
SUJET BLANC N°3

Durée : 5 heures.

Le sujet est composé d'un **exercice** et de **deux problèmes indépendants**.
L'exercice 1 et le problème 1 sont issus d'une épreuve du CCP 2016 et le problème 2 d'une épreuve du CCP 2015. Le corrigé est essentiellement un extrait des corrigés respectifs de Basbois et Broizat, et de Masselin.

EXERCICE

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

Existe-t-il des solutions non nulles de (E) développables en série entière sur un intervalle du type $] -r, r[$, avec $r > 0$?

Supposons que l'équation différentielle (E) possède une solution développable en série entière sur $] -r, r[$ (avec $r > 0$), notée $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En dérivant deux fois cette série terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient pour tout $x \in] -r, r[$:

$$(x^2 - x)y'(x) = (x^2 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,$$

ainsi que

$$x^2 y''(x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n.$$

En sommant ces développements en série entière, il vient, pour tout $x \in] -r, r[$:

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) + (x^2 - x)y'(x) + 2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} ((n^2 - 2n + 2) a_n + (n-1) a_{n-1}) x^n + 2a_0. \end{aligned}$$

Puisque y est solution de (E), on obtient par unicité du développement en série entière les relations

$$\begin{cases} 2a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n^2 - 2n + 2) a_n + (n-1) a_{n-1} = 0 \end{cases}.$$

Puisque $n^2 - 2n + 2 = 1 + (n-1)^2 \neq 0$, ces relations se réécrivent $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, a_n = \frac{1-n}{1+(n-1)^2} a_{n-1} \end{cases}$,

ce qui entraîne la nullité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une récurrence immédiate.

En conclusion, on a montré qu'une telle solution est nécessairement la fonction nulle.

Il n'existe donc pas de solution non nulle de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

PROBLÈME 1 : FONCTION DIGAMMA

PARTIE I : Préliminaires

- 1 - Soit $x \in]0, +\infty[$. Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
 La fonction $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ par produit de fonctions continues, les fonctions exponentielle et puissances étant bien continues sur $]0, +\infty[$.
 On a $h_x(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ et $t^2 e^{-t}t^{x-1} = t^{x+1}e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $h_x(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.
 Ainsi, par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann en 0 et en $+\infty$, $h_x : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On note, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ (fonction Gamma d'Euler).

- 2 - Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.
 Soit $x > 0$. La fonction h_x définie dans la question précédente est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. La positivité de l'intégrale nous donne $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt \geq 0$ et la continuité de h_x implique qu'on ne pourrait avoir $\int_0^{+\infty} h_x(t)dt = 0$ que si h_x était identiquement nulle sur $]0, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas.
 Ainsi $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)dt > 0$, et ce pour tout $x > 0$.

- 3 - On cherche à présent à établir que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On définit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto e^{-t}t^{x-1} \end{aligned}$$

- (a) Justifier rapidement que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et déterminer $\frac{\partial h}{\partial x}$.
 Fixons $t > 0$. La fonction exponentielle étant de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction $x \mapsto h(x, t) = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est également de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$, et donc en particulier de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.
 De plus, pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$.

- (b) Justifier rapidement que pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 Fixons $x > 0$. Les fonctions exponentielle et logarithmique étant continues, la fonction $t \mapsto h(x, t) = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues.

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R}_+^* .

- (c) Montrer que pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [1, +\infty[$, on a $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_1(t)$ avec φ_1 intégrable sur $[1, +\infty[$.
 Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [1, +\infty[$ on a $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \ln(t)e^{-t}t^{b-1}$. Notons φ_1 la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $\varphi_1(t) = \ln(t)e^{-t}t^{b-1}$. Cette fonction est continue. De plus, $t^2\varphi_1(t) = \ln(t)e^{-t}t^{b+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ par croissance comparée, d'où $\varphi_1(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$. Ainsi, φ_1 est intégrable sur $[1, +\infty[$.

