SUJET BLANC N°3

Durée : 5 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.

En dehors de la partie préliminaire, le sujet est constitué de trois parties indépendantes.

Objet et notations du problème.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^x} \quad \text{et} \quad T_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p+1}}{p^x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note, *lorsque cela a un sens* :

$$S(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}, \quad R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^x}, \quad T(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^x}.$$

On se propose ici de calculer les valeurs des fonctions S et T en quelques points, en utilisant diverses méthodes de calcul exact et de calcul approché de la somme d'une série numérique.

————— **PRELIMINAIRE : Un résultat général sur les séries alternées** —————

Le but de cette première partie est d'établir le théorème suivant :

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant. Alors $\sum u_n$ converge, et le reste d'ordre n de la série $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} , avec $|r_n| \leq |u_{n+1}|$.

On considère le cas d'une série alternée $\sum u_n$ telle que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant, et telle que $u_{2k} \geq 0$ et $u_{2k+1} \leq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Montrer que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes. On notera s la limite commune de ces deux suites.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $s_{2k_n+1} \leq s_n \leq s_{2k_n}$, où $k_n = \left[\frac{n}{2} \right]$ désigne la partie entière du réel $\frac{n}{2}$.
3. En déduire que $\sum u_n$ converge.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n est du signe de u_{n+1} et que $|r_n| \leq |u_{n+1}|$.
Indication : utiliser la relation $s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq s \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE I : Encadrement des fonctions S et T

1. Déterminer, par un argument simple, le domaine de définition D_S de S (en d'autres termes, l'ensemble des réels x tels que la série de terme général $\frac{1}{p^x}$ converge).
2. Déterminer le domaine de définition D_T de T .
3. Soit $x \in D_T$.
 - 3.1. Montrer que la suite $(T_{2n}(x))_{n \geq 1}$ est croissante et que $(T_{2n-1}(x))_{n \geq 1}$ est décroissante.
 - 3.2. Montrer que $(T_{2n}(x))_{n \geq 1}$ et $(T_{2n-1}(x))_{n \geq 1}$ sont adjacentes. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$T_{2n}(x) \leq T(x) \leq T_{2n-1}(x).$$
4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in D_S$, on a :

$$\frac{1}{(p+1)^x} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{p^x}.$$

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in D_S$, on a :

(i)

$$\frac{1}{x-1} \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \leq R_n(x) \leq \frac{1}{x-1} \frac{1}{n^{x-1}}.$$

Indication : on pourra sommer les inégalités de la question 4 de $p = n$ à $+\infty$ et de $p = n+1$ à $+\infty$.

(ii)

$$\frac{1}{x-1} \frac{1}{(n+1)^{x-1}} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^x} \leq S(x) \leq \frac{1}{x-1} \frac{1}{n^{x-1}} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^x}.$$

6. Expliciter l'estimation obtenue à la question 5.(ii) pour $n = 1$ dans les cas $x = 2$ et $x = 4$.

PARTIE II : Calcul de quelques valeurs exactes

1. **A partir de la formule de Taylor-Lagrange.**

On rappelle ici la formule de Taylor-Lagrange :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^m$ sur $]a, b[$ avec $m > n$, continue sur $[a, b]$. Alors il existe un réel $c_n \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

1.1. On considère la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Donner une expression générale de $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f(1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + r_n,$$

où (r_n) est une suite réelle de limite nulle.

Indication : Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f avec $a = 0$ et $b = 1$.

1.3. En déduire $T(1)$.

2. A partir des séries de Fourier.

Quelques rappels utiles :

Définition

On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $n \geq 1$ telle que, pour tout $k \in [[0, n-1]]$:

- (i) la fonction f est dérivable à dérivée continue sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.
- (ii) la fonction f ainsi que sa dérivée f' admettent une limite à droite en x_k et à gauche en x_{k+1} .

Séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T , continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de f par $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ et pour tout $k \geq 1$:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(kt) dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(kt) dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_n(f(x)) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx)$.

Nous admettrons les deux résultats suivants :

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T , de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\mathcal{F}_n(f(x)))_n$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier, si f est continue en x , $(\mathcal{F}_n(f(x)))_n$ converge vers $f(x)$.

Formule de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T continue par morceaux. On a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^2.$$

On considère la fonction réelle f de période 2π , définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

2.1. Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.2. Calculer $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$.

2.3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = 0$.

2.4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt = 4 \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties successives, en commençant par $u = t^2, v' = \cos(kt)$.

2.5. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(f(x))$.

2.6. Calcul de $S(2)$.

2.6.1. Montrer que $\mathcal{F}_n(f(\pi)) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^n \frac{4}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.6.2. En déduire que $S(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indication : on pourra utiliser $f(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(f(\pi))$.

2.7. Calcul de $T(2)$.

2.7.1. Calculer $\mathcal{F}_n(f(0))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2.7.2. En déduire que $T(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

2.8. Calcul de $S(4)$.

2.8.1. Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi^4}{5}$.

2.8.2. En déduire que $S(4) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Indication : utiliser la formule de Parseval.

2.9. On suppose ici $9 < \pi^2 < 10$ et $95 < \pi^4 < 100$. Les résultats obtenus pour $S(2)$ et $S(4)$ sont-ils en accord avec les estimations de la partie I question 6 ?

PARTIE III : De meilleures approximations de $S(2)$

1. Un résultat préliminaire

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que

- (i) $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\sum v_n$ converge
- (iii) $u_n = o(v_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$

Rappel : $u_n = o(v_n)$ signifie qu'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.

1.1. Montrer que $u_n = o(v_n)$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n| < \varepsilon |v_n|$.

1.2. Montrer que $\sum u_n$ converge.

1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left| \sum_{k=n+1}^N u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^N v_k$ pour tous entiers n et N vérifiant $n_0 < n < N$.

1.4. En déduire que $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ et $w_n = u_n - v_n$.

2.1. Etablir l'existence du nombre réel $V = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ et le calculer.

Indication : on pourra réécrire V sous forme d'une somme télescopique.

2.2. En déduire l'existence et la valeur de $W = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ en fonction de $S(2)$.

On note respectivement la somme partielle et le reste d'ordre n de la série de terme général

$$w_n : W_n = \sum_{k=1}^n w_k \text{ et } \rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k.$$

2.3. Montrer que $w_n = o(u_n)$.

2.4. En déduire que $\rho_n = o(R_n(2))$.

Indication : on pourra utiliser le résultat 1.4 de la partie préliminaire.

3. On déduit de ce qui précède que la série $\sum w_n$ converge plus vite que la série $\sum u_n$. L'idée est donc de chercher des approximations de la somme W par encadrement des restes ρ_n , afin d'en déduire des approximations de $S(2) = W + V$.

3.1. Expliciter l'encadrement obtenu dans la partie I.5.(i) pour $R_n(3) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

3.2. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{(k+1)^3} \leq w_k \leq \frac{1}{k^3}$.

3.3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $R_{n+1}(3) \leq \rho_n \leq R_n(3)$.

3.4. Montrer enfin que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2(n+2)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)} \leq W \leq \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

3.5. Expliciter cet encadrement pour $n = 1$ et comparer avec celui obtenu dans la partie I.6.