Université Claude Bernard Lyon 1
Préparation aux épreuves écrites du CAPES Semestre printemps 2018 - 2019

Sujet blanc n°3 - corrigé

***Durée** : 5 heures.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction. L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout matériel électronique (y compris la calculatrice) est rigoureusement interdit.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Les problèmes n°1 et n°2 feront l'objet de deux compositions distinctes.

SESSION 2014

CAPES EXTERNE

MATHÉMATIQUES 2

Problème 1 : matrices d'ordre fini

Partie A : préliminaires

1.

1.1. P est nécessairement de degré supérieur ou égal à 1.

i) On sait que A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{R}$.

ii) On sait que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, alors A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2. D'après le théorème de d'ALEMBERT-GAUSS, tout élément de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est scindé sur $\mathbb{C}$. En conséquence, A est toujours trigonalisable.
D'autre part, la condition suffisante de diagonalisablité s'écrit plus simplement : si P est à racines simples dans $\mathbb{C}$.

2.

2.1. Par hypothèse, $B^b = I_n$ avec $b \in \mathbb{N}^*$. Par suite, $B \times B^{b-1} = B^{b-1} \times B = I_n$. On en déduit que B est inversible et que $B^{-1} = B^{b-1}$.

2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. b est un entier naturel non nul. La division euclidienne de k par b s'écrit $k = bq + r$ où q et r sont des entiers relatifs tels que $0 \leqslant r \leqslant b-1$.

$$\begin{aligned} B^k = I_n &\Leftrightarrow B^{qb+r} = I_n \Leftrightarrow \left(B^b\right)^q \times B^r = I_n \Leftrightarrow (I_n)^q \times B^r = I_n \\ &\Leftrightarrow B^r = I_n. \end{aligned}$$

Maintenant, r est élément de $[\![0, b-1]\!]$ et par définition de b, il existe un et un seul entier p élément de $[\![0, b-1]\!]$ tel que $b^p = I_n$ à savoir $p = 0$. Donc

$$B^k = I_n \Leftrightarrow B^r = I_n \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow b \text{ divise } k.$$

2.3. On sait que les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ d'une matrice sont à choisir parmi les racines d'un polynôme annulateur. Puisque $B^b = I_n$, le polynôme $P = X^b - 1$ est annulateur de B. Les racines de P sont les racines b-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et donc les valeurs propres de B sont des racines b-èmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

2.4. $P' = bX^{b-1}$. P' a une seule racine dans $\mathbb{C}$ à savoir 0. 0 n'est pas racine de P et donc P et P' n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$. On sait alors que P est à racines simples dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, le polynôme P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de B. On en déduit que B est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

3. Posons $m = \text{PPCM}\,(k_1, \dots, k_n)$. m est un entier naturel non nul. De plus, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, m est multiple de k_i et donc $\lambda_i^m = 1$.

3.1. C est diagonalisable. Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $C = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}\,(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$$C^m = \left(PDP^{-1}\right)^m = PD^mP^{-1} = P\text{diag}\,(\lambda_i^m)_{1\leqslant i\leqslant m}\,P^{-1} = P \times I_n \times P^{-1} = I_n.$$

Donc, C est d'ordre fini. De plus, d'après la question 2)b), $o(C)$ divise m.

3.2. Plus précisément, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} C^k = I_n &\Leftrightarrow \left(PDP^{-1}\right)^k = I_n \Leftrightarrow PD^kP^{-1} = I_n \\ &\Leftrightarrow D^k = I_n \text{ (P et } P^{-1} \text{ sont inversibles et donc simplifiables)} \\ &\Leftrightarrow \text{diag}\left(\lambda_i^k\right)_{1\leqslant i\leqslant m} = I_n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i^k = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ k \text{ est multiple de } k_i \\ &\Leftrightarrow k \text{ est multiple de } m \Leftrightarrow k \in m\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Par suite, l'ordre de C est le plus petit élément strictement positif de $m\mathbb{Z}$ et donc $o(C) = m$.

Partie B : matrices d'ordre fini à coefficients réels

1. Puisque A est d'ordre fini, d'après la question 2)b) de la partie A, les valeurs propres de A sont des racines de l'unité et en particulier, les valeurs propres de A sont de module égal à 1. Si de plus, toute valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ est réelle, une telle valeur propre est nécessairement égale à 1 ou -1. Donc, $\text{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$.