- (d) Montrer que pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, 1]$, on a $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_2(t)$ avec φ_2 intégrable sur $]0, 1]$. Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times]0, 1]$ on a $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1}$. Notons φ_2 la fonction définie sur $]0, 1]$ par $\varphi_2(t) = |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1}$. Cette fonction est continue. De plus, comme $a > 0$, on a $t^{1-\frac{a}{2}}\varphi_2(t) = t^{\frac{a}{2}}|\ln(t)|e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, et donc $\varphi_2(t) = o_{t \rightarrow 0^+}\left(t^{1-\frac{a}{2}}\right)$, avec $1 - \frac{a}{2} < 1$. Ainsi, φ_2 est intégrable sur $]0, 1]$.

Sous ces conditions, le Théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique et on a :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt.$$

- 4 - Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$.

- (a) Justifier que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, donc pour tout entier $n \geq 2$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Le série de termes positifs $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$ converge vers 1 (somme télescopique), donc la série de termes positifs $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge également.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$

- (b) Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge.

Pour $n \geq 2$, on a $\sum_{k=2}^n u_k = \int_1^n \frac{dt}{t} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ par relation de Chasles, d'où

$$\sum_{k=2}^n u_k = \ln(n) + 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 - H_n.$$

Comme la suite $\left(\sum_{k=2}^n u_k \right)_{n \geq 2}$ converge par la question précédente, il s'ensuit que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge.

Dans la suite de ce problème, la limite de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ sera notée γ , appelée constante d'Euler, et on définit pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, appelée fonction Digamma.

PARTIE II : Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

- 1 - On fixe pour cette question un réel $x \in]0, +\infty[$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ telle que pour tout $t \in]0, n[$, $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ et pour tout $t \in [n, +\infty[$, $f_n(t) = 0$.

- (a) Démontrer que pour tout $t \in [0, 1[$, $\ln(1-t) \leq -t$. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$.

La dérivée de $t \mapsto \ln(1-t) + t$ est la fonction $t \mapsto \frac{-t}{1-t}$ qui est négative sur $]0, 1[$. Ainsi, pour tout $t \in]0, 1[$, $\ln(1-t) + t \leq \ln(1-0) + 0 = 0$ et donc $\ln(1-t) \leq -t$.

Soit $n \geq 1$. Notons tout d'abord que f_n est une fonction positive : pour $t \geq n$, $f_n(t) = 0$ et pour $t \in]0, n[$, $f_n(t)$ est égal au produit de deux termes positifs, le produit de puissances de nombres positifs. De plus, par ce qui précède, pour $t \in]0, n[$ on a $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$, d'où,

par croissance de l'exponentielle, $e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} \leq e^{-t}$ et donc, par produit par une quantité positive, $f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$. Enfin comme pour tout $t \geq n$, $e^{-t} t^{x-1} \geq 0 = f_n(t)$, on conclut que pour tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$.

- (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$.

Indication : On pourra utiliser le développement limité $\ln(1+u) = u + o(u)$ au voisinage de 0.

Fixons $t \in]0, +\infty[$. Pour $n > t$, on a $f_n(t) = e^{n \ln(1 - \frac{t}{n})} t^{x-1}$. Or, $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$ d'où $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -t$, et, par continuité de l'exponentielle, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{x-1}$.

La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ étant ainsi une suite de fonctions continues par morceaux qui converge simplement vers f et qui est uniformément bornée par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$, le Théorème de convergence dominée s'applique, et donne le résultat suivant :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

- (c) En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

Par définition de Γ , on a $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(t) dt$. Pour $n \geq 1$, comme $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ pour $t \in]0, n[$ et $f_n(t) = 0$ pour $t \in [n, +\infty[$, on a $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$. Le résultat donné par le théorème de convergence dominée ci-dessus, permet alors de conclure.

2 - On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

- (a) Justifier l'existence de l'intégrale $I_n(x)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

La fonction $\alpha : u \mapsto (1-u)^n u^{x-1}$ est bien définie et continue sur $]0, 1[$.

