
SUJET BLANC N°3 : CORRIGÉ

Durée *:* 5 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.

En dehors de la partie préliminaire, le sujet est constitué de trois parties indépendantes.

Objet et notations du problème.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^x} \quad \text{et} \quad T_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note, ***lorsque cela a un sens*** :

$$S(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} \quad , \quad R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} \quad , \quad T(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p^x}.$$

On se propose ici de calculer les valeurs des fonctions S et T en quelques points, en utilisant diverses méthodes de calcul exact et de calcul approché de la somme d'une série numérique.

PRELIMINAIRE : Un résultat général sur les séries alternées

Le but de cette première partie est d'établir le théorème suivant :

> Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant. Alors $\sum u_n$ converge, et le reste d'ordre n de la série $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1}, avec $|r_n| \leq |u_{n+1}|$.

On considère le cas d'une série alternée $\sum u_n$ telle que la suite $(|u_n|)$ converge vers 0 en décroissant, et telle que $u_{2k} \geq 0$ et $u_{2k+1} \leq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes. On notera s la limite commune de ces deux suites.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s_{2(n+1)} - s_{2n} = u_{2k+2} + u_{2k+1} = |u_{2k+2}| - |u_{2k+1}| \leq 0$ (les termes pairs sont positifs, les termes impairs négatifs et $(|u_n|)$ est décroissante). On en déduit la décroissance de (s_{2n}). Un calcul analogue donne la croissance de (s_{2n+1}). D'autre part, on a $|s_{2n+1} - s_{2n}| = |u_{n+1}|$. On utilise alors la convergence de $(|u_n|)$ vers 0 pour conclure que les suites $(s_{2n})_n$ et $(s_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $s_{2k_n+1} \leq s_n \leq s_{2k_n}$, où $k_n = \left[\dfrac{n}{2}\right]$ désigne la partie entière du réel $\dfrac{n}{2}$.
Si l'on pose $k_n = \left[\dfrac{n}{2}\right]$, alors par définition on a $k_n \leq n/2 < k_n + 1$, d'où l'on tire $2k_n \leq n \leq 2k_n + 1$. Ainsi, on a $n = 2k_n$ ou $n = 2k_n + 1$, ce qui donne $s_n = s_{2k_n}$ ou $s_n = s_{2k_n+1}$. En utilisant la partie précédente, et en particulier le fait que $s_{2k} \geq s_{2k+1}$ pour tout entier k, on aboutit à $s_{2k_n+1} \leq s_n \leq s_{2k_n}$.

3. En déduire que $\sum u_n$ converge.
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la question précédente, on obtient la convergence de la suite des sommes partielles (s_n) (et donc par définition la convergence de la série $\sum u_n$) en appliquant le théorème des gendarmes (les deux suites extraites (s_{2k_n+1}) et (s_{2k_n}) convergent vers s).

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, r_n est du signe de u_{n+1} et que $|r_n| \leq |u_{n+1}|$.
Indication : utiliser la relation $s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq s \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq s \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}$, d'où l'on tire
$0 \leq s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = u_{2n+2}$ et $u_{2n+1} = s_{2n+1} - s_{2n} \leq s - s_{2n} \leq 0$. On en déduit $0 \leq r_{2n+1} \leq u_{2n+2}$ et $u_{2n+1} \leq r_{2n} \leq 0$, d'où le résultat.

PARTIE I : Encadrement des fonctions S et T

1. Déterminer, par un argument simple, le domaine de définition D_S de S (en d'autres termes, l'ensemble des réels x tels que la série de terme général $\dfrac{1}{p^x}$ converge).
Le critère de convergence des séries de Riemann donne immédiatement que $S(x)$ est défini si et seulement si $x > 1$. Ainsi $D_S =]1, +\infty[$.

2. Déterminer le domaine de définition D_T de T.
Remarquons tout d'abord que pour tout réel x, $T(x)$ est la somme d'une série alternée. Pour que cette série converge, il est nécessaire que son terme général converge vers 0, c'est à dire $\lim\limits_{p \to +\infty} \dfrac{(-1)^{p+1}}{p^x} = 0$, ce qui implique $x > 0$. Par ailleurs, la condition $x > 0$ implique que la suite $\left(\dfrac{1}{p^x}\right)_{p \geq 1}$ (module du terme général) converge vers 0 en décroissant. On en déduit que $T(x)$ est défini si et seulement si $x > 0$ d'après le critère de convergence des séries alternées. Donc $D_T =]0, +\infty[$.

