
SUJET BLANC N°1 - Analyse

Durée: 3 heures.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une partie importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.

PARTIE PRELIMINAIRE

Cette partie vise à établir certains résultats d'analyse classiques.

1. Parité et dérivation.

- (a) Montrer que toute fonction réelle impaire est nulle en 0.

Si f est impaire, alors $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette relation appliquée à $x = 0$ donne $f(0) = -f(0)$, ce qui implique $f(0) = 0$.

- (b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire, et que si f est impaire, alors f' est paire. On se contentera de démontrer l'un des deux résultats.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_x(h)$. Remarquons que l'on a aussi $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_x(-h)$. La fonction f étant paire, on a : $\tau_{-x}(h) = \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\tau_x(-h)$. Or, on a $f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_{-x}(h)$ et $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_x(-h)$, d'où l'on tire $f'(-x) = -f'(x)$ et donc l'imparité de f' .

- (c) Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$, paire. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(2k+1)}$ est impaire.

Se démontre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. L'initialisation a fait l'objet de la question précédente. Pour l'hérédité, il faut aussi utiliser la question précédente et remarquer que dériver deux fois ne change pas la parité.

2. Formule de Taylor avec reste intégral.

Démontrer par récurrence le résultat suivant: soit $n \in \mathbb{N}$, et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

On effectue une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Le cas $n = 0$ s'écrit:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(t) dt,$$

ce qui n'est autre que le théorème fondamental de l'analyse. Considérons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'elle est vraie au rang suivant (on considère donc $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$). On a :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Or, après intégration par parties :

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \left[-\frac{(x_0 + h - t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_{x_0}^{x_0+h} + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

3. Formule de Leibniz.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $1 \leq k \leq n$, $\binom{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\begin{aligned} \binom{k-1}{n} + \binom{k}{n} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n! \times k}{k!(n+1-k)!} + \frac{n! \times (n+1-k)}{k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{k}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) On considère f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$, où $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

On admettra l'égalité $(fg)' = f'g + fg'$.

On effectue une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, dont l'initialisation est garantie par la formule classique $(fg)' = f'g + fg'$. Concernant l'hérédité, supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang suivant (on suppose

donc f, g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence:

$$\begin{aligned}
 (fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{k-1}{n} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[\binom{k-1}{n} + \binom{k}{n} \right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{0}{n} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
 &= \sum_{k=1}^n \binom{k}{n+1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{0}{n+1} f^{(0)} g^{(n+1)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k}{n+1} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.
 \end{aligned}$$

4. Un critère de convergence.

Montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si les deux suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ .

Le sens direct est immédiat : si une suite converge vers ℓ , alors ses suites extraites convergent toutes vers cette même limite.

Supposons à présent que $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$, et de même il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$. Posons alors $N = \max(N_1, N_2)$, et considérons $n \geq N$. n étant pair ou impair, on tombe dans l'un des deux cas précédents, ce qui assure $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

5. L'inégalité de Bernoulli.

L'objectif est d'établir le résultat suivant:

Pour tout réel $a > -1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(1+a)^n \geq 1+na$, avec égalité si et seulement si $a = 0$.

- (a) Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.

Pour tout réel $a > -1$, on a $(1+a)^2 = 1+a^2+2a \geq 1+2a$. Il y a égalité ssi $a^2 = 0$, c'est à dire ssi $a = 0$.

- (b) Démontrer cette inégalité dans le cas général.

On procède par récurrence sur $n \geq 2$. L'initialisation a été faite à la question précédente. Supposons donc la propriété vraie à un certain rang $n \geq 2$, et montrons qu'elle est vraie au rang suivant. On a

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+a)(1+na) = 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a.$$

Il y a égalité ssi les deux inégalités de la ligne précédentes sont en fait des égalités, c'est à dire ssi $a = 0$ (par hyp. de récurrence pour la première, puis $na^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$).

Notations, définitions et rappels

- Étant donnés deux réels a et b vérifiant $a < b$, on désigne par $\mathcal{C}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n . On identifiera les fonctions polynomiales définies sur un intervalle $[a, b]$ avec les polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On considère ainsi $\mathbb{R}[X]$ comme un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}([a, b])$.
- Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$: on rappelle ici que pour tous polynômes A, B de $\mathbb{R}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que:

$$A = BQ + R \quad , \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B) .$$

Dans la suite du problème, n est un entier supérieur ou égal à 1.