De plus, $\alpha(u) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} u^{x-1} = \frac{1}{u^{1-x}}$, avec $1-x < 1$, donc α est intégrable sur $]0, 1[$ par comparaison de fonctions positives et critère de Riemann.

Cela assure la bonne définition de $I_n(x)$.

- (b) Déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$.

On définit sur $]0, 1[$ les fonctions $\alpha_1 : u \mapsto (1-u)^n$ et $\alpha_2 : u \mapsto \frac{u^x}{x}$. Ces fonctions sont de classe C^1 , et on a $\alpha_1(u)\alpha_2'(u)$ qui admet une limite finie pour $u \rightarrow 0^+$, en l'occurrence 0. On en déduit, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \int_0^1 \alpha_1(u)\alpha_2'(u) du = \alpha_1(1)\alpha_2(1) - \lim_{u \rightarrow 0^+} \alpha_1(u)\alpha_2(u) - \int_0^1 \alpha_1'(u)\alpha_2(u) du \\ &= 0 - 0 + \frac{n}{x} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x du = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1). \end{aligned}$$

(c) En déduire, pour n entier naturel et pour $x > 0$ une expression de $I_n(x)$.

Soit $x > 0$.

On a $I_0(x) = \int_0^1 u^{x-1} du = \left[\frac{u^x}{x} \right]_0^1 = \frac{1}{x}$.

Soit $n \geq 1$. On a, par une récurrence immédiate,

$$I_n(x) = \frac{n}{x} I_{n-1}(x+1) = \frac{n}{x} \times \frac{n-1}{x+1} I_{n-2}(x+2) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} I_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

(d) Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \geq 1$, $\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = n^x I_n(x)$.

Soit $x > 0$ et $n \geq 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{n}$ réalise une bijection strictement croissante et de classe C^1 de $]0, n]$ sur $]0, 1]$. Via le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, on obtient donc :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^1 (1-u)^n (nu)^{x-1} n du = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du = n^x I_n(x).$$

(e) En déduire que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ (formule de Gauss).

Soit $x > 0$. Le résultat de la question 1.c. se réécrit ainsi : $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x I_n(x)$. Et le calcul de la question 2.c permet de conclure :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^x \times \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

3 - On rappelle que tout entier $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

(a) Montrer que pour $n \geq 1$ et $x > 0$:

$$\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}\right].$$

Soit $n \geq 1$ et $x > 0$. On a

$$e^{xH_n} = e^{x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} e^{-x \ln(n)} = \left(\prod_{k=1}^n e^{\frac{x}{k}} \right) \times \frac{1}{n^x},$$

d'où le résultat.

(b) Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}\right]. \quad (\text{formule de Weierstrass}).$$

Soit $x > 0$. D'après la formule de Gauss établie à la question 2.e, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\prod_{k=0}^n (x+k)}{n! n^x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^x} \times \frac{\prod_{k=1}^n (k+x)}{\prod_{k=1}^n k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

Grâce à la question précédente, on réécrit :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k}\right].$$

Or $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$ donc, par continuité de l'exponentielle, $e^{xH_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{x\gamma}$ et, finalement, par produit de limites, la suite $\left(\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \right)_{n \geq 1}$ converge et

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right].$$

- 4 - (a) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction g définie par $g(x) = -\ln(\Gamma(x)x e^{\gamma x})$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. On commence par réécrire la formule précédente :

$$\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Gamma(x)x e^{\gamma x}}.$$

Par continuité de \ln , on en déduit :

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}} \right] \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{\Gamma(x)x e^{\gamma x}} \right), \text{ i. e.}$$

$$\sum_{k=1}^n \left[\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(\Gamma(x)x e^{\gamma x}).$$

Ainsi, on a prouvé que la série $\sum_{k \geq 1} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$ converge simplement vers g .

- (b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée comme somme d'une série de fonctions.

On note $g = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k$ sur $]0, +\infty[$.