3. Soit $x \in D_T$.
   3.1. Montrer que la suite $(T_{2n}(x))_{n \geq 1}$ est croissante et que $(T_{2n-1}(x))_{n \geq 1}$ est décroissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T_{2(n+1)}(x) - T_{2n}(x) = \sum_{p=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{p+1}}{p^x} - \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^{p+1}}{p^x} = \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+2)^x} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+1)^x} = \frac{1}{(2n+1)^x} - \frac{1}{(2n+2)^x}.$$

Pour tout $x > 0$, la fonction définie par $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t^x}$ étant décroissante, on en déduit $\frac{1}{(2n+1)^x} - \frac{1}{(2n+2)^x} \geq 0$, et par suite la croissance de $(T_{2n}(x))_{n\geq 1}$. En raisonnant de même, on obtient la décroissance de $(T_{2n-1}(x))_{n\geq 1}$

3.2. Montrer que $(T_{2n}(x))_{n\geq 1}$ et $(T_{2n-1}(x))_{n\geq 1}$ sont adjacentes. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$T_{2n}(x) \leq T(x) \leq T_{2n-1}(x)\,.$$

Le réel x étant dans le domaine de définition de T, on en déduit la convergence de la suite des sommes partielles $(T_n(x))_{n\geq 1}$ vers $T(x)$. Il en est de même des suites $(T_{2n}(x))_{n\geq 1}$ et $(T_{2n-1}(x))_{n\geq 1}$, qui admettent donc pour limite $T(x)$. La suite $(T_{2n}(x))_{n\geq 1}$ étant croissante et la suite $(T_{2n-1}(x))_{n\geq 1}$ étant décroissante, on en déduit le résultat demandé.

4. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in D_S$, on a :

$$\frac{1}{(p+1)^x} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{p^x}\,.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_S$. On utilise une nouvelle fois la décroissance de la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{t^x}$, pour obtenir :

$$\forall t \in [p, p+1] \quad , \quad \frac{1}{(p+1)^x} \leq \frac{1}{t^x} \leq \frac{1}{p^x}\,.$$

On obtient alors le résultat en intégrant sur l'intervalle $[p, p+1]$.

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in D_S$, on a :

(i)

$$\frac{1}{x-1}\frac{1}{(n+1)^{x-1}} \leq R_n(x) \leq \frac{1}{x-1}\frac{1}{n^{x-1}}\,.$$

Indication : on pourra sommer les inégalités de la question 4 de $p = n$ à $+\infty$ et de $p = n+1$ à $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D_S$. En sommant l'inégalité de droite obtenue à la question 4 de $p = n+1$ à $+\infty$, on obtient directement $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} = R_n(x)$. Le calcul donne $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1}\frac{1}{(n+1)^{x-1}}$. On obtient ainsi la première inégalité demandée. Un raisonnement similaire donne la seconde inégalité.

(ii)

$$\frac{1}{x-1}\frac{1}{(n+1)^{x-1}} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^x} \leq S(x) \leq \frac{1}{x-1}\frac{1}{n^{x-1}} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^x}\,.$$

Il s'agit de remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in D_S$, $S(x) = R_n(x) + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^x}$. On obtient alors directement le résultat en rajoutant $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^x}$ à l'inégalité (i).

6. Expliciter l'estimation obtenue à la question 5.(ii) pour $n = 1$ dans les cas $x = 2$ et $x = 4$.
Pour $x = 2$, l'estimation s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(n+1)} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} \leq S(2) \leq \frac{1}{n} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}\,.$$

En prenant $n = 1$, on obtient $\frac{3}{2} \leq S(2) \leq 2$.
Pour $x = 4$, l'estimation s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^4} \leq S(4) \leq \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^4}.$$

En prenant $n = 1$, on obtient $\frac{25}{24} \leq S(4) \leq \frac{4}{3}$.

PARTIE II : Calcul de quelques valeurs exactes

1. **A partir de la formule de Taylor-Lagrange**.

On rappelle ici la formule de Taylor-Lagrange :

> Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^m$ sur $]a, b[$ avec $m > n$, continue sur $[a, b]$. Alors il existe un réel $c_n \in]a, b[$ tel que :
>
> $$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

1.1. On considère la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Donner une expression générale de $f^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ (propriétés de la fonction logarithme). Le calcul donne $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ pour tout $x \in [0, 1]$. On procède alors par récurrence pour montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, $f^{(k)}(x) = (k-1)!\frac{(-1)^{k-1}}{(1+x)^k}$.