2.

2.1. Par hypothèse, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (1-X)^3$. Il est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Donc, il existe une matrice P inversible à coefficients réels et une matrice triangulaire supérieure B à coefficients réels telle que $P^{-1}AP = B$. On sait que A et B ont même polynôme caractéristique et que les valeurs propres de B sont les coefficients diagonaux de B. Donc B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En résumé, il existe $P \in GL_3(R)$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. $B^k = \left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$. Donc

$$B^k = I_n \Leftrightarrow P^{-1}A^kP = I_n \Leftrightarrow A^k = I_n.$$

En particulier, B est d'ordre fini et $o(B) = o(A)$.

2.3. Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Si $k = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = B^0$. La formule est donc vraie quand $k = 0$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} B^{k+1} = B^k \times B &= \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + ka & b + kac + \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & c + kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a & \frac{k(k-1+2)}{2}ac + (k+1)b \\ 0 & 1 & (k+1)c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a & \frac{(k+1)((k+1)-1)}{2}ac + (k+1)b \\ 0 & 1 & (k+1)c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ B^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ac + kb \\ 0 & 1 & kc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = I_n$. Pour cet entier k, on a $ka = kc = \dfrac{k(k-1)}{2}ac + kb = 0$ et donc $a = b = c = 0$ puisque k n'est pas nul. On en déduit que $B = I_3$ puis que $A = PI_3P^{-1} = I_3$.

3. Si A admet -1 pour valeur propre triple, alors $-A$ admet 1 pour valeur propre triple. De plus, $-A$ est d'ordre fini car si pour un entier non nul k, on a $A^k = I_3$, alors $(-A)^{2k} = +\left(A^k\right)^2 = I_3$. D'après la question précédente, on a nécessairement $-A = I_3$ ou encore $A = -I_3$.
Réciproquement, la matrice $-I_3$ est d'ordre fini égal à 2.

4.

4.1. De nouveau, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et donc A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$, les valeurs propres de A se retrouvant sur la diagonale de la matrice triangulaire supérieure avec le même ordre de multiplicité. Donc, il existe $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ et trois réels a, b et c tels que la matrice $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe trois réels α_k, β_k et γ_k tels que

$$C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Le résultat est vrai pour $k = 0$ avec $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$.
- Soit $k \geqslant 0$. Supposons qu' il existe trois réels α_k, β_k et γ_k tels que $C^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} C^{k+1} = C^k \times C &= \begin{pmatrix} (-1)^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & 1 & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & \alpha_k + (-1)^k a & c\alpha_k + \beta_k + (-1)^k b \\ 0 & 1 & \gamma_k + c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} \\ 0 & 1 & \gamma_{k+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $\alpha_{k+1} = \alpha_k + (-1)^k a$, $\beta_{k+1} = c\alpha_k + \beta_k + (-1)^k b$ et $\gamma_{k+1} = \gamma_k + c$.

Le résultat est démontré par récurrence.

4.3. La suite $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $\gamma_0 = 0$ et de raison $r = c$. Donc, pour tout entier naturel k, $\gamma_k = \gamma_0 + kr = kc$.

4.4. Comme à la question 2)d), il existe un entier non nul k tel que $kc = 0$ et donc $c = 0$.

4.5. La dimension du sous-espace propre de A ou de C associé à la valeur propre simple -1 est 1. D'autre part,

$$\mathrm{rg}\,(A - I_3) = \mathrm{rg}\,(C - I_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & a & b \end{pmatrix} = 1.$$

D'après le théorème du rang, la dimension du sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(A - I_3)$ ou du sous-espace propre $\mathrm{Ker}\,(C - I_3)$ est $3 - 1 = 2$ qui est l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1.

En résumé, le polynôme caractéristique de C ou de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre correspondant. On en déduit que A et C sont diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Si -1 est valeur propre double de A et 1 est valeur propre simple de A, alors -1 est valeur propre simple de $-A$ et 1 est valeur propre double de $-A$. $-A$ étant d'autre part d'ordre fini, la question précédente permet d'affirmer que $-A$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Il en est de même de la matrice A car si $-A$ est semblable à une matrice diagonale réelle D, A est semblable à la matrice diagonale réelle $-D$.
Réciproquement, comme à la question précédente, une telle matrice est d'ordre fini.

6.

