SUJET BLANC N°1 - Partie Analyse

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une partie importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.
Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.
Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.
*Les exercices 1 à 6 sont **indépendants**.*

EXERCICE 1 : *Définitions et quantificateurs.*

1. Ecrire, à l'aide de quantificateurs, la proposition suivante : f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$, avec $\ell > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $f(x) > 0$.

EXERCICE 2 : *Dérivation et périodicité.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

EXERCICE 3 : *Suites réelles, résultats de convergence.*

On considère (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contrexemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) et (v_n) convergent, alors $(u_n + v_n)$ converge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
6. Si (u_n) est à valeurs positives et n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

7. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

EXERCICE 4 : *Equation fonctionnelle.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$.
2. Démontrer que f est impaire.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
4. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
5. Démontrer que pour tout nombre rationnel $r = p/q$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$ *(on pourra écrire $p = q \times \frac{p}{q}$).*
6. Conclure qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

EXERCICE 5 : *Formule de Taylor avec reste intégral.*

1. Démontrer le théorème suivant:
   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si $a, b \in I$, alors:

   $$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

   Indication: on pourra procéder par récurrence et intégrer par parties le reste intégral $R_n = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.

2. On définit la fonction exponentielle exp comme l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

   $$y'(x) = y(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\,,\ y(0) = 1.$$

   (a) Démontrer que exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(0) = 1$.

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$\left|\exp(x) - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{n!}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|)\,.$$

   (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = \left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{n!}\right)$.

EXERCICE 6 : *Etude de suites.*

On définit deux suites (p_n) et (q_n) par les formules suivantes:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} q_0 = 3\sqrt{3} \\ q_{n+1} = \dfrac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \end{cases}$$

On admettra que les suites (p_n) et (q_n) sont bien définies et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$ et $q_n > 0$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n \leqslant q_n$.
2. En déduire que la suite (q_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n \leqslant q_{n+1}$.
4. En déduire que la suite (p_n) est croissante.
5. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $y > 0$ on a $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{2}(x+y)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(q_n - p_n)$.
6. Démontrer que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la moitié du périmètre d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité à 3×2^n côtés. Démontrer que $u_n = 3 \times 2^n \times \sin(a_n)$ où $a_n = \dfrac{\pi}{3 \times 2^n}$.
8. On définit de même la suite (v_n) pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3 \times 2^n \times \tan(a_n)$. On démontre que, pour $n \in \mathbb{N}$, v_n est la moitié du périmètre d'un polygone régulier à 3×2^n côtés dont le cercle inscrit est le cercle unité. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$.
   On pourra utiliser la formule de trigonométrie $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.
9. Que peut-on en déduire sur les suites (u_n), (v_n), (p_n) et (q_n) ?
10. Quelle est la limite commune des suites (p_n) et (q_n)?