1.2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + r_n,$$

où (r_n) est une suite réelle de limite nulle.
Indication : Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à f avec $a = 0$ et $b = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, la formule de Taylor-Lagrange donne l'existence d'un $c_n \in]0, 1[$ tel que :

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} + \frac{f^{n+1}(c_n)}{(n+1)!},$$

c'est à dire, en utilisant la formule de la question précédente :
$$f(1) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!}{k!}\frac{(-1)^{k-1}}{1^k} + \frac{n!}{(n+1)!}\frac{(-1)^n}{(1+c_n)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c_n)^{n+1}}.$$
En posant $r_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c_n)^{n+1}}$, on a $|r_n| = \frac{1}{(n+1)(1+c_n)^{n+1}} < \frac{1}{n+1}$ (car $c_n > 0$).
La suite (r_n) ainsi définie est donc de limite nulle.

1.3. En déduire $T(1)$.

Remarquons tout d'abord que $1 \in D_T$, *donc* $T(1)$ *est bien défini et est par définition égal à la limite de la suite des sommes partielles* $(T_n(1))_{n\geq 1}$. *D'après la question précédente, on a* $f(1) = T_n(1) + r_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *La suite* (r_n) *étant de limite nulle, on en déduit que* $T(1) = \lim_{n\to+\infty} T_n(1) = f(1) = \ln(2)$.

2. **A partir des séries de Fourier.**

Quelques rappels utiles :

Définition

On rappelle qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, $n \geq 1$ telle que, pour tout $k \in [[0, n-1]]$:

(i) la fonction f est dérivable à dérivée continue sur chaque intervalle ouvert $]x_k, x_{k+1}[$.

(ii) la fonction f ainsi que sa dérivée f' admettent une limite à droite en x_k et à gauche en x_{k+1}.

Séries de Fourier

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T, continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier de f par $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)dt$ et pour tout $k \geq 1$:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(kt)dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(kt)dt\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_n(f(x)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(kx)$.

Nous admettrons les deux résultats suivants :

Théorème de Dirichlet

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\Big(\mathcal{F}_n(f(x))\Big)_n$ converge vers $\dfrac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$. En particulier, si f est continue en x, $\Big(\mathcal{F}_n(f(x))\Big)_n$ converge vers $f(x)$.

Formule de Parseval

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction périodique de période T continue par morceaux. On a :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2\,.$$

On considère la fonction réelle f de période 2π, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

2.1. Montrer que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La restriction de la fonction f *à l'intervalle* $]-\pi, \pi[$ *est continue.* f *étant* $2\pi-$*périodique, on en déduit que* f *est continue sur* $\mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Par ailleurs, on a* $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \pi^2$. *On en déduit la continuité de* f *en* π, *et par suite sur* $\{(2k+1)\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\}$ *par périodicité. Ainsi* f *est continue sur* $\mathbb{R}$.

Considérons la restriction de f *à* $[-\pi, \pi]$. *Il s'agit d'une fonction dérivable, à dérivée continue sur* $]-\pi, \pi[$. *De plus,* f *et* f' *admettent une dérivée à gauche en* $-\pi$ *et à droite en* π. *On en déduit que la restriction de* f *à* $[-\pi, \pi]$ *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Par périodicité,* f *est donc aussi de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux.*

2.2. Calculer $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$.

Le calcul donne $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 = \dfrac{1}{3}\pi^2$.

2.3. Monter que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction g définie par $g(t) = t^2 \sin(kt)$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$ est impaire. On en déduit immédiatement que $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = 0$.

2.4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = 4\dfrac{(-1)^k}{k^2}$.

Indication : on pourra procéder par intégrations par parties successives, en commençant par $u = t^2, v' = \cos(kt)$.

On effectue une première intégration par parties $u = t^2, v' = \cos(kt)$:

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)dt = -\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2t\dfrac{\sin(kt)}{k}dt + \left[t^2\dfrac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\dfrac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)dt.$

On effectue alors une nouvelle intégration par parties $u = t, v' = \sin(kt)$:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)dt &= \frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(kt)}{k}dt - \frac{2}{k\pi}\left[-t\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{2}{k\pi}\left[-\frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[t\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}. \end{aligned} \tag{1}$$

Le premier terme de droite dans l'égalité précédente étant nul, on en déduit :
$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)dt = \dfrac{2}{k\pi}\left[t\dfrac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{2}{k\pi}\left(2\dfrac{\pi}{k}\cos(k\pi)\right) = 4\dfrac{(-1)^k}{k^2}$. *(On rappelle que* $\cos(k\pi) = (-1)^k$*)*

2.5. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(f(x))$.