Outre la convergence de $\sum_{k \geq 1} g_k$ vers g établie à la question précédente, on a :

— Les fonctions g_k sont toutes de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

— Pour tout $k \geq 1$, pour tout $x > 0$, $g'_k(x) = \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} = -\frac{x}{k(k+x)}$.

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R}_+^* . On a donc $0 < a \leq b$. Alors pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [a, b]$, $|g'_k(x)| \leq \frac{b}{k^2}$ et, comme $\sum_{k \geq 1} \frac{b}{k^2}$ converge, on a établi la convergence normale,

donc uniforme, de $\sum_{k \geq 1} g'_k$ sur $[a, b]$.

On en déduit que g est de classe \mathcal{C}^1 , avec : $\forall x > 0$, $g'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g'_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} \right)$.

- (c) On rappelle que pour tout $x > 0$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Déduire de ce qui précède que, pour tout

$$x > 0, \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

Par définition de la fonction g , on a, pour tout $x > 0$,

$$g(x) = -\ln(\Gamma(x)x e^{\gamma x}) = -\ln(\Gamma(x)) - \ln(x) - \gamma x.$$

Dérivant cette relation sur \mathbb{R}_+^* , on obtient :

$$g'(x) = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{x} - \gamma,$$

c'est-à-dire, vu que $\psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$, $\psi(x) = -g'(x) - \frac{1}{x} - \gamma$.

Comme $-g'(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k+x} + \frac{1}{k} \right)$, on a finalement établi :

$$\forall x > 0, \psi(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

5 - (a) Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

Posant $x = 1$ dans la formule précédente, on trouve : $\psi(1) = -1 - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$,

d'où, par télescopage, $\psi(1) = -1 - \gamma + 1 = -\gamma$.

De plus $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} 1 - e^{-X} = 1$ donc, vu que $\psi(1) =$

$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$, on obtient $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Mais en reprenant l'expression obtenue à la question I.3., on constate que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$, d'où finalement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = -\gamma.$$

(b) Calculer, pour tout $x > 0$, $\psi(x+1) - \psi(x)$, puis démontrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Soit $x > 0$. D'après la formule de la question 4.c., on a

$$\begin{aligned} \psi(x+1) - \psi(x) &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x} \right) \end{aligned}$$

par somme de séries convergentes. Et donc :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{x}.$$

Remarque. On aurait aussi pu procéder ainsi :

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \right) \right).$$

Or, il est bien connu que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (il suffit d'intégrer par parties), donc

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\psi(k+1) - \psi(k) = \frac{1}{k}$.

Il s'ensuit, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\psi(n) = \psi(1) + \sum_{k=1}^{n-1} (\psi(k+1) - \psi(k)) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(c) Soit $x > 0$ fixé. On pose, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et k entier naturel, $j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$. Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(x+n) - \psi(1+n))$.

Pour $y \in]0, +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$, on peut réécrire $j_k(y) = \frac{k+y+x-k-y-1}{(k+y+1)(k+y+x)} = \frac{x-1}{(k+y+1)(k+y+x)}$ donc, pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\forall y > 0, |j_k(y)| \leq \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}.$$

Comme $\sum_{k \geq 0} \frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)}$ est une série convergente, vu que $\frac{|x-1|}{(k+1)(k+x)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x-1|}{k^2}$, on a la convergence normale, donc uniforme, de $\sum_{k \geq 0} j_k$ sur $]0, +\infty[$.

Ensuite, reprenant la formule de 4.c., on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = -\frac{1}{x+n} + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+n} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1+n} \right),$$

et selon le même principe de calcul qu'à la question précédente, on aboutit à :

$$\psi(x+n) - \psi(1+n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+1+n} - \frac{1}{k+x+n} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} j_k(n).$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j_k(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par le théorème de la double limite (qui s'applique ici car la série de fonctions étudiée converge uniformément sur un voisinage de $+\infty$),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(x+n) - \psi(1+n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} j_k(n) = 0.$$

6 - Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$.
- pour tout $x > 0$, $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$.
- Pour tout $x > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Par analyse-synthèse :

