Université Claude Bernard Lyon 1
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

2023 - 2024

SUJET BLANC N^{o}1 - Analyse

Durée: 3 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une partie importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.
Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.
Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.

PARTIE PRELIMINAIRE

Cette partie vise à établir certains résultats d'analyse classiques.

1. **Parité et dérivation.**

   (a) Montrer que toute fonction réelle impaire est nulle en 0.

   (b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire, et que si f est impaire, alors f' est paire. *On se contentera de démontrer l'un des deux résultats.*

   (c) Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}$ est impaire.

2. **Formule de Taylor avec reste intégral.**
   Démontrer par récurrence le résultat suivant: soit $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a:

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

3. **Formule de Leibniz.**

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}\,.$$

   On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{k}{n} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) On considère f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la formule de Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} f^{(k)} g^{(n-k)} .$$

On admettra l'égalité $(fg)' = f'g + fg'$.

4. **Un critère de convergence.**
Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

5. **L'inégalité de Bernoulli.**
L'objectif est d'établir le résultat suivant:

Pour tout réel $a > -1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$, $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, avec égalité si et seulement si $a = 0$.

(a) Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.

(b) Démontrer cette inégalité dans le cas général.

PROBLEME : Autour de la formule des différences divisées

Notations, définitions et rappels

- Étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifiera les fonctions polynomiales définies sur un intervalle $[a, b]$ avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On considère ainsi $\mathbb{R}[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$.
- Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: on rappelle ici que pour tous polynômes A, B de $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que:

$$A = BQ + R \quad , \quad \text{avec} \quad deg(R) < deg(B) .$$

Dans la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 1.
On considère une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ainsi que $n + 1$ points distincts $x_0, \cdots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$.

Partie A - Résultats préliminaires

Le but de cette partie est de démontrer l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de f aux points $x_0, \cdots, x_n$, c'est à dire vérifiant:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, \cdots, n . \tag{1}$$

I - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement si le polynôme $(X-a)$ divise P.

II - Montrer par récurrence que tout polynôme non nul de degré $m \in \mathbb{N}$ admet au plus m racines.

On considère à présent l'application:

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \Big(P(x_0), \cdots, P(x_n)\Big) \end{array} .$$

III - Montrer que Φ est linéaire.

IV - Montrer que $Ker(\Phi) = \{0\}$.

V - En déduire que Φ est bijective.

VI - Conclure.

Partie B - Formule de Newton et différences divisées

I - Justifier, par un argument simple, que la famille de polynômes:

$$\mathcal{E} = \left\{1, (X-x_0), (X-x_0)(X-x_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)\right\}$$

forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit P_n, le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \cdots, x_n$. On considère la décomposition de P_n dans cette base:

$$P_n(X) = a_0 + a_1(X-x_0) + \cdots + a_n\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)\,,$$

où les a_i , $i = 0, \cdots, n$ sont des réels.

II - 1 - Montrer que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

2 - On suppose $n \geqslant 2$. Montrer que pour tout entier i vérifiant $2 \leqslant i \leqslant n$,

$$a_i = \frac{f(x_i) - \left[a_0 + a_1(x_i-x_0) + \cdots + a_{i-1}\displaystyle\prod_{k=0}^{i-2}(x_i-x_k)\right]}{\displaystyle\prod_{k=0}^{i-1}(x_i-x_k)} .$$

Indication: on pourra commencer par montrer que $P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i-x_0) + \cdots + a_i\prod_{k=0}^{i-1}(x_i-x_k)$.

III - Montrer par récurrence (sur i) que pour tout entier naturel $i \leqslant n$, les coefficients a_i ne dépendent que des points $x_0, \cdots, x_i$ (et pas des $x_{i+1}, \cdots, x_n$).

On pose alors $a_i = f[x_0, \cdots, x_i]$ pour tout $i = 0, \cdots, n$, de sorte que

$$P_n(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \cdots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k) \,. \tag{2}$$

IV - Pour tout $i = 0, \cdots, n$, on pose $y_i = x_{n-i}$. Notons que $(y_i)_{i=0,\cdots,n}$ et $(x_i)_{i=0,\cdots,n}$ définissent la même famille de points, et donc le même polynôme interpolateur P_n.

1 - Écrire la décomposition de P_n sous la forme (2) dans la base:

$$\mathcal{F} = \left\{ 1, (X - y_0), (X - y_0)(X - y_1), \cdots, \prod_{k=0}^{n-1} (X - y_k) \right\} .$$

2 - On considère l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{E}$ donnée par (2) et celle dans la base $\mathcal{F}$ obtenue à la question précédente. En raisonnant sur les termes d'ordre n, montrer que $f[x_0, \cdots, x_n] = f[x_n, \cdots, x_0]$.

3 - a - Déterminer le terme d'ordre $n-1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-2} (X - x_k)$.

b - Déterminer le terme d'ordre $n-1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$.

c - En déduire le terme d'ordre $n-1$ du polynôme P_n donné par (2).

4 - En considérant à nouveau l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{F}$, et en raisonnant sur les termes d'ordre $n-1$, montrer que

$$f[x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_0, \cdots, x_n] \sum_{k=0}^{n-1} x_k = f[y_0, \cdots, y_{n-1}] - f[y_0, \cdots, y_n] \sum_{k=0}^{n-1} y_k \,.$$

5 - En déduire que $f[x_0, \cdots, x_n] = \dfrac{f[x_1, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$.

Indication: on pourra remarquer qu'en menant la même analyse effectuée au ***B-IV-2*** *aux points d'interpolation* $y_0, \cdots, y_{n-1}$*, on a* $f[y_0, \cdots, y_{n-1}] = f[y_{n-1}, \cdots, y_0]$.