Université Claude Bernard Lyon 1
Préparation aux épreuves écrites du CAPES

2025 - 2026

SUJET BLANC N°1 - Partie Analyse

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une partie importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.
Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.
Il est expressément demandé une marge décente en vue de la correction.
*Les exercices 1 à 6 sont **indépendants**.*

EXERCICE 1 : *Définitions et quantificateurs.*

1. Ecrire, à l'aide de quantificateurs, la proposition suivante : f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

   $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geqslant A, f(x) \leqslant M.$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite ℓ en $+\infty$, avec $\ell > 0$. Démontrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, $f(x) > 0$.

   On applique la définition de limite avec $\varepsilon = \ell/2$. Il existe donc $A > 0$ tel que, pour tout $x \geqslant A$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant \ell/2$. On en déduit que $-\ell/2 \leqslant f(x) - \ell \leqslant \ell/2$ ce qui implique $f(x) \geqslant \ell/2 > 0$.

EXERCICE 2 : *Dérivation et périodicité.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas périodique.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons que f est périodique. Il existe un réel $T > 0$ tel que f est $T-$périodique. Sur l'intervalle $[0; T]$, la fonction f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc un réel $c \in]0; T[$ tel que $f'(c) = 0$, ce qui mène à une contradiction (puisque f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

EXERCICE 3 : *Suites réelles, résultats de convergence.*

On considère (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contrexemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge. *Faux, considérer les suites définies par $u_n = n$ et $v_n = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge. *Faux, considérer le contrexemple fourni par les suites définies par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. Si (u_n) et (v_n) convergent, alors $(u_n + v_n)$ converge. *Vrai. Notons ℓ et ℓ' les limites de (u_n) et (v_n).*
   Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de (u_n) vers ℓ, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon/2$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_2$, $|v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon/2$. Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$:
   $$|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leqslant |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$
   On en déduit que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge. *Vrai. Il suffit de raisonner par l'absurde, en supposant que $(u_n + v_n)$ converge. La relation $v_n = (u_n + v_n) - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ permet alors d'écrire (v_n) comme somme de deux suites convergentes. Le résultat précédent garantit que (v_n) converge.*

5. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
   Faux. Il suffit de considérer la suite définie par $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Si (u_n) est à valeurs positives et n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
   Faux. Considérer la suite (u_n) définie par $u_n = n$ si n est pair, et $u_n = 0$ sinon.

7. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
   Faux. Considérer la suite (u_n) définie par $u_n = 0$ si n est pair, et $u_n = 1/n$ sinon.

EXERCICE 4 : *Equation fonctionnelle.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que,
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Déterminer $f(0)$.
   On a $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

2. Démontrer que f est impaire.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique la propriété vérifiée par f à x et à $y = -x$. Avec $f(0) = 0$, on trouve $0 = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   On remarque d'abord que $f(2x) = 2f(x)$, puis, par récurrence sur n, que $f(nx) = nf(x)$. En effet, si la propriété est vraie au rang n, alors on a $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x)$.

4. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
   Soit n un entier négatif. Alors $-n$ est un entier positif et donc $f(-nx) = -nf(x)$. Puisque f est impaire, $f(nx) = -f(-nx) = nf(x)$.

5. Démontrer que pour tout nombre rationnel $r = p/q$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$ *(on pourra écrire $p = q \times \frac{p}{q}$).*

   Soit maintenant $r = p/q$ un rationnel. On a $f(px) = f\left(q \times \frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right)$ d'une part et $f\left(q \times \frac{p}{q}x\right) = f(px) = pf(x)$ d'autre part. Ainsi, on a $f(rx) = rf(x)$.

6. Conclure qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

   Posons $a = f(1)$. D'après ce qui précède, $f(x) = xf(1)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et (x_n) une suite de rationnels tendant vers x. Le passage à la limite dans $f(x_n) = x_n f(1)$ (licite car f est continue) donne $f(x) = xf(1)$. Comme une telle fonction vérifie l'équation fonctionnelle, on vient de prouver que les fonctions continues vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ sont exactement les fonctions linéaires.

EXERCICE 5 : *Formule de Taylor avec reste intégral.*

1. Démontrer le théorème suivant:
   Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si $a, b \in I$, alors:

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt\,.$$

   Indication: on pourra procéder par récurrence et intégrer par parties le reste intégral $R_n = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$.