Il s'agit de voir qu'on est dans les conditions d'application du théorème de Dirichlet (cf question 2.1, f est 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux). Par suite, f étant continue en tout point, on a bien $f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(f(x))$ pour tout réel x.

2.6. Calcul de $S(2)$.

2.6.1. Montrer que $\mathcal{F}_n(f(\pi)) = \dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{4}{k^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathcal{F}_n(f(\pi)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\pi) + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin(k\pi)$. *On utilise alors le fait que les coefficients $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont nuls et les questions 2.2 et 2.4 :*

$$\mathcal{F}_n(f(\pi)) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(k\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{n} 4\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(k\pi) = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k^2}.$$

2.6.2. En déduire que $S(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Indication : on pourra utiliser $f(\pi) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(f(\pi))$.

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}_n(f(\pi)) = \dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{4}{k^2}$. La fonction f étant continue en π, la suite $\big(\mathcal{F}_n(f(\pi))\big)$ converge vers $f(\pi)$. Or $f(\pi) = \pi^2$ et $\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(f(\pi)) =$

$\frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{3}\pi^2 + 4S(2)$. On en déduit que $\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4S(2)$, c'est à dire $S(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

2.7. Calcul de $T(2)$.

2.7.1. Calculer $\mathcal{F}_n(f(0))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathcal{F}_n(f(0)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(0) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

2.7.2. En déduire que $T(2) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Comme dans la question précédente, f étant continue en 0, la suite $\big(\mathcal{F}_n(f(0))\big)$ converge vers $f(0) = 0$. D'autre part,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(f(0)) = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{+\infty}(-1) \times \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{1}{3}\pi^2 - 4T(2).$$

Ainsi $\frac{1}{3}\pi^2 - 4T(2) = 0$, d'où l'on tire le résultat.

2.8. Calcul de $S(4)$.

2.8.1. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt = \frac{\pi^4}{5}$.

Le calcul donne : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi^5}{5}\right) = \frac{\pi^4}{5}$.

2.8.2. En déduire que $S(4) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Indication : utiliser la formule de Parseval.

f étant continue par morceaux et 2π-périodique, la formule de Parseval s'applique, et on a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|a_n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|b_k|^2$. En utilisant la question précédente, en déduit :

$$\frac{\pi^4}{5} = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(4\frac{(-1)^k}{k^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}. \tag{2}$$

On en déduit que $S(4) = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$.

2.9. On suppose ici $9 < \pi^2 < 10$ et $95 < \pi^4 < 100$. Les résultats obtenus pour $S(2)$ et $S(4)$ sont-ils en accord avec les estimations de la partie I question 6 ?

L'encadrement $9 < \pi^2 < 10$ donne immédiatement $\frac{3}{2} < S(2) < \frac{5}{3}$. Cet encadrement est cohérent avec celui trouvé dans la partie A (il est même plus fin).

L'encadrement $95 < \pi^4 < 100$ donne $\frac{19}{18} < S(4) < \frac{10}{9}$. On a $\frac{19}{18} > \frac{25}{24}$ et $\frac{10}{9} < \frac{4}{3}$, donc il s'agit là aussi d'un encadrement plus fin que celui donné dans la partie I.

PARTIE III : De meilleures approximations de $S(2)$

1. **Un résultat préliminaire**

On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que

(i) $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\sum v_n$ converge

(iii) $u_n = o(v_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$

> **Rappel** : $u_n = o(v_n)$ signifie qu'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.

1.1. Montrer que $u_n = o(v_n)$ ssi $\forall \varepsilon > 0\,, \exists n_0 \in \mathbb{N}\,, \forall n \geq n_0\,,\ |u_n| < \varepsilon |v_n|$.

Si $u_n = o(v_n)$, alors il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang. On obtient alors immédiatement le résultat en exploitant la convergence de (ε_n) vers 0.

Pour la réciproque, il suffit de considérer la suite (ε_n) de terme général $\varepsilon_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ (v_n est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$). On a bien $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et (ε_n) tend vers 0.