6.1. On a vu à la question 1) que toute valeur propre de A dans $\mathbb{C}$ est de module 1. Puisque A admet une valeur propre non réelle, l'une des valeurs propres de A est de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. D'après la question 2)c) de la partie A, $e^{i\theta}$ est une racine b-ème de l'unité où $b = o(A)$. Donc, $e^{ib\theta} = 1$ puis $b\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ puis $\theta \in \dfrac{2\pi}{b}\mathbb{Z}$ et en particulier, $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.
Finalement, l'une des valeurs propres de A est de la forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in 2\pi\mathbb{Q} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Puisque A est à coefficients réels, on sait que puisque $e^{i\theta}$ est une valeur propre non réelle de A, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ est valeur propre de A avec le même ordre de multiplicité. Donc, A admet déjà deux valeurs propres distinctes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Notons λ la dernière valeur propre.
La trace de A est un réel et est égale à $e^{i\theta} + e^{-i\theta} + \lambda$ ou encore $2\cos\theta + \lambda$. On en déduit que λ est un réel, toujours de module 1 et donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Finalement, $\mathrm{Sp}(A) = \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\right\}$ ou $\mathrm{Sp}(A) = \left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\right\}$.

6.2. En particulier, le polynôme caractéristique de A est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et on sait que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

7. • Supposons A d'ordre fini. D'après la question 1), les trois valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont de module 1. Puisque χ_A est de degré 3 à coefficients réels, A admet au moins une valeur propre réelle qui ne peut être que 1 ou -1. Si l'une des deux autres valeurs propres n'est pas réelle, elle est de la forme $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et on a vu que l'autre valeur propre est sa conjuguée $e^{-\imath\theta}$. Sinon, toutes les valeurs propres sont réelles.

Si les trois valeurs propres sont réelles, la famille des valeurs propres de A est nécessairement $(1,1,1)$ ou $(-1,1,1)$ ou $(-1,-1,1)$. Nous sommes donc dans la situation des questions 2), 3), 4) ou 5). La matrice A est soit égale à I_3, soit égale à $-I_3$, soit diagonalisable et dans tous les cas diagonalisable. D'autre part, le spectre de A est bien de la forme $\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\right)$ ou $\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\right)$ avec $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ de sorte que $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

Si A admet une valeur propre réelle et deux valeurs propres non réelles conjuguées, on est dans le cas de la question 6) et on a vu que A est diagonalisable et que le spectre de A a la forme voulue.

• Réciproquement, supposons que A soit diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et que le spectre de A soit de la forme $\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1\right)$ ou $\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, -1\right)$ avec $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.
Posons $\theta = \dfrac{2\pi a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. A est semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}\left(e^{i\theta}, e^{-i\theta}, \pm 1\right)$. Donc, A^{2b} est semblable à la matrice

$$D^{2b} = \mathrm{diag}\left(e^{4\pi a}, e^{-4\pi a}, (\pm 1)^{2b}\right) = \mathrm{diag}(1,1,1) = I_3,$$

et donc A^{2b} est égale à la matrice I_3. On a trouvé un entier non nul k, à savoir $k = 2b$, tel que $A^k = I_3$ et donc A est d'ordre fini.

Partie C : matrices d'ordre fini à coefficients entiers

1. La trace t de A est la somme des coefficients diagonaux de A et est donc un entier relatif. t est d'autre part la somme des trois valeurs propres de A et donc

$$t = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 1 = 2\cos\theta + 1.$$

Donc $2\cos\theta = t - 1$ est un entier relatif.

2. $2\cos\theta \in [-2,2] \cap \mathbb{Z} = \{-2,-1,0,1,2\}$ et donc $\cos\theta \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$. On en déduit que

$$\theta \in (\pi\mathbb{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right).$$

On note que dans chacun de ces cas, $\theta \in 2\pi\mathbb{Q}$.

3. Premier cas. Si $\cos\theta = 1$, $\mathrm{Sp}(A) = (1,1,\pm 1)$. A est semblable à $\mathrm{diag}(1,1,\pm 1)$. Dans ce cas, A est d'ordre 1 ou 2.

Deuxième cas. Si $\cos\theta = -1$, $\mathrm{Sp}(A) = (-1,-1,\pm 1)$. A est semblable à $\mathrm{diag}(-1,-1,\pm 1)$. Dans ce cas, A est d'ordre 2.