- **Analyse** : Soit f solution. On va montrer que f vérifie la formule de ψ établie en 4.c., à savoir :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

Puisque $\frac{1}{t} = f(t+1) - f(t)$ pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} (f(k+1) - f(k) - f(k+x+1) + f(k+x)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) + \sum_{k=1}^n (f(k+x) - f(k+x+1)) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f(n+1) - \underbrace{f(1)}_{=-\gamma} + f(1+x) - f(n+x+1) \right) \\
 &= f(x+1) + \gamma - \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+1+n) - f(1+n))}_{=0} = f(x) + \frac{1}{x} + \gamma,
 \end{aligned}$$

ce qui montre bien la relation voulue, et donc $f = \psi$.

- **Synthèse** : La seule solution éventuelle au problème est donc ψ . Mais on a prouvé en 5.a., 5.b. et 5.c. que ψ satisfait les trois conditions voulues, donc finalement ψ est solution, et c'est la seule.

PROBLÈME 2 : AUTOUR DES MATRICES BINAIRES

On propose d'étudier, dans ce second problème, différents aspects des matrices à coefficients dans $\{-1, 1\}$ (matrices binaires) : inversibilité, orthogonalité des colonnes (matrices de Hadamard) et propriétés du spectre.

Dans tous le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On débute l'étude par des exemples en petite dimension. En dimension n , on aboutit notamment à trois résultats sur de telles matrices :

- une matrice de Hadamard ne peut exister que si $n = 2$ ou si n est un multiple de 4 ;
- on peut construire une matrice binaire inversible de n'importe quelle taille n ;
- les valeurs propres des matrices binaires sont de module inférieur ou égal à n .

Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n ,

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et 1 colonne,

A^T la matrice transposée d'une matrice A ,

I_n la matrice identité de taille n ,

$\text{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes d'une matrice carrée réelle A .

Dans tout le problème, on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini de la façon suivante :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle = X^T \cdot Y.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note :

$A_{i,j}$ le coefficient situé à la i -ème ligne et à la j -ème colonne de A ,

$C_j(A)$ la j -ème colonne de A et $L_i(A)$ la i -ème ligne de A .

On définit les trois ensembles suivants :

$$\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_{i,j} \in \{-1, 1\}\},$$

$$\mathcal{G}_n = \{A \in \mathcal{B}_n \mid A \text{ est inversible}\},$$

$$\mathcal{H}_n = \{A \in \mathcal{B}_n \mid A^T \cdot A = nI_n\}.$$

On admettra que le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des entiers relatifs est aussi un entier relatif.

1 - Donner un exemple de matrices A_2 et A'_2 dans \mathcal{B}_2 telles que $A_2 \in \mathcal{H}_2$ et $A'_2 \notin \mathcal{G}_2$.

On peut choisir $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 - Soit $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A_3 appartient-elle à \mathcal{B}_3 ? à \mathcal{H}_3 ? à \mathcal{G}_3 ?

Tous les coefficients de A_3 sont dans $\{-1; 1\}$ donc $A_3 \in \mathcal{B}_3$.

$A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc A_3 n'est pas dans \mathcal{H}_3 .

On calcule le déterminant de A_3 en ajoutant C_3 à C_1 :

$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ et, en développant par rapport à la première colonne, $\det(A_3) = 4 \neq$

0 donc $A_3 \in \mathcal{G}_3$.

3 - Soient $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a - Montrer que A_4 appartient à \mathcal{H}_4 .

Tous les coefficients de A_4 sont dans $\{-1; 1\}$ donc $A_4 \in \mathcal{B}_4$.

En effectuant le produit matriciel, on trouve $A_4^T \cdot A_4 = 4I_4$ donc $A_4 \in \mathcal{H}_4$.

b - Montrer que A_4 a pour polynôme minimal $X^2 - 4$.