1.2. Montrer que $\sum u_n$ converge.

On applique ce qui précède avec $\varepsilon = 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq |v_n|$ pour tout $n \geq N$. La suite (v_n) étant à termes strictement positifs, on a donc $|u_n| \leq v_n$ pour tout $n \geq N$. Enfin, la série $\sum v_n$ étant convergente, on en déduit que $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} u_k\right| \leq \varepsilon \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} v_k$ pour tous entiers n et N vérifiant $n_0 < n < N$.

On a vu précédemment qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k| < \varepsilon v_k$ pour tout $k \geq n_0$. Etant donné deux entiers n et N vérifiant $n_0 < n < N$, on obtient le résultat en sommant ces inégalités de $k = n+1$ à N, puis en utilisant l'inégalité triangulaire.

1.4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Il s'agit de faire tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. On se retrouve alors dans le cadre de la question 1.1. avec $(U_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right)$ et $(V_n) = \left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$, ce qui permet de conclure.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $w_n = u_n - v_n$.

2.1. Etablir l'existence du nombre réel $V = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ et le calculer.

Indication : on pourra réécrire V sous forme d'une somme téléscopique.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$. On en déduit l'existence et la valeur de V ($V = 1$) en passant à la limite sur N.

2.2. En déduire l'existence et la valeur de $W = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ en fonction de $S(2)$.

On sait que $w_n = u_n - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous venons de voir que la série de terme général v_n converge vers 1. Par ailleurs, la somme de la série de terme général u_n vaut $S(2)$. On en déduit la convergence de la série de terme général w_n, et la valeur de la somme : $W = S(2) - 1$.

On note respectivement la somme partielle et le reste d'ordre n de la série de terme général w_n : $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k$.

2.3. Montrer que $w_n = o(u_n)$.

Le calcul donne $w_n = \varepsilon_n u_n$ *avec* $\varepsilon_n = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *et* (ε_n) *tend vers* 0.

2.4. En déduire que $\rho_n = o(R_n(2))$.

Indication : on pourra utiliser le résultat 1.4 de la partie préliminaire.

La suite (u_n) *est à valeurs strictement positives, et la série* $\sum u_n$ *converge. On a de plus* $w_n = o(u_n)$. *Le résultat préliminaire de la partie 1. donne alors immédiatement* $\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} w_k\right) = o\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right)$, *c'est à dire* $\rho_n = o(R_n(2))$.

3. On déduit de ce qui précède que la série $\sum w_n$ converge plus vite que la série $\sum u_n$. L'idée est donc de chercher des approximations de la somme W par encadrement des restes ρ_n, afin d'en déduire des approximations de $S(2) = W + V$.

3.1. Expliciter l'encadrement obtenu dans la partie I.5.(i) pour $R_n(3) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$.

On obtient : $\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} \leq R_n(3) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$.

3.2. Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{(k+1)^3} \leq w_k \leq \frac{1}{k^3}$.

Le calcul donne, pour tout entier $k \geq 1$: $w_k = u_k - v_k = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2(k+1)}$. *On utilise ensuite le fait que* $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ *pour conclure.*

3.3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $R_{n+1}(3) \leq \rho_n \leq R_n(3)$.

Il s'agit de sommer les inégalités précédentes de $n+1$ *à* $+\infty$, *pour obtenir :* $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. *On conclut en remarquant que les membres de gauche et de droite sont respectivement égaux* $R_{n+1}(3)$ *et* $R_n(3)$.

3.4. Montrer enfin que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2(n+2)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)} \leq W \leq \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

On rajoute $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$ *à l'inégalité précédente, ce qui donne :*

$R_{n+1}(3) + W_n \leq W \leq R_n(3) + W_n$. *La question 3.1. donne* $R_{n+1}(3) \geq \frac{1}{2}\frac{1}{(n+2)^2}$ *et* $R_n(3) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$. *En utilisant ces inégalités, et le fait que* $w_k = \frac{1}{k^2(k+1)}$ *pour tout* $k \geq 1$ *(question 3.2), on aboutit au résultat.*

3.5. Expliciter cet encadrement pour $n = 1$ et comparer avec celui obtenu dans la partie I.6.

Pour $n = 1$, *on obtient* $\frac{1}{18} + \frac{1}{2} \leq W \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. *On en tire l'encadrement suivant sur* $S(2) = W + 1$: $\frac{28}{18} \leq S(2) \leq 2$, *qui est (très légèrement) plus fin que celui obtenu dans la partie I.*