Université Claude Bernard Lyon 1
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

2024 - 2025

SUJET BLANC N°1 - Analyse

Durée: ≈ 2 h 30. Sujet distribué à 10h, récupéré à 13h (14h40 pour les tiers temps).

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une partie importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.
Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.
Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.
Les exercices 1 à 5 sont ***indépendants****.*

EXERCICE 1 : *Un résultat de croissance comparée.*

Soit $\gamma > 0$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = e^{\gamma n}$ et $v_n = n!$ pour $n \geqslant 1$.

1. Démontrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}\frac{v_{n+1}}{v_n}\,.$$
2. En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $n \geqslant N$:
$$u_n \leqslant c\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} v_n\,.$$
3. En déduire que $e^{\gamma n} = o(v_n)$.

EXERCICE 2 : *Suites réelles, résultats de convergence.*

On considère (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contrexemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) et (v_n) convergent, alors $(u_n + v_n)$ converge.

4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
6. Si (u_n) est à valeurs positives et n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
7. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

EXERCICE 3 : *Concavité du logarithme.*

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

1. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que:
$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}\,.$$
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, deux fois dérivable sur $]0,1[$, et telle que:
$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 0 \quad , \quad f'(0) > 0 \quad , \quad f'(1) < 0\,.$$
On suppose de plus que pour tout $x \in]0,1[$, $f''(x) < 0$.
   (i) - Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha[$, $f'(x) > 0$.
   (ii) - Montrer que $f(\alpha) > 0$.
   (iii) - On suppose qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$. Montrer qu'il existe $c_1 \in]0,\beta[$ et $c_2 \in]\beta,1[$ tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. En déduire une contradiction.
   (iv) - Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.
3. On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :
$$f(x) = \ln(xa + (1-x)b) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b)\,.$$
Montrer que f vérifie les hypothèses de la question 2, puis que pour tout $x \in]0,1[$:
$$\ln(xa + (1-x)b) > x\ln(a) + (1-x)\ln(b)\,.$$

EXERCICE 4 : *Convergence de séries.*

1. *Résultats préliminaires.* On rappelle ici la formule de Taylor-Young:
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Soit $n \geqslant 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Alors, pour tout $x \in I$,
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)\,.$$
Déduire de cette formule les développement limités suivants:
   (i) - $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.

(ii) - $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

2. Etudier la nature de la série numérique de terme général u_n dans chacun des cas suivants:

(i) - $u_n = \dfrac{n+1}{n^3-7}$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) - $u_n = \dfrac{n+1}{n^2-7}$, $n \in \mathbb{N}$.

(iii) - $u_n = \dfrac{(n!)^\alpha}{(2n!)}$, $n \in \mathbb{N}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

(iv) - $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(v) - $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(vi) - $u_n = 1 - n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(vii) - $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$
Indication: déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2}u_n$.

(viii) - $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)$
Indication: on pourra montrer que la suite (u_n) est alternée en signe.

EXERCICE 5 : *Logarithme de base a - Extrait du concours 2019.*

On appelle *logarithme* toute fonction f définie sur $]0, +\infty[$, dérivable, telle que:

- il existe un nombre réel a non nul tel que, pour tout nombre réel x strictement positif,
$$f'(x) = \frac{a}{x}\,.$$
- $f(1) = 0$.

1. Soit a un nombre réel non nul. Justifier qu'il existe un unique logarithme, que l'on notera f_a, tel que, pour tout nombre réel $x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{a}{x}$. Lorsque $a = 1$, on utilise la notation ln (logarithme néperien).

2. Pour tout nombre réel a non nul, exprimer f_a à l'aide de ln.

3. Montrer que, pour tout nombre réel a non nul, tous nombres réels $x, y > 0$,
$$f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)\,.$$
Indication : on pourra étudier la fonction définie par $x \mapsto f_a(xy)$, où $y > 0$ est fixé.

4. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$,

$$f_a\left(\frac{1}{x}\right) = -f_a(x)\,.$$

5. Soient x un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel. Montrer que $f_a(x^r) = r f_a(x)$.
   Indication: on pourra commencer par le cas où r est un entier naturel, puis celui où r est un entier relatif, avant de conclure dans le cas où r est un nombre rationnel.

6. Montrer que la fonction ln est strictement croissante.

7. Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0 de la fonction ln.

8. Montrer que la fonction ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

9. Comment peut-on généraliser les résultats des questions 6 et 8 au cas des logarithmes f_a ?