $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On vérifie aisément que $\frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$.

$$\text{Soit } n \geq 1. \text{ On a donc: } \sum_{2^{n-1} < m \leq 2^n} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{2^{n-1} < m \leq 2^n} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}.$$

(Somme télescopique)

4-(b) Soit $n \geq 1$. On a: $2^{n-1} < m \leq 2^n \Rightarrow \ln(2^{n-1}) < \ln(m) \leq \ln(2^n)$ (croissance de $\ln$). (4)

Il vient: $U_n = \sum_{2^{n-1} < m \leq 2^n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leq \sum_{2^{n-1} < m \leq 2^n} \frac{\ln(2^n)}{m(m-1)} = \ln(2^n) \sum_{2^{n-1} < m \leq 2^n} \frac{1}{m(m-1)}$.

Donc $U_n \leq \ln(2^n) \times \frac{1}{2^n} = n \frac{\ln(2)}{2^n}$.

(c) D'après ce qui précède, on a $U_n \leq n \frac{\ln(2)}{2^n}$ pour tout $n \geq 1$. De plus, la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge, et sa somme vaut 2 (cf 3-(c)).

On en déduit que la série de terme général U_n converge, et:

$$\sum_{n \geq 1} U_n \leq \ln(2) \sum_{n \geq 1} n \frac{1}{2^n} = 2 \ln(2) = \ln(4).$$

(d) Soit $m \geq 2$. On a $m^{3/2} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} = \frac{\ln(m) \sqrt{m}}{(m-1)}$. On en déduit que $\frac{m^{3/2} \ln(m)}{m(m-1)} \sim \frac{\ln(m)}{\sqrt{m}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.

Donc $\frac{\ln(m)}{m(m-1)} = o(m^{-3/2})$. Or, $m^{-3/2}$ est le terme général d'une série convergente, ce qui permet de conclure.

(e) On sait que la série $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln(m)}{m(m-1)}$ converge. On a:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left(\sum_{m=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m U_n = \sum_{n \geq 1} U_n \leq \ln(4).$$

5-(a) On considère les fonctions $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $u \mapsto \ln(1+u) - (u - u^2/2)$ et $u \mapsto u - \ln(1+u)$.

Une étude de fonctions basique donne $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sur $[0, 1]$, et donc:

$$\forall u \in [0, 1], u - u^2/2 \leq \ln(1+u) \leq u.$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{1}{m} \in [0, 1]$, et donc $\frac{1}{m} - \left(\frac{1}{m}\right)^2 \times \frac{1}{2} \leq \ln(1 + \frac{1}{m}) \leq \frac{1}{m}$,

d'où l'on tire: $1 - \frac{1}{2m} \leq m \ln(1 + \frac{1}{m}) \leq 1$.

D'autre part, $\frac{1}{2m^2} \leq \frac{1}{2m}$, et donc $\ln(1 + \frac{1}{m}) \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m}$, d'où le résultat.

(b) On considère le cas $m=2$. On a $Q_2 = \frac{1}{\ln(2)} [\ln(2!) - (2 \ln(2) - 2 + 1)] = \frac{\ln(2) - 2 \ln(2) + 1}{\ln(2)}$

Donc $Q_2 = \frac{1}{\ln(2)} - 1 \in [0, 1]$. Donc $P(2)$ est vraie.

(c) Supposons $P(m)$ vraie. On a $\ln(m+1) = \ln((m+1)!) - [(m+1) \ln(m+1) - (m+1) + 1]$
 $= \ln(m+1) + \ln(m!) - (m+1) \ln(m+1) + m$
 $= \ln(m+1) - m + 1 + Q_m \ln(m) - m \ln(m+1) + m$
 $= 1 - m(\ln(m+1) - \ln(m)) + Q_m \ln(m)$
 $= 1 - m \ln(1 + \frac{1}{m}) + Q_m \ln(m).$

(d) $Q_{m+1} = \frac{1 - m \ln(1 + \frac{1}{m}) + Q_m \ln(m)}{\ln(m+1)}$. Or, d'après 5-(a), $m \ln(1 + \frac{1}{m}) - 1 \leq 0$.

On en déduit: $Q_{m+1} \geq \frac{Q_m \ln(m)}{\ln(m+1)} \geq 0$.

(e) D'après 5-(a), on a aussi $m \ln(1 + \frac{1}{m}) \geq 1 - \frac{1}{2m}$, et donc $1 - m \ln(1 + \frac{1}{m}) \leq \frac{1}{2m}$.
 Or, toujours d'après 5-(a), $\frac{1}{2m} \leq \ln(1 + \frac{1}{m})$.