Troisième cas. Si $\cos\theta = 0$, le spectre de A est $(i,-i,\pm 1)$. A est semblable à $\mathrm{diag}(i,-i,\pm 1)$. Dans ce cas, A est d'ordre 4.

Quatrième cas. Si $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, le spectre de A est $\left(j, j^2, \pm 1\right)$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. A est semblable à $\mathrm{diag}(j, j^2, \pm 1)$. Dans ce cas, A est d'ordre 3 ou 6.

Cinquième cas. Si $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, le spectre de A est $\left(-j, -j^2, \pm 1\right)$. A est semblable à $\mathrm{diag}(-j, -j^2, \pm 1)$. Dans ce cas, A est d'ordre 6.

En résumé, $o(A) \in \{1,2,3,4,6\}$.

4.

4.1. I_3 est un élément de $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 1 et $-I_3$ est un élément de $\mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$ d'ordre 2.

4.2. i. Notons A la matrice considérée. En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\begin{aligned}\chi_A = \det(A - XI_3) &= \begin{vmatrix} -X & 0 & -a \\ 1 & -X & -b \\ 0 & 1 & -X-c \end{vmatrix} \\ &= (-X-c)(-X)^2 + b(-X) - a = -X^3 - cX^2 - bX - a.\end{aligned}$$

ii. $(1-X)(j-X)(j^2-X) = -X^3+1$. Donc, si on prend $a=-1$, $b=c=0$, on obtient une matrice A à coefficients entiers relatifs dont le spectre est $(1, j, j^2)$ à savoir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note alors que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

La matrice A est d'ordre 3.

iii. • $(1-X)(i-X)(-i-X) = (1-X)(X^2+1) = -X^3+X^2-X+1$. Donc, si on prend $a=-1$, $b=1$ et $c=-1$, on obtient une matrice A à coefficients entiers relatifs dont le spectre est $(1, i, -i)$ à savoir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A est à valeurs propres simples et est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$. A est semblable à $D = \text{diag}(1, i, -i)$. D est d'ordre 4 et donc A est d'ordre 4.

• $(1-X)(-j-X)(-j^2-X) = (1-X)(X^2-X+1) = -X^3+2X^2-2X+1$. Donc, si on prend $a=-1$, $b=2$ et $c=-2$, on obtient une matrice A à coefficients entiers relatifs dont le spectre est $(1, -j, -j^2)$ à savoir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A est à valeurs propres simples et est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$. A est semblable à $D = \text{diag}(1, -j, -j^2)$. D est d'ordre 6 (car $-j$ et $-j^2$ sont des racines sixièmes de 1 et pas moins) et donc A est d'ordre 6.

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

Partie A : la fonction exponentielle

1.

1.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $g(x) = f(x) \times f(-x)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0.$$

Donc, g est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = g(0) = [f(0)]^2 = 1$. On a montré que pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) = 1$.

1.2. En particulier, pour tout réel x, $f(x) \times f(-x) \neq 0$ et donc pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

1.3. Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$ et $g' = g$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{[f(x)]^2} = 0.$$

Donc la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x, $\varphi(x) = \varphi(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = 1$ et donc que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$. Ceci montre l'unicité de la fonction f.

1.4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On sait que $f(a) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $\psi(x) = \dfrac{f(a+x)}{f(a)}$. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$\psi'(x) = \frac{f'(a+x)}{f(a)} = \frac{f(a+x)}{f(a)} = \psi(x).$$

De plus, $\psi(0) = \dfrac{f(0)}{f(0)} = 1$. En résumé, la fonction ψ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\psi' = \psi$ et ψ. Par unicité d'une telle fonction, on a $\psi = f$ et donc pour tout réel x, $\dfrac{f(a+x)}{f(a)} = f(x)$ ou encore pour tout réel x, $f(a+x) = f(a) \times f(x)$. On a montré que pour tous réels a et b, $f(a+b) = f(a) \times f(b)$.

1.5. En particulier, pour tout réel a, $f(a) = \left[f\left(\dfrac{a}{2}\right)\right]^2 \geqslant 0$. Comme d'autre part, la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, pour tout réel a, $f(a) > 0$.

2.

2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$. Alors, $-1 < \dfrac{x}{n} < 1$ puis $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ et $1 - \dfrac{x}{n} > 0$. $u_n(x)$ et $u_n(-x)$ existent et $u_n(-x)$ n'est pas nul. Donc, $u_n(x)$ et $v_n(x)$ existent.