On considère une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ainsi que $n + 1$ points distincts $x_0, \dots, x_n$ de l'intervalle $[a, b]$.

Partie A - Résultats préliminaires

Le but de cette partie est de démontrer l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de f aux points $x_0, \dots, x_n$, c'est à dire vérifiant:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, n . \quad (1)$$

- I -** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $a \in \mathbb{R}$ est racine de P si et seulement si le polynôme $(X - a)$ divise P .

On effectue la division euclidienne de P par $(X - a)$: $P = Q(X - a) + c$, avec c une constante réelle. Ainsi, a est racine de P si et seulement si $c = 0$, c'est à dire $(X - a)$ divise P

- II -** Montrer par récurrence que tout polynôme non nul de degré $m \in \mathbb{N}$ admet au plus m racines.

Si $m = 0$, alors P est un polynôme constant non nul, et n'admet donc pas de racine. Supposons la propriété vraie au rang m , et considérons un polynôme P non nul de degré $m + 1$. Si P n'admet pas de racine, il n'y a rien à démontrer (P a donc au plus $m + 1$ racines). Supposons que P admette une racine $a \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, $X - a$ divise P , c'est à dire $P = Q(X - a)$, avec $\deg(Q) < \deg(P)$. Par hypothèse de récurrence, Q admet au plus m racines, et donc P en admet au plus $m + 1$.

On considère à présent l'application:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto \left(P(x_0), \dots, P(x_n) \right) . \end{aligned}$$

- III -** Montrer que Φ est linéaire.

Pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}\Phi(P + \lambda Q) &= \left((P + \lambda Q)(x_0), \dots, (P + \lambda Q)(x_n) \right) \\ &= \left(P(x_0), \dots, P(x_n) \right) + \lambda \left(Q(x_0), \dots, Q(x_n) \right) \\ &= \Phi(P) + \lambda \Phi(Q).\end{aligned}$$

IV - Montrer que $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

*Si un polynôme P de degré au plus n est dans le noyau de Φ , alors il admet au moins $n + 1$ racines (les $x_0, \dots, x_n$). Donc P est nul en vertu de la question **A-II**.*

V - En déduire que Φ est bijective.

Φ étant linéaire, la question précédente donne l'injectivité. Par ailleurs, les dimensions des espaces de départ et d'arrivée de Φ étant les mêmes, les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité se confondent, ce qui permet de conclure.

VI - Conclure.

L'existence et l'unicité du polynôme interpolateur découlent directement du caractère bijectif de Φ .

Partie B - Formule de Newton et différences divisées

I - Justifier, par un argument simple, que la famille de polynômes:

$$\mathcal{E} = \left\{ 1, (X - x_0), (X - x_0)(X - x_1), \dots, \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k) \right\}$$

forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il suffit de constater que cette famille de $n + 1$ polynômes est échelonnée en degrés.

Soit P_n , le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \dots, x_n$. On considère la décomposition de P_n dans cette base:

$$P_n(X) = a_0 + a_1(X - x_0) + \dots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k),$$

où les a_i , $i = 0, \dots, n$ sont des réels.

II - 1 - Montrer que $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

En utilisant la forme précédente : $P_n(x_0) = a_0$. Or, P_n étant le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, \dots, x_n$, on a $f(x_0) = a_0$. Ensuite : $f(x_1) = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0)$, d'où l'on tire la deuxième relation.

2 - On suppose $n \geq 2$. Montrer que pour tout entier i vérifiant $2 \leq i \leq n$,

$$a_i = \frac{f(x_i) - \left[a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + a_{i-1} \prod_{k=0}^{i-2} (x_i - x_k) \right]}{\prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k)}.$$

Indication: on pourra commencer par montrer que $P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k)$.

On a $P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x_i - x_k)$. Pour tout entier $j \geq i$,

le produit $\prod_{k=0}^j (x_i - x_k)$ est nul (car " x_k " peut prendre la valeur x_i). Ainsi, tous

les termes du type $\prod_{k=0}^j (x_i - x_k)$ avec $j \geq i$ sont nuls dans l'expression précédente,

ce qui établit le résultat donné dans l'indication. Par suite : $f(x_i) = P_n(x_i) = a_0 + a_1(x_i - x_0) + \cdots + a_{i-1} \prod_{k=0}^{i-2} (x_i - x_k) + a_i \prod_{k=0}^{i-1} (x_i - x_k)$, d'où l'on tire l'égalité demandée.