Comme A_4 est une matrice symétrique, le calcul précédent implique que $A_4^2 = 4I_4$. Ainsi, $X^2 - 4$ est un polynôme annulateur de A_4 . Comme $X^2 - 4 = (X + 2)(X - 2)$ et que A_4 est différent de $-2I_4$ et de $2I_4$, le polynôme $X^2 - 4$ est donc le polynôme minimal de $X^2 - 4$.

c - En déduire que A_4 est diagonalisable et déterminer $\text{Sp}(A_4)$.

Le polynôme minimal de A_4 étant scindé à racines simples valant 2 et -2, cette matrice est diagonalisable et $\text{Sp}(A_4) = \{-2, 2\}$.

d - Proposer une méthode pour trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A_4 = PDP^{-1}$.

La matrice A_4 étant une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. On peut remarquer que la trace de A_4 est nulle, ce qui implique que les valeurs propres 2 et -2 ont même multiplicité, et donc que les deux sous-espaces propres de A_4 sont de dimension 2. Pour obtenir P , il suffit de chercher des bases orthonormées

de chacun des espaces propres (on peut par exemple pour chacun des espaces propres en déterminer une base, puis l'orthonormaliser avec le procédé de Gram-Schmidt).

- 4 - Vérifier que $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que \mathcal{B}_n est un ensemble fini dont on donnera le cardinal.

Soit $A \in \mathcal{H}_n$. L'entier n est non nul donc $\frac{1}{n}A^T A = I_n$ ce qui prouve que A est inversible, d'inverse $\frac{1}{n}A^T$. Par conséquent $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$. Par définition on a aussi $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ donc finalement $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$.

L'ensemble \mathcal{B}_n est l'ensemble des matrices carrées de taille n dont les coefficients sont pris dans $\{-1; 1\}$, donc \mathcal{B}_n est un ensemble fini de cardinal 2^{n^2} (il y a exactement 2 possibilités pour chacun des coefficients dont le nombre est n^2).

- 5 - Montrer que, pour une matrice $A \in \mathcal{B}_n$, les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $A \in \mathcal{H}_n$;
- ii) $(C_j(A))_{1 \leq j \leq n}$ est une famille orthogonale de l'espace euclidien $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- iii) $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ est une matrice orthogonale.

Soit $A \in \mathcal{B}_n$.

On suppose i).

Pour tous i et j entre 1 et n , $(A^T A)_{i,j} = C_i(A)^T C_j(A)$ (produit par blocs) donc, si i est différent de j , $C_i(A)^T C_j(A) = 0$: la famille $(C_j(A))_{1 \leq j \leq n}$ est orthogonale.

On a donc l'implication i) \implies ii).

On suppose ii).

On note, pour j entre 1 et n , $C'_j = C_j(\frac{1}{\sqrt{n}}A)$.

Par hypothèse (C'_1, \dots, C'_n) est orthogonale.

Comme les coefficients de A sont dans $\{-1; 1\}$, la norme de $C_j(A)$ est \sqrt{n} ($\sum_{i=1}^n A_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n 1 = n$) et donc la norme de C'_j est 1.

On en déduit que les colonnes de la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

et donc $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ est une matrice orthogonale.

On a montré l'implication ii) \implies iii).

On suppose iii).

Alors $A' = \frac{1}{\sqrt{n}}A$ est orthogonale donc $A'^T A' = I_n$ et, en multipliant par n , $A^T A = nI_n$:

$A \in \mathcal{H}_n$ (A est dans \mathcal{B}_n). On a donc iii) \implies i).

On peut alors conclure que les trois propositions sont équivalentes.

- 6 - Soit $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en une matrice A' par les opérations sur les lignes de A suivantes : $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $L_i \leftarrow A_{1,1} \cdot L_i - A_{i,1} \cdot L_1$ si bien que $L_i(A') = A_{1,1} \cdot L_i(A) - A_{i,1} \cdot L_1(A)$.

- a - Donner la relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

On conserve la première ligne $L_1(A)$ et pour chaque i entre 2 et n , on multiplie $L_i(A)$ par $A_{1,1}$, ce qui multiplie le déterminant par $A_{1,1}$, puis on retranche $A_{i,1} \cdot L_1$, ce qui laisse inchangé le déterminant, donc $\det(A') = A_{1,1}^{n-1} \det(A)$.