On en déduit: $Q_{m+1} \leq \frac{\ln(1 + \frac{1}{m}) + Q_m \ln(m)}{\ln(m+1)} \leq \frac{\ln(\frac{m+1}{m}) + \ln(m)}{\ln(m+1)} = 1$.

On en déduit que $Q_{m+1} \in [0, 1]$, ce qui permet de conclure la récurrence.

6-(a) On a $\ln(m!) = m \ln(m) - m + 1 + O_m \ln(m)$ avec $O_m \in [0, 1]$.

(5)

m étant supérieur ou égal à 2, on en déduit que $\ln(m) \geq 0$, et par suite:

$$m \ln(m) - m + 1 \leq \ln(m!) \leq (m+1) \ln(m) - m + 1 \quad (*)$$

(b) 2-(d) donne: $\ln(m!) \leq m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} + m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}$.

4-(e) donne: $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leq \ln(4)$.

En utilisant (*), on a: $m \ln(m) - m + 1 \leq \ln(m!) \leq m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} + m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leq m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} + m \ln(4)$

D'où, en divisant par m : $\ln(m) - 1 - \ln(4) \leq \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p}$.

7-(a) 2-(d) donne: $m \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{p \leq m} \ln(p) < \ln(m!)$.

Il vient: $\sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} < \frac{1}{m} [\ln(m!) + \sum_{p \leq m} \ln(p)]$

Remarquons que, d'après le résultat admis dans la question:

$$\sum_{p \leq m} \ln(p) = \ln\left(\prod_{p \leq m} p\right) \leq \ln(4^m) = m \ln(4)$$

D'après 6-(a), on a aussi $\ln(m!) \leq m \ln(m) - m + 1 + \ln(m)$.

Il vient donc: $\sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} < \frac{1}{m} [m \ln(m) - m + 1 + \ln(m) + m \ln(4)] = \ln(m) + \ln(4) - 1 + \frac{1}{m} + \frac{\ln(m)}{m}$

(b) Déduire d'une simple étude de fonctions

(c) D'après (b), on a $-1 + \frac{1}{m} + \frac{\ln(m)}{m} \leq -1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0$, ce qui permet de conclure.

(d) En combinant 6-(b) et 7-(c), on a:

$$-(1 + \ln(4)) < \sum_{p \leq m} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(m) < \ln(4)$$

Ceci étant valable pour un entier naturel $m \geq 2$ quelconque, on en déduit le résultat.

A- Généralités:

1- Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ et $\mu \in \mathbb{R}$. On note $h = f + \mu g$.

$$\begin{aligned} \cdot \mathcal{I}(f + \mu g) &= \mathcal{I}(h) = \int_a^b h(t) dt = \int_a^b (f(t) + \mu g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \mathcal{I}(f) + \mu \mathcal{I}(g). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \mathcal{J}(f + \mu g) &= \mathcal{J}(h) = \sum_{k=0}^m \lambda_k h(x_k) = \sum_{k=0}^m \lambda_k (f(x_k) + \mu g(x_k)) = \sum_{k=0}^m \lambda_k f(x_k) + \mu \sum_{k=0}^m \lambda_k g(x_k) \\ &= \mathcal{J}(f) + \mu \mathcal{J}(g) \end{aligned}$$

2- Il est clair que cet ens. est stable par addition et mult. scalaire (à vérifier sur la copie).
Ensuite, tout polynôme admet une décomposition unique sur la base canonique $\{1, x, \dots, x^m\}$; $\mathbb{R}_m[x]$ est donc de dim. $m+1$.

3- Les restrictions de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ à $\mathbb{R}_m[x]$ sont deux app. lin. définies sur un e.v. de dim. finie.
Elles sont donc caractérisées par leurs valeurs sur les éléments de la base canonique.
On d'autres termes, $\mathcal{I}|_{\mathbb{R}_m[x]} = \mathcal{J}|_{\mathbb{R}_m[x]}$ si elles coïncident sur $\mathcal{B}$.