III - Montrer par récurrence (sur i) que pour tout entier naturel $i \leq n$, les coefficients a_i ne dépendent que des points $x_0, \dots, x_i$ (et pas des $x_{i+1}, \dots, x_n$).

Pour $i = 0$, on a vu que $a_0 = f(x_0)$, donc ceci est vrai pour $i = 0$. Supposons que cette propriété soit vraie jusqu'au rang $i - 1$ (c'est à dire que les $a_0, \dots, a_{i-1}$) ne dépendent que des points $x_0, \dots, x_{i-1}$. La question précédente permet d'affirmer que a_i ne dépend que des $a_0, \dots, a_{i-1}$ et des $x_0, \dots, x_{i-1}, x_i$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors l'hérédité.

On pose alors $a_i = f[x_0, \dots, x_i]$ pour tout $i = 0, \dots, n$, de sorte que

$$P_n(X) = f[x_0] + f[x_0, x_1](X - x_0) + \cdots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k). \quad (2)$$

IV - Pour tout $i = 0, \dots, n$, on pose $y_i = x_{n-i}$. Notons que $(y_i)_{i=0, \dots, n}$ et $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ définissent la même famille de points, et donc le même polynôme interpolateur P_n .

1 - Écrire la décomposition de P_n sous la forme (2) dans la base:

$$\mathcal{F} = \left\{ 1, (X - y_0), (X - y_0)(X - y_1), \dots, \prod_{k=0}^{n-1} (X - y_k) \right\}.$$

$$P_n(X) = f[y_0] + f[y_0, y_1](X - y_0) + \cdots + f[y_0, \dots, y_n] \prod_{k=0}^{n-1} (X - y_k). \quad (3)$$

- 2 -** On considère l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{E}$ donnée par (2) et celle dans la base $\mathcal{F}$ obtenue à la question précédente. En raisonnant sur les termes d'ordre n , montrer que $f[x_0, \dots, x_n] = f[x_n, \dots, x_0]$.

Les coefficients des termes d'ordre n issus de (2) et (3) sont respectivement $f[x_0, \dots, x_n]$ et $f[y_0, \dots, y_n]$. Or, $f[y_0, \dots, y_n] = f[x_n, \dots, x_0]$ par définition.

- 3 - a -** Déterminer le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-2} (X - x_k)$.

Le terme d'ordre $n - 1$ est X^{n-1} .

- b -** Déterminer le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme $\prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k)$.

Il s'agit d'un polynôme de degré n . Les termes de degré $n - 1$ s'obtiennent en choisissant $n - 1$ fois le terme en X dans le produit, et l'un des x_k comme dernier facteur. Il y a n termes de ce type, ce qui donne : $\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) X^{n-1}$.

- c -** En déduire le terme d'ordre $n - 1$ du polynôme P_n donné par (2).

En combinant les deux questions précédentes, on obtient que le terme d'ordre $n-1$ du polynôme P_n donné par (2) est $\left(f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, \dots, x_n] \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) X^{n-1}$.

- 4 -** En considérant à nouveau l'écriture de P_n dans la base $\mathcal{F}$, et en raisonnant sur les termes d'ordre $n - 1$, montrer que

$$f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, \dots, x_n] \sum_{k=0}^{n-1} x_k = f[y_0, \dots, y_{n-1}] - f[y_0, \dots, y_n] \sum_{k=0}^{n-1} y_k.$$

Ce résultat est immédiat en reproduisant ce qui a été fait précédemment sur (3) et en identifiant les termes d'ordre $n - 1$.

- 5 -** En déduire que $f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$.

*Indication: on pourra remarquer qu'en menant la même analyse effectuée au **B-IV-2** aux points d'interpolation $y_0, \dots, y_{n-1}$, on a $f[y_0, \dots, y_{n-1}] = f[y_{n-1}, \dots, y_0]$.*

*D'après **A-II**, $f[x_0, \dots, x_n] = f[y_0, \dots, y_n]$, donc l'égalité précédente se réécrit:*

$$f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[y_0, \dots, y_{n-1}] = f[x_0, \dots, x_n] \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} y_k \right).$$

Par suite, en utilisant $\sum_{k=0}^{n-1} y_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k} = \sum_{k=1}^n x_k$ et $f[y_0, \dots, y_{n-1}] = f[y_{n-1}, \dots, y_0] = f[x_1, \dots, x_n]$:

$$f[x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_1, \dots, x_n] = f[x_0, \dots, x_{n-1}] (x_0 - x_n).$$