- b - Montrer que $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec B' une matrice carrée d'ordre $n-1$,

qui est inversible et donc tous les coefficients sont dans l'ensemble $\{-2, 0, 2\}$.

Pour i entre 2 et n et j entre 1 et n , $A'_{i,j} = A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}$.

On a donc $A'_{i,1} = 0$ et pour $j \geq 2$, $A'_{i,j}$ est la différence de deux nombres qui sont égaux à

1 ou -1 donc est égale à -2 , 0 ou 2 .

Par conséquent, $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec B' matrice carrée de taille $n-1$

dont tous les coefficients sont dans $\{-2, 0, 2\}$.

A' est alors triangulaire par blocs donc $\det(A') = A_{1,1} \det(B')$ avec A' inversible et $A_{1,1}$ non nul donc $\det(B') \neq 0$: B' est inversible.

c - Montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1} .

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne, $\det(B') = 2^{n-1} \det(B'')$ où B'' est une matrice dont tous les coefficients sont dans $\{-1; 0; 1\}$. Par conséquent $\det(A')$ est un multiple de 2^{n-1} . Comme $\det(A')$ et $\det(A)$ sont égaux au signe près ($A_{1,1}$ vaut 1 ou -1), $\det(A)$ est aussi un multiple de 2^{n-1} .

d - Soit m un entier naturel tel que $m^{m/2}$ est un entier pair. Montrer que m est nécessairement pair.

Supposons que $m = 2p + 1$. Alors $m^{m/2} = (2p + 1)^p \sqrt{2p + 1}$. Ou bien $2p + 1$ n'est pas un carré et alors $m^{m/2}$ n'est pas entier, ou bien $2p + 1$ est un carré et dans ce cas $\sqrt{2p + 1}$ est impair, et de même $m^{m/2}$ comme produit de nombres impairs.

e - On suppose, dans cette question, que $A \in \mathcal{H}_n$ et que $n \geq 3$.

Montrer que $|\det(A)| = n^{n/2}$ et en déduire que n est un multiple de 4 .

$A \in \mathcal{H}_n$ et $\det(A^T) = \det(A)$ donc $\det(A)^2 = \det(nI_n) = n^n$. Ainsi, $|\det(A)| = n^{n/2}$. Comme $n \geq 3$, d'après les deux questions précédentes, 2 divise $n^{n/2}$ et donc n est pair et $n \geq 4$. On peut donc écrire $n = 2p$ avec $p \geq 2$. Alors, $|\det(A)| = (2p)^p$ et 2^{2p-1} divise $2^p p^p$. Ainsi, 2^{p-1} divise p^p ; en particulier 2 divise p . On en déduit que n est un multiple de 4 .

7 - Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$ et $r = n - 1$. On définit la fonction $\tau_r : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ par :

$$\forall (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r, \quad \tau_r(x_1, \dots, x_r) = (x_2, x_1, x_3, \dots, x_r).$$

a - Montrer que τ_r définit un automorphisme de \mathbb{R}^r .

Soient $x = (x_1, \dots, x_r)$, $y = (y_1, \dots, y_r)$ deux éléments de \mathbb{R}^r et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \tau_r(x + \lambda y) &= \tau_r(x_1 + \lambda y_1, \dots, x_r + \lambda y_r) \\ &= (x_2 + \lambda y_2, x_1 + \lambda y_1, x_3 + \lambda y_3, \dots, x_r + \lambda y_r) \\ &= (x_2, x_1, x_3, \dots, x_r) + \lambda(y_1, y_2, y_3, \dots, y_r) \\ &= \tau_r(x) + \lambda \tau_r(y) \end{aligned}$$

τ_r est donc un endomorphisme de \mathbb{R}^r .