   Pour $n = 0$, la formule donne $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$, égalité assurée par le fait que f est bien une primitive de f'.
   Supposons la formule vraie au rang n, et que f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. On effectue une intégration par parties du reste intégral $R_n = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$, en posant:

$$u(t) = f^{(n+1)}(t) \quad , \quad u'(t) = f^{(n+2)}(t)$$
$$v'(t) = \frac{(b-t)^n}{n!} \quad , \quad v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

   Il vient :

$$R_n = \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(t)dt = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + R_{n+1}\,.$$

2. On définit la fonction exponentielle exp comme l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) = y(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\,,\ y(0) = 1.$$

   (a) Démontrer que exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(0) = 1$.
   Se démontre par récurrence sur n.

(b) Démontrer que exp ne s'annule pas. (*On pourra étudier la fonction* $x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$).
La dérivée de la fonction donnée en indication est nulle, donc cette fonction est constante, égale à sa valeur en 0, *c'est à dire* 1. *On en déduit que* $\exp(x)\exp(-x) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *ce qui implique que* $\exp$ *ne s'annule pas.*

(c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\exp(x) - \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{n!}\right)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|)\,.$$

La formule de Taylor avec reste intégral donne (avec le changement de variable $u = t/x$*):*

$$\begin{aligned}\exp(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \exp(t)dt \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 x(x-ux)^n \exp(ux)du \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{n!} + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \exp(ux)du\end{aligned}$$

et on conclut avec l'estimation:

$$\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \exp(ux)du \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}\exp(|x|)\int_0^1 (1-u)^n du = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|)\,.$$

(d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) = \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{n!}\right)$.
Pour $x \in \mathbb{R}$ *fixé, le membre de droite dans l'inégalité de la question précédente tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini. On obtient alors le résultat en passant à la limite sur* n *dans le développement limité de l'exponentielle.*

EXERCICE 6 : *Etude de suites.*

On définit deux suites (p_n) et (q_n) par les formules suivantes:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} q_0 = 3\sqrt{3} \\ q_{n+1} = \dfrac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \end{cases}$$

On admettra que les suites (p_n) et (q_n) sont bien définies et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$ et $q_n > 0$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n \leqslant q_n$. *Notons, pour* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ *la propriété "*$p_n \leqslant q_n$*". On démontre par récurrence sur* n *que la propriété* $\mathcal{P}(n)$ *est vérifiée.*
Initialisation : On a $p_0 = q_0/2$ *et donc* $p_0 \leqslant q_0$. *La propriété* $\mathcal{P}(0)$ *est vérifiée.*
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{P}(n)$ *est vérifiée. Alors on a* $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{p_n q_{n+1}}}{q_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{p_n}}{\sqrt{q_{n+1}}} =$

$\dfrac{\sqrt{p_n+q_n}}{\sqrt{2q_n}}$. Or, par hypothèse de récurrence, on a $0 \leqslant p_n + q_n \leqslant 2q_n$. Puisque la fonction racine carrée est croissante, on a $0 \leqslant \sqrt{p_n+q_n} \leqslant \sqrt{2q_n}$ et donc $p_{n+1} \leqslant q_{n+1}$. La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n \leqslant q_n$.

2. En déduire que la suite (q_n) est décroissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, on a $0 < 2p_n \leqslant p_n + q_n \Rightarrow \dfrac{2p_n}{p_n+q_n} \leqslant 1$ et donc $q_{n+1} \leqslant q_n$. La suite (q_n) est donc décroissante.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n \leqslant q_{n+1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{q_{n+1}}{p_n} = \dfrac{2q_n}{p_n+q_n}$ et en utilisant $p_n \leqslant q_n$, on démontre de la même façon que précédemment que $\dfrac{2q_n}{p_n+q_n} \geqslant 1$. Ceci prouve que $q_{n+1} \geqslant p_n$.

4. En déduire que la suite (p_n) est croissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \sqrt{\dfrac{q_{n+1}}{p_n}}$. On conclut que $p_{n+1} \geqslant p_n$ en utilisant le résultat de la question précédente et la croissance de la fonction racine carrée.

5. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $y > 0$ on a $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{2}(x+y)$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(q_n - p_n)$.

   On a $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geqslant 0$, et donc, en rajoutant $4xy$ de chaque côté: $(x+y)^2 \geqslant 4xy$. On divise alors par $2(x+y) > 0$ pour obtenir le résultat. Par suite:

   $$q_{n+1} - p_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n} - p_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(p_n + q_n - 2p_{n+1}\right).$$

   La suite (p_n) étant croissante: $p_n + q_n - 2p_{n+1} \leqslant p_n + q_n - 2p_n = q_n - p_n$, ce qui donne le résultat.