2.2. Soit $a \in]-1, +\infty[$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

- L'inégalité est vraie quand $n = 1$ puisque $(1+a)^1 = 1 + a \geqslant 1 + 1 \times a$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)^n \times (1+a) \\ &\geqslant (1+na) \times (1+a) \text{ (par hypothèse de récurrence et car } 1+a \geqslant 0) \\ &= 1 + (n+1)a + na^2 \\ &\geqslant 1 + (n+1)a.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

2.3. i. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$. Alors, $1 + \dfrac{x}{n} > 0$ puis $u_n(x) \neq 0$ et donc

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = u_n(x) \times \frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n}}$$
$$= u_n(x) \times \left(1+\frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1}.$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$ (donc $n \in \mathbb{N}^*$). Soit $a = \dfrac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} - 1 = -\dfrac{\dfrac{x}{n(n+1)}}{1+\dfrac{x}{n}}$.

Si $x \leqslant 0$, cette dernière expression est positive et donc $a \in]-1, +\infty[$. Si $x > 0$, alors $\dfrac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} > 0$ puis $a > -1$ et encore une fois $a \in]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité de Bernoulli et on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} &= (1+a)^{n+1} \\
&\geqslant 1+(n+1)a = 1+(n+1)\left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} - 1\right) = n+(n+1)\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}} \\
&= \frac{n+x+(n+1)+x}{1+\dfrac{x}{n}} = \frac{2n+1+2x}{1+\dfrac{x}{n}} \\
&\geqslant \frac{2n+1-2|x|}{1+\dfrac{x}{n}} \text{ (car } 1+\frac{x}{n} > 0) \\
&\geqslant \frac{1}{1+\dfrac{x}{n}} \text{ (car } 2n-2|x| = 2(n-|x|) \geqslant 0).
\end{aligned}$$

iii. Puisque $1+\dfrac{x}{n} > 0$, on en déduit que $\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \times \left(\dfrac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant 1$ puis, comme $u_n(x)$ est positif, on a

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \left(1+\frac{x}{n}\right) \times \left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} \geqslant u_n(x) \times 1 = u_n(x).$$

Ceci montre que la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante.

2.4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, la suite $(u_n(-x))_{n>|x|}$ est croissante et strictement positive. Mais alors la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante en tant qu'inverse d'une suite strictement positive croissante.

2.5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel tel que $n > |x|$.

i.

$$v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right) = v_n(x)\left(1 - u_n(x)u_n(-x)\right) = v_n(x)\left(1 - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)$$
$$= v_n(x)\left(1 - \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right).$$

ii. Puisque $|x| < n$, on a $x^2 < n^2$ puis $0 \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leqslant 1$ puis $0 \leqslant \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$ (par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0, 1]$) et enfin $1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 0$. Comme d'autre part $v_n(x) \geqslant 0$, on a montré que $v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0$.

iii. Puisque $0 \leqslant \dfrac{x^2}{n^2} < 1$, on a $-\dfrac{x^2}{n^2} \in]-1, +\infty[$. On peut donc appliquer l'inégalité de Bernoulli qui fournit $\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1 + n\left(-\dfrac{x^2}{n^2}\right) = 1 - \dfrac{x^2}{n}$ puis $1 - \left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant \dfrac{x^2}{n}$. Puisque $v_n(x) \geqslant 0$, on en déduit que

$$v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n}.$$

2.6. D'après la question 2.4, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante. Donc, pour tout entier naturel $n > |x|$, on a $v_n(x) \times \dfrac{x^2}{n} \leqslant v_{E(|x|)+1}(x) \times \dfrac{x^2}{n}$. Mais alors, d'après les questions 2.5.ii et 2.5.iii, pour tout entier naturel $n > |x|$,

$$0 \leqslant v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_{E(|x|)+1}(x) \times \frac{x^2}{n}.$$

Les deux membres de cet encadrement tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ converge et a pour limite 0.

En résumé, la suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ est croissante, la suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante et la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ converge vers 0. Donc les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ sont adjacentes. On en déduit que ces deux suites sont convergentes de même limite.

