
Sujet blanc n°3

Durée *:* 5 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Les problèmes n°1 et n°2 feront l'objet de deux compositions distinctes.

Problème 1 : matrices d'ordre fini.

Notations et définitions.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$) l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}$ (respectivement à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{Z}$).
La matrice identité de taille n est notée I_n.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et noté $Sp(A)$.
On dit que A est **d'ordre fini** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$.
Si A est d'ordre fini, le plus petit entier strictement positif k tel que $A^k = I_n$ est appelé **ordre** de A et noté $o(A)$.

Partie A : préliminaires

1. Cette question consiste en des rappels de théorèmes du cours.
   1.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
      i. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
      ii. Donner une condition suffisante sur P pour que A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   1.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X], P \neq 0$ tel que $P(A) = 0$.
   Que deviennent les conditions précédentes lorsque l'on s'intéresse à la trigonalisation ou à la diagonalisation de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'ordre fini. On pose $o(B) = b$.
   2.1. Démontrer que B est inversible.
   2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $B^k = I_n$ si et seulement si b divise k.
   2.3. Démontrer que les valeurs propres de B sont des racines b-ièmes de l'unité.
   2.4. Démontrer que B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ses valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   On suppose que C est diagonalisable et que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i est une racine n_i-ième de l'unité pour un certain entier n_i.
   Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on note k_i le plus petit entier strictement positif tel que $\lambda_i^{k_i} = 1$.
   3.1. Démontrer que C est d'ordre fini et que son ordre divise le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.
   3.2. Démontrer que $o(C)$ est le PPCM de $k_1, \dots, k_n$.

Partie B : matrices d'odre fini à coefficients réels

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre fini. Le but est de démontrer que cette matrice est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et de déterminer le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont réelles, alors $Sp(A) \subseteq \{-1, 1\}$.
2. On suppose que 1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.
   2.1. Justifier qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   2.2. On pose $B = P^{-1}AP$. Démontrer que B est d'ordre fini.
   2.3. Démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. En déduire que $A = I_3$.

3. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est la seule valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

4. On suppose que -1 est valeur propre simple de A et que 1 est valeur propre double de A.

4.1. Justifier qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, et a, b, c éléments de $\mathbb{R}$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. On pose $C = Q^{-1}AQ$.
Démontrer qu'il existe trois suites de nombres réels $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On définira ces suites à l'aide de relations de récurrence.

4.3. Donner une expression de γ_k pour tout $k \geq 0$.

4.4. En déduire que $c = 0$.

4.5. En déduire que C et A sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

5. Énoncer sans démonstration un résultat semblable lorsque -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A.

6. On suppose que A admet dans $\mathbb{C}$ au moins une valeur propre non réelle.

6.1. Démontrer qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$, tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.
On pourra considérer le polynôme caractéristique de A.

6.2. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que A est d'ordre fini si, et seulement si, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et qu'il existe $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$ tel que $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$.

Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, d'ordre fini. D'après la partie B, son spectre dans $\mathbb{C}$ est de la forme $Sp(A) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\}$ ou $\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\}$, où $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

1. Démontrer que $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$.
On pourra considérer la trace de A.

2. Donner les valeurs possibles pour θ.

3. Donner les différents spectres dans $\mathbb{C}$ possibles pour A puis démontrer que $o(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

4. On cherche maintenant à construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ de chaque ordre.

4.1. Donner des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 1 et 2.

4.2. i. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le polynôme caractéristique de : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -c \end{pmatrix}$.

ii. Construire une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ dont les valeurs propres sont 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
Démontrer que cette matrice est d'ordre 3.

iii. Construire des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 4 et d'ordre 6.

PROBLEME II : fonction exponentielle, évolution d'une population

On établit dans la partie A l'existence d'une unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$ et on étudie dans la partie B un exemple d'équation différentielle.
Dans la partie A, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes ne sont pas supposées connues.

Partie A - La fonction exponentielle

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle (E) : $y' = y$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

I - Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f dérivable, solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$.

1 - Démontrer que la fonction définie par $h(x) = f(x) \times f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est constante.

2 - En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3 - Soit g, une fonction dérivable solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$. Montrer que la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est constante. En déduire que $f = g$.

4 - Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$. Montrer que ψ est solution de (E).

5 - En déduire que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

6 - Déduire de ce qui précède que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

II - On va dans cette question établir l'existence d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de (E) telle que $f(0) = 1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout entier $n > |x|$:

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}.$$

On va montrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes.

1 - Justifier que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont bien définies pour $n > |x|$.

2 - Établir l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall a \in]-1, +\infty[\,,\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (1+a)^n \geqslant 1 + na\,.$$

3 - Soit n un entier tel que $n > |x|$

a - Démontrer que $u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1}$.

b - On pose $a = \dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} - 1$. Montrer que $a > -1$.

c - En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que $\left(\dfrac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant \dfrac{1}{1 + \frac{x}{n}}$.

d - En déduire que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.

4 - Démontrer que la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante.

5 - Soit n un entier tel que $n > |x|$.

a - Démontrer que $v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right)$.
Indication : factoriser $v_n(x) - u_n(x)$ par $v_n(x)$.

b - En déduire que $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

c - En utilisant l'inégalité de Bernoulli, démontrer que $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n}$.

6 - Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la limite de la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$. Conclure.

7 - On désigne par f la fonction qui à tout réel x associé $f(x)$, limite commune des suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$. On va démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) et vérifie $f(0) = 1$.

a - Démontrer que $f(0) = 1$.

Dans les deux questions suivantes, on considère un réel x_0.

b - On admet que $\forall (a,k) \in \mathbb{R}^2\,,\ f(a+k) - f(a) \geqslant kf(a)\,.$
En utilisant cette relation, établir que :

$$\forall h \in]-1,1[\,,\ hf(x_0) \leqslant f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant \frac{h}{1-h} f(x_0)\,.$$

c - En déduire que f est dérivable en x_0, de dérivée $f(x_0)$. Conclure.

Partie B - Évolution d'une population

Pour étudier l'évolution d'une population de poissons au cours du temps, on utilise le modèle suivant. On admet que la fonction N, représentant le nombre de poissons en fonction du temps t (exprimé en années) vérifie les conditions suivantes :

- N est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)\,,$$

  où r et K sont des constantes réelles strictement positives.
- $N(0) = N_0$, avec $0 < N_0 < K$.
- N est définie sur un intervalle ouvert I contenant 0.
- Si g est une solution de (E) définie sur un intervalle J contenant 0 et vérifiant $g(0) = N_0$, alors J est inclus dans I.

I - Quel théorème permet de garantir l'existence et l'unicité de la fonction N ?
On admet que I contient $[0, +\infty[$, et que pour tout réel $t \in I$, $0 < N(t) < K$.

II - Étude qualitative.

1 - Démontrer que N est strictement croissante sur I.

2 - En déduire que N admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

3 - On cherche à démontrer que $\ell = K$ en raisonnant par l'absurde. On suppose que $\ell < K$.

a - Déterminer la limite de $N'(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

b - Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ et un réel $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant A$, on ait $N'(t) \geqslant \delta$.

c - En déduire la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Conclure.

III - Détermination d'une expression de N.
On pose, pour tout $t \in I$, $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$

1 - Démontrer que g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -ry + \frac{r}{K}$.

2 - Résoudre l'équation différentielle (E'), puis déterminer une expression de N sur I.

3 - Retrouver la limite de N en $+\infty$.