4- (a)
$$\left. \begin{aligned} \mathcal{I}(x^0) &= \mathcal{I}(1) = \int_a^b 1 dt = (b-a) \\ \mathcal{J}(x^0) &= \sum_{k=0}^m \lambda_k \cdot 1 = \sum_{k=0}^m \lambda_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\mathcal{I}(x^0) = \mathcal{J}(x^0) \Leftrightarrow (b-a) = \sum_{k=0}^m \lambda_k)$$

(b) Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.
$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x^i) &= \int_a^b t^i dt = \left[\frac{t^{i+1}}{i+1} \right]_a^b = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} \\ \mathcal{J}(x^i) &= \sum_{k=0}^m \lambda_k (x_k)^i \end{aligned}$$

(c) $\mathcal{I}(x^i) = \mathcal{J}(x^i) \quad \forall i=0, \dots, m \Leftrightarrow \sum_{k=0}^m \lambda_k (x_k)^i = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1} \quad \text{pour tout } i=0, \dots, m.$

Matriciellement:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & x_m \\ x_0^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^m & \dots & x_m^m \end{pmatrix}}_{{}^t M(x_0, \dots, x_m)} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \frac{b^3-a^3}{3} \\ \vdots \\ \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

D'après la question 3-, $\mathcal{J}$ est d'ordre m (i.e. $\mathcal{I}|_{\mathbb{R}_m[x]} = \mathcal{J}|_{\mathbb{R}_m[x]}$) si $\mathcal{I}(x^i) = \mathcal{J}(x^i)$ pour tout $i=0, \dots, m$, c'est-à-dire si (2) est satisfaite.

5. Étant donné $m+1$ points d'intégration $x_0, \dots, x_m$, la formule $\mathcal{J}$ sera d'ordre m si le vecteur $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ est solution de (2). D'après les rappels, $\det({}^t M) \neq 0$ car les $(x_i)_{i=0, \dots, m}$ sont distincts, ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution.

6. Application aux formules d'intégration classiques

(7)

(a) $m=0$; $x_0 = \frac{a+b}{2}$. On a $M=1$ et $\mathcal{I}(f) = \lambda_0 f(\frac{a+b}{2})$.

La formule (2) donne alors $\lambda_0 = b-a$.

On aboutit à $\mathcal{I}(f) = (b-a) f(\frac{a+b}{2})$.

(b) $m=2$; $x_0=0$
 $x_1=\frac{1}{2}$
 $x_2=1$. On a $M(x_0, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

La formule (2) donne : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On en tire : $\mathcal{I}(f) = [\frac{1}{6} f(0) + \frac{4}{6} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6} f(1)]$ après résolution du système précédent.

(c) La formule du 1^{er} degré de variables donne : $\int_a^b f(t) dt = (b-a) \int_0^1 g(x) dx$

avec $g = f \circ \phi$. D'après (b), la

formule de Simpson donne, pour g :

$$\mathcal{I}(g) = \frac{1}{6} [g(0) + 4g(\frac{1}{2}) + g(1)] .$$

$$= \frac{1}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] .$$

On en déduit la formule de Simpson pour l'approximation de l'intégrale d'une fonction sur $[a, b]$ quelconque :

$$\int_a^b f(t) dt \approx \left(\frac{b-a}{6}\right) [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$$

B. Erreur d'approximation :

1- E est linéaire en tant que somme d'applications linéaires.

$$2- (a) E_R(X) = \mathcal{I}(X) - \mathcal{I}(X) = \int_a^b t dt - (b-a) \left(\frac{a+b}{2}\right) = \left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b - \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = 0$$

$$E_R(X^2) = \mathcal{I}(X^2) - \mathcal{I}(X^2) = \int_a^b t^2 dt - (b-a) \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b - \frac{(b^2-a^2)(b+a)}{2}$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{b^2+ab-a^2-a^3}{2} \neq 0 .$$

On en déduit que la méthode des rectangles est d'ordre 1 (exactement).

$$(b) E_S(X) = \mathcal{I}(X^3) - \mathcal{I}(X^3) = \int_0^1 t^3 dt - \left[\frac{f(0)}{6} + \frac{4f(\frac{1}{2})}{6} + \frac{f(1)}{6}\right]$$

$$= \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{6} \times \frac{1}{2^3} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{4} - \frac{3}{12} = 0$$

$$E_S(X^4) = \mathcal{I}(X^4) - \mathcal{I}(X^4) = \int_0^1 t^4 dt - \left[\frac{f(0)}{6} + \frac{4}{6} f(\frac{1}{2}) + \frac{f(1)}{6}\right]$$

$$= \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{6} \times \frac{1}{2^4} + \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{5} - \frac{5}{24} \neq 0$$

On en déduit que la méthode de Simpson est d'ordre 3 (exactement)

3- Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. La formule de Taylor avec reste intégral donne, pour tout $x \in [a, b]$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \int_a^x (x-t) f''(t) dt$$

On en déduit que $f = l + r$ avec $l(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$ et

$$r(x) = \int_a^x (x-t) f''(t) dt , x \in [a, b]$$

Notons que l et $r \in \mathcal{C}^2([a, b])$ et que l est un polynôme d'ordre 1.

