SUJET BLANC N°3

Durée : 5 heures.

Le sujet est composé d'**un exercice** et de **deux problèmes indépendants**.

EXERCICE

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de (E) développables en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$, avec $r > 0$?

PROBLÈME 1 : FONCTION DIGAMMA

PARTIE I : Préliminaires

1 - Soit $x \in]0, +\infty[$. Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note, pour tout $x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ (fonction Gamma d'Euler).

2 - Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) > 0$.

3 - On cherche à présent à établir que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On définit

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & e^{-t}t^{x-1} \end{array}$$

(a) Justifier rapidement que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

(b) Justifier rapidement que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [1, +\infty[$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| \leq \varphi_1(t)$ avec φ_1 intégrable sur $[1, +\infty[$.

(d) Montrer que pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, 1]$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| \leq \varphi_2(t)$ avec φ_2 intégrable sur $]0, 1]$.

Sous ces conditions, le Théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique et on a :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt\,.$$

4 - Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}dt - \frac{1}{n}$.

(a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

(b) Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge.

Dans la suite de ce problème, la limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ sera notée γ, appelée constante d'Euler, et on définit pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, appelée fonction Digamma.

PARTIE II : Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

1 - On fixe pour cette question un réel $x \in]0, +\infty[$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \in]0, n[$, $f_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ et pour tout $t \in [n, +\infty[$, $f_n(t) = 0$.

(a) Démontrer que pour tout $t \in [0, 1[$, $\ln(1-t) \leq -t$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$.

(b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$.
Indication : On pourra utiliser le développement limité $\ln(1+u) = u + o(u)$ au voisinage de 0.

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ étant ainsi une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers f et qui est uniformément bornée par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$, le Théorème de convergence dominée s'applique, et donne le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)dt\,.$$

(c) En déduire que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt.$

2 - On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}du\,.$

(a) Justifier l'existence de l'intégrale $I_n(x)$.

(b) Déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

(c) En déduire, pour n entier naturel et pour $x > 0$ une expression de $I_n(x)$.

(d) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt = n^x I_n(x)\,.$

(e) En déduire que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n! n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$ (formule de Gauss).

3 - On rappelle que tout entier $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Montrer que pour $n \geq 1$ et $x > 0$:

$$\frac{1}{n^x}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right].$$

(b) Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right]. \quad \text{(formule de Weierstrass).}$$

4 - (a) En déduire que la série $\sum_{k\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction g définie par $g(x) = -\ln(\Gamma(x)xe^{\gamma x})$.

(b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée comme somme d'une série de fonctions.

(c) On rappelle que pour tout $x > 0$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Déduire de ce qui précède que, pour tout $x > 0$, $\psi(x) = -\dfrac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}\right)$.

5 - (a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt$.

(b) Calculer, pour tout $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x)$, puis démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

(c) Soit $x > 0$ fixé. On pose, pour tout $y \in]0,+\infty[$ et k entier naturel, $j_k(y) = \dfrac{1}{k+y+1} - \dfrac{1}{k+y+x}$. Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
En déduire $\lim_{n\to+\infty}(\psi(x+n) - \psi(1+n))$.

6 - Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

— $f(1) = -\gamma$.

— pour tout $x > 0, f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$.

— Pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty}(f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

PROBLÈME 2 : AUTOUR DES MATRICES BINAIRES

On propose d'étudier, dans ce second problème, différents aspects des matrices à coefficients dans $\{-1,1\}$ (matrices binaires) : inversibilité, orthogonalité des colonnes (matrices de Hadamard) et propriétés du spectre.

Dans tous le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On débute l'étude par des exemples en petite dimension. En dimension n, on aboutit notamment à trois résultats sur de telles matrices :

- une matrice de Hadamard ne peut exister que si $n=2$ ou si n est un multiple de 4 ;
- on peut construire une matrice binaire inversible de n'importe quelle taille n ;
- les valeurs propres des matrices binaires sont de module inférieur ou égal à n.

Notons $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n,
$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et 1 colonne,
A^T la matrice transposée d'une matrice A,
I_n la matrice identité de taille n,
$\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice carrée réelle A.