2.7. i. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n(0) = \left(1 + \dfrac{0}{n}\right)^n = 1$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $f(0) = 1$.

ii. Pour $a = x_0$ et $k = h$, on obtient $f(x_0 + h) - f(x_0) \geqslant hf(x_0)$.
Pour $a = x_0 + h$ et $k = -h$, on obtient $f(x_0) - f(x_0 + h) \geqslant -hf(x_0 + h)$ puis $-(1 - h)f(x_0 + h) \geqslant -f(x_0)$ puis $(1 - h)f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ puis $f(x_0 + h) \leqslant \dfrac{1}{1 - h}f(x_0)$ (car $1 - h > 0$) puis $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant \left(\dfrac{1}{1 - h} - 1\right)f(x_0)$ et enfin $f(x_0 + h) - f(x_0) \leqslant \dfrac{h}{1 - h}f(x_0)$.

iii. Soit $h \in]0, 1[$. D'après la question précédente, $f(x_0) \leqslant \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant \dfrac{f(x_0)}{1 - h}$. Quand h tend vers 0 par valeurs supérieures, les deux membres de cet encadrement tendent vers $f(x_0)$. On en déduit que le taux $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite à droite en 0 et que cette limite à droite est égale à $f(x_0)$.

Soit $h \in] - 1, 0[$. D'après la question précédente, $f(x_0) \geqslant \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant \dfrac{f(x_0)}{1 - h}$. Quand h tend vers 0 par valeurs inférieures, les deux membres de cet encadrement tendent vers $f(x_0)$. On en déduit que le taux $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a une limite à gauche en 0 et que cette limite à gauche est égale à $f(x_0)$.

En résumé, f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et ses dérivées à gauche et à droite sont égales. On en déduit que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = f(x_0)$.

f est donc l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et telle que $f(0) = 1$.

Partie B : évolution d'une population

1. L'équation différentielle (E) s'écrit $y' = f(x, y)$ où pour tous réels x et y, $f(x, y) = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à deux variables. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation (E) admet une solution maximale et une seule prenant la valeur N_0 en 0.

N étant par définition une solution maximale prenant la valeur N_0 en 0, on a montré l'existence et l'unicité de la fonction N.
2.

2.1. Pour tout réel $t \in I$, $N(t) < K$ puis $\dfrac{N(t)}{K} < 1$ (car $K > 0$) et donc $1 - \dfrac{N(t)}{K} > 0$. D'autre part, $r > 0$ et pour tout t de I, $N(t) > 0$. Finalement, pour tout réel t de I,

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) > 0.$$

La fonction N est donc strictement croissante sur I.

2.2. I contient $[0, +\infty[$. La fonction fonction N est croissante sur I et est majorée par K sur I. On en déduit que la fonction N a une limite réelle ℓ quand t tend vers $+\infty$ et que $\ell \leqslant K$. Notons d'autre part que $\ell \geqslant N(0) = N_0 > 0$.

2.3. Supposons par l'absurde $\ell < K$. La fonction N' tend donc vers $r\ell\left(1 - \frac{\ell}{K}\right) = L$. L est un réel strictement positif. Il existe alors un réel $A > 0$ tel que pour $t \geqslant A$, on a $N'(t) \geqslant \frac{L}{2}$. Par intégration, pour tout $t \geqslant A$, on a $N(t) \geqslant N(A) + \frac{L}{2}(t - A)$. Puisque $\frac{L}{2} > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(A) + \frac{L}{2}(t - A) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$. Ceci est faux et donc $\ell = K$.

3.

3.1. La fonction g est définie et dérivable sur I en tant qu'inverse d'une fonction dérivable sur I et ne s'annulant pas sur I. Pour tout réel t de I,

$$g'(t) = -\frac{N'(t)}{(N(t))^2} = -\frac{1}{(N(t))^2} \times rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = -\frac{r}{N(t)} + \frac{r}{K} = -rg(t) + \frac{r}{K}.$$

La fonction g est donc solution de l'équation différentielle $y' = -ry + \frac{r}{K}$ sur I.

3.2. (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Une solution particulière de (E') sur $\mathbb{R}$ est la fonction constante $t \mapsto \frac{1}{K}$ et une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée est la fonction $t \mapsto e^{-rt}$. Les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il existe un réel λ tel que pour tout $t \in$ I, $\frac{1}{N(t)} = \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$. La condition $N(0) = N_0$ fournit $\lambda = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$ et donc, pour tout $t \in$ I,

$$N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}.$$

3.3. Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-rt} = 0$, on retrouve $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = K$.