6. Démontrer que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

   On a $q_0 - p_0 = 3\sqrt{3}/2$, et on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(q_n - p_n)$. Par récurrence, on montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n - p_n \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Puisque de plus $q_n - p_n \geqslant 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $(q_n - p_n)$ tend vers 0. Comme on savait déjà que (p_n) est croissante et que (q_n) est décroissante, on obtient bien que les deux suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.

7. Dans la suite, on souhaite déterminer la valeur de ℓ (et donner une explication géométrique à la construction de ces deux suites). On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé. Soit $\theta \in [0, \pi]$ et $A(\theta)$ le point d'affixe $e^{i\theta}$. Démontrer que la distance $A(0)A(\theta)$ vaut $2\sin(\theta/2)$.
   On pourra utiliser la formule de trigonométrie $1 - \cos(u) = 2\sin^2(u/2)$.

$$\begin{aligned}A(0)A(\theta) &= \sqrt{(1-\cos(\theta))^2+\sin(\theta)^2}\\ &= \sqrt{1-2\cos(\theta)+\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2}\\ &= \sqrt{2-2\cos(\theta)}\\ &= \sqrt{4\sin^2(\theta/2)}\\ &= 2\sin(\theta/2)\end{aligned}$$

(car en effet $\theta \in [0,\pi] \Rightarrow \sin(\theta/2) \geqslant 0$).

8. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la moitié du périmètre d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité à 3×2^n côtés. Démontrer que $u_n = 3\times 2^n \times \sin(a_n)$ où $a_n = \dfrac{\pi}{3\times 2^n}$.

   Les points $A\left(e\dfrac{ik2\pi}{3.2^n}\right)$, pour $k=0,\dots,n-1$, sont les sommets d'un polygone régulier à 3×2^n côtés inscrit dans le cercle unité. Son périmètre vaut $3\times 2^n A(0)A\left(e\dfrac{ik2\pi}{3.2^n}\right)$. La question précédente donne alors le résultat

9. On définit de même la suite (v_n) pour $n\in\mathbb{N}$ par $v_n = 3\times 2^n \times \tan(a_n)$. On démontre que, pour $n\in\mathbb{N}$, v_n est la moitié du périmètre d'un polygone régulier à 3×2^n côtés dont le cercle inscrit est le cercle unité. Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n}$.
   On pourra utiliser la formule de trigonométrie $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

   Remarquons que $a_{n+1} = a_n/2$. On en déduit que

$$\sqrt{\sin(a_n)\tan(a_{n+1})} = \sqrt{2\sin(a_{n+1})\cos(a_{n+1})\tan(a_{n+1})} = \sqrt{2}\sin(a_{n+1})\,.$$

   (car $\sin(a_{n+1}) \geqslant 0$). On en déduit que $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_{n+1}}$. De la même façon, on écrit:

$$\begin{aligned}\frac{2\sin(a_n)\tan(a_n)}{\sin(a_n)+\tan(a_n)} &= \frac{2\sin(a_n)\sin(a_n)}{\sin(a_n)\cos(a_n)+\sin(a_n)}\\ &= \frac{2\sin(a_n)}{1+\cos(a_n)}\\ &= \frac{4\sin(a_n/2)\cos(a_n/2)}{2\cos^2(a_n/2)}\\ &= 2\tan(a_n/2)\end{aligned}$$

   Ceci donne la relation $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n v_n}$.

10. Que peut-on en déduire sur les suites (u_n), (v_n), (p_n) et (q_n) ?

    On remarque que $u_0 = p_0$ et que $v_0 = q_0$. De plus, les relations de récurrence liant u_{n+1} et v_{n+1} à u_n et v_n sont les mêmes que les relations de récurrence liant p_{n+1} et q_{n+1} à p_n et q_n. Ainsi, on déduit par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n = p_n$ et $v_n = q_n$.

11. Quelle est la limite commune des suites (p_n) et (q_n)?

Puisque $sin(x) \sim_0 x$, on a

$$u_n = 3 \times 2^n \times \sin(a_n) \sim_{+\infty} 3 \times 2^n \times \frac{\pi}{3 \times 2^n} = \pi.$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers π. Il en est de même des suites (p_n) et (q_n)