Dans tout le problème, on munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini de la façon suivante :

$$\forall\,(X,Y)\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\times\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad \langle X,Y\rangle = X^T\cdot Y.$$

Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on note :
$A_{i,j}$ le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne de A,
$C_j(A)$ la j-ème colonne de A et $L_i(A)$ la i-ème ligne de A.

On définit les trois ensembles suivants :

$$\mathscr{B}_n=\left\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\mid \forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j}\in\{-1,1\}\right\},$$

$$\mathscr{G}_n=\left\{A\in\mathscr{B}_n\mid A \text{ est inversible}\right\},$$

$$\mathscr{H}_n=\left\{A\in\mathscr{B}_n\mid A^T\cdot A=nI_n\right\}.$$

On admettra que le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des entiers relatifs est aussi un entier relatif.

1 - Donner un exemple de matrices A_2 et A_2' dans $\mathscr{B}_2$ telles que $A_2\in\mathscr{H}_2$ et $A_2'\notin\mathscr{G}_2$.

2 - Soit $A_3=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$. La matrice A_3 appartient-elle à $\mathscr{B}_3$? à $\mathscr{H}_3$? à $\mathscr{G}_3$?

3 - Soient $A_4=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$.

a - Montrer que A_4 appartient à $\mathscr{H}_4$.

b - Montrer que A_4 a pour polynôme minimal X^2-4.

c - En déduire que A_4 est diagonalisable et déterminer $\mathrm{Sp}(A_4)$.

d - Proposer une méthode pour trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A_4=PDP^{-1}$.

4 - Vérifier que $\mathscr{H}_n \subset \mathscr{G}_n \subset \mathscr{B}_n$ et que $\mathscr{B}_n$ est un ensemble fini dont on donnera le cardinal.

5 - Montrer que, pour une matrice $A \in \mathscr{B}_n$, les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $A \in \mathscr{H}_n$;

ii) $(C_j(A))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille orthogonale de l'espace euclidien $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;

iii) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} A$ est une matrice orthogonale.

6 - Soit $A \in \mathscr{G}_n$. On transforme A en une matrice A' par les opérations sur les lignes de A suivantes : $\forall\, i \in [\![2, n]\!]$, $L_i \leftarrow A_{1,1} \cdot L_i - A_{i,1} \cdot L_1$ si bien que $L_i(A') = A_{1,1} \cdot L_i(A) - A_{i,1} \cdot L_1(A)$.

a - Donner la relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

b - Montrer que $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec B' une matrice carrée d'ordre $n-1$, qui est inversible et donc tous les coefficients sont dans l'ensemble $\{-2, 0, 2\}$.

c - Montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.

d - Soit m un entier naturel tel que $m^{m/2}$ est un entier pair. Montrer que m est nécessairement pair.

e - On suppose, dans cette question, que $A \in \mathscr{H}_n$ et que $n \geqslant 3$.
Montrer que $|\det(A)| = n^{n/2}$ et en déduire que n est un multiple de 4.

7 - Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$ et $r = n - 1$. On définit la fonction $\tau_r : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ par :

$$\forall\, (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r, \quad \tau_r(x_1, \ldots, x_r) = (x_2, x_1, x_3, \ldots, x_r).$$

a - Montrer que τ_r définit un automorphisme de $\mathbb{R}^r$.

b - Déterminer la matrice, notée T_r, associé à τ_r dans la base canonique de $\mathbb{R}^r$.

c - On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 2T_r & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

On transforme A en A' par les opérations sur les lignes de A suivantes : $\forall\, i \in [\![2, n]\!]$, $L_i \leftarrow L_1 - L_i$ si bien que $L_i(A') = L_1(A) - L_i(A)$.
Montrer que A' est un élément de $\mathscr{G}_n$.

8 - Donner un exemple explicite de matrice A qui soit dans $\mathscr{G}_6$ mais pas dans $\mathscr{H}_6$.

9 - Soient $A \in \mathscr{B}_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.

a - Montrer qu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

i - pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = \lambda x_i$,

ii - il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que : $x_k \neq 0$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $|x_j| \leqslant |x_k|$.

b - Montrer que $|\lambda| \leqslant n$.

c - Montrer que : $\sup\left(\Big\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } A \in \mathscr{B}_n\Big\}\right) = n$.

Fin de l'énoncé