De plus, si $\tau_r(x) = 0$, alors $x = 0$ donc τ_r est injectif. Un endomorphisme injectif en dimension finie est bijectif donc τ_r est un automorphisme de \mathbb{R}^r .

b - Déterminer la matrice, notée T_r , associé à τ_r dans la base canonique de \mathbb{R}^r .

$\tau_r(1, 0, \dots, 0) = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\tau_r(0, 1, 0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0)$ et, si $i \geq 2$, $\tau_r(e_i) = e_i$ (e_i ième vecteur de la base canonique). Par conséquent, $T_r = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{r-2} \end{pmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c - On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & 2T_r & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

On transforme A en A' par les opérations sur les lignes de A suivantes : $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $L_i \leftarrow L_1 - L_i$ si bien que $L_i(A') = L_1(A) - L_i(A)$.

Montrer que A' est un élément de \mathcal{G}_n .

T_r est la matrice d'un automorphisme donc T_r est inversible et A aussi.

Les opérations élémentaires, $L_i \leftarrow L_1 - L_i$ ne modifient pas le rang de la matrice donc A' est inversible.

La première colonne de A' est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et sur la première ligne de A' , il n'y a que des 1.

Soient i et j supérieurs ou égaux à 2. Remarquons que les coefficients de T_r sont à valeurs dans $\{0, 1\}$. Si $(T_r)_{i-1, j-1} = 1$, alors $A'_{i, j} = 1 - 2 = -1$ et si $(T_r)_{i-1, j-1} = 0$, alors $A'_{i, j} = 1$.

On peut alors conclure que $A' \in \mathcal{G}_n$.

8 - Donner un exemple explicite de matrice A qui soit dans \mathcal{G}_6 mais pas dans \mathcal{H}_6 .

On prend $r = 4$ dans ce qui précède. On renommant A la matrice A' de la question 7. :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A est dans \mathcal{G}_6 mais pas dans \mathcal{H}_6 car ses deux premières colonnes ne sont pas orthogonales.

9 - Soient $A \in \mathcal{B}_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A .

a - Montrer qu'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

i - pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n A_{i, j} x_j = \lambda x_i$,

ii - il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $x_k \neq 0$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|x_j| \leq |x_k|$.

λ est une valeur propre de A donc on peut considérer un vecteur propre associé $X =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n. \text{ On a alors } AX = \lambda X \text{ et donc, pour tout } i \text{ entre } 1 \text{ et } n, \sum_{j=1}^n A_{i, j} x_j = \lambda x_i.$$

$\{|x_i|; i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ est une partie finie non vide de \mathbb{R} donc on peut considérer son plus grand élément m . il existe k entre 1 et n tel que $|x_k| = m$.

Comme X n'est pas nul, $x_k \neq 0$ et, par définition de m , pour tout j entre 1 et n , $|x_j| \leq |x_k|$.

b - Montrer que $|\lambda| \leq n$.

On a en particulier $|\lambda| |x_k| = \left| \sum_{j=1}^n A_{k, j} x_j \right|$ et, d'après l'inégalité triangulaire, $|\lambda| |x_k| \leq$

$$\sum_{j=1}^n |A_{k, j}| |x_j|.$$

$A_{k, j}$ vaut 1 ou -1 donc $|A_{k, j}| = 1$ et, pour tout j , $|x_j| \leq |x_k|$ donc $|\lambda| |x_k| \leq n |x_k|$ et, comme $|x_k|$ est non nul, $|\lambda| \leq n$.

c - Montrer que : $\sup \left(\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \in \text{Sp}(A) \text{ et } A \in \mathcal{B}_n\} \right) = n$.

Ce qui précède prouve que le sup existe et est inférieur ou égal à n .

Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver une matrice $A \in \mathcal{B}_n$ qui admet n comme valeur propre.

On peut choisir la matrice A dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors $A \in \mathcal{B}_n$ et si U est la colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1, alors $AU = nU$ et U n'est pas nul donc n est valeur propre de A . On a donc l'égalité :

$$\sup(\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \in \text{Sp}(A) \text{ et } A \in \mathcal{B}_n\}) = n$$

Fin de l'énoncé