E_R étant linéaire, on a : $E_R(f) = E_R(l) + E_R(r)$. E_R étant d'ordre 1, on a $E_R(l) = 0$, ce qui donne le résultat.

$$\begin{aligned}
 4- \int_0^1 E_R(h(\cdot, t)) dt &= \int_0^1 \left[\mathcal{I}(h(\cdot, t)) - \mathcal{J}(h(\cdot, t)) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 h(x, t) dx - h\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] dt \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 h(x, t) dx dt - \int_0^1 h\left(\frac{1}{2}, t\right) dt \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 h(x, t) dx \right) dt - \int_0^1 h\left(\frac{1}{2}, t\right) dt \\
 &= \int_0^1 g(x) dx - g\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= E_R(g)
 \end{aligned}$$

(8)

$$5-(a) \text{ Soit } x \in [0, 1]. \quad \int_0^1 u(x, t) f''(t) dt = \int_0^1 (x-t)_+ f''(t) dt = \int_0^x (x-t)_+ f''(t) dt + \int_x^1 (x-t)_+ f''(t) dt$$

Si $t \geq x$, on a $x-t \leq 0$, donc $(x-t)_+ = 0$.

Si $t \leq x$, on a $x-t \geq 0$ et $(x-t)_+ = x-t$.

$$\text{Il vient: } \int_0^1 (x-t)_+ f''(t) dt = \int_0^x (x-t) f''(t) dt + \int_x^1 0 \cdot f''(t) dt = \int_0^x (x-t) f''(t) dt$$

(b) La question 3- appliquée à $[a, b] = [0, 1]$ donne dans un premier temps:

$$E_R(f) = E_R(n), \text{ où } n: x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x (x-t) f''(t) dt.$$

D'autre part, la question précédente donne $n = g$, d'où le résultat.

$$6- \text{ On voit que } E_R(f) = E_R(g), \text{ où } g: x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 u(x, t) f''(t) dt.$$

$$\text{On définit alors } h: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ de sorte que } g(x) = \int_0^1 h(x, t) dx.$$

$$(x, t) \longmapsto u(x, t) f''(t)$$

D'après la question 4-, on voit que $\int_0^1 E_R(h(\cdot, t)) dt = E_R(g)$, c à d:

$$E_R(g) = \int_0^1 E_R(u(\cdot, t) f''(t)) dt.$$

Notons qu'à t fixé, on a $E_R(u(\cdot, t) f''(t)) = E_R(u(\cdot, t)) f''(t)$ par linéarité de E_R .

Il vient: $E_R(g) = \int_0^1 E_R(u(\cdot, t)) f''(t) dt$, d'où le résultat.

$$7- \text{ Soit } t \in [0, 1]. \quad E_R(u(\cdot, t)) = \int_0^1 (x-t)_+ dx = \left(\frac{1}{2} - t\right)_+.$$

$$\text{Remarquons que } \int_0^1 (x-t)_+ dx = \int_0^t (x-t)_+ dx + \int_t^1 (x-t)_+ dx = \int_0^t 0 \cdot dx + \int_t^1 (x-t) dx = \left[\frac{(x-t)^2}{2} \right]_t^1 = \frac{(1-t)^2}{2}.$$

$$\text{Il vient: si } t \geq \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} - t\right)_+ = 0 \text{ et } E_R(u(\cdot, t)) = \frac{(1-t)^2}{2}$$

$$\text{si } t < \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2} - t\right)_+ = \frac{1}{2} - t \text{ et } E_R(u(\cdot, t)) = \frac{(1-t)^2}{2} - \left(\frac{1}{2} - t\right) = \frac{(1-t)^2 - 1 + 2t}{2} = \frac{t^2}{2}.$$

8- On en déduit que:

$$|E_R(f)| = |E_R(g)| = \left| \int_0^1 E_R(u(\cdot, t)) f''(t) dt \right| \leq \|f''\|_\infty \int_0^1 E_R(u(\cdot, t)) dt \quad (E_R(u(\cdot, t)) \geq 0 \quad \forall t \in [0, 1])$$

$$\text{Un calcul élémentaire donne } \int_0^1 E_R(u(\cdot, t)) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)^2}{2} dt = \frac{1}{9}, \text{ d'où le résultat.}$$