CORRIGÉ ANALYSE

Une construction de la fonction exponentielle

A - Deux inégalités fondamentales préliminaires

1. **L'inégalité de Bernoulli.**

   Pour tout réel $a > -1$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$, avec égalité si et seulement si $a = 0$.

   1.1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.
   Pour tout réel $a > -1$, on a $(1 + a)^2 = 1 + a^2 + 2a \geq 1 + 2a$. Il y a égalité ssi $a^2 = 0$, c'est à dire ssi $a = 0$.

   1.2. Démontrer cette inégalité dans le cas général.
   On procède par récurrence sur $n \geq 2$. L'initialisation a été faite à la question précédente. Supposons donc la propriété vraie à un certain rang $n \geq 2$, et montrons qu'elle est vraie au rang suivant. On a

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a\,.$$

   Il y a égalité ssi les deux inégalités de la ligne précédentes sont en fait des égalités, c'est à dire ssi $a = 0$ (par hyp. de récurrence pour la première, puis $na^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$).

2. **L'inégalité de Cauchy.**

   Pour tout entier naturel non nul n et tout $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \cdots = x_n$.

   2.1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$ et étudier le cas d'égalité.
   Soit (x_1, x_2) un couple de réels strictement positifs. On a $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} \geq 0$, d'où l'on déduit le résultat.

   On cherche à présent à démontrer ce résultat dans le cas général.

   2.2. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :
   (i) $1 \in A$.
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$.
   (iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, n + 1 \in A \Rightarrow n \in A$.

   2.2.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n \in A$.
   Se montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, on a $2^0 = 1 \in A$. Par suite, si l'on suppose $2^n \in A$ on a $2 \times 2^n \in A$ en vertu du (ii). On obtient donc $2^{n+1} \in A$ et par suite le caractère héréditaire de la propriété.

   2.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall p \in [[1, 2^n]], p \in A$.
   S'établit par le biais d'un récurrence descendante sur $p \in [[1, 2^n]]$. Si $p = 2^n$, on a $p \in A$ d'après la question précédente. Par suite, si l'on prend $p \in [[2, 2^n]]$ tel que $p \in A$, alors $p - 1 \in A$ d'après le (iii), ce qui permet de terminer la récurrence.

2.2.3. En déduire que $A = \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq 2^n$, c'est à dire $p \in [[1, 2^n]]$. D'après ce qui précède, on a $p \in A$. Ainsi $\mathbb{N}^* \subset A$. On conclut en utilisant l'inclusion $A \subset \mathbb{N}^*$.

2.3. On note à présent A l'ensemble des entiers naturels non nuls pour lesquels le résultat est établi (inégalité de Cauchy et cas d'égalité).

2.3.1. Montrer que $1 \in A$.

Pour $n = 1$, les deux termes impliqués dans l'égalité sont égaux à x_1. Le résultat est immédiat, et on a égalité.

2.3.2. Soit $n \in A$. Montrer que $2n \in A$.

Indication : on pourra poser $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $b = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} x_k$, puis utiliser le cas n=2 avec le 2-uplet (a, b).

Soit $(x_1, \cdots, x_{2n})$ un 2n-uplet de réels strictement positifs. En utilisant l'indication et le cas $n = 2$ du 2.1, on a :

$$\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} x_k \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \times \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} x_k\right)^{1/2} . \tag{1}$$

Par suite, l'entier n étant supposé dans A, on a :

$$a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \quad \text{et } b = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} x_k \geq \left(\prod_{k=n+1}^{2n} x_k\right)^{1/n} . \tag{2}$$

En injectant dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} x_k \geq \left(\prod_{k=1}^{2n} x_k\right)^{1/2n} .$$

Pour avoir égalité, il faut et il suffit que $a = b$ (relation (1)) et qu'on soit dans le cas d'égalité pour a et pour b (relations (2)), ce qui équivaut à dire que $x_1 = \cdots = x_{2n}$.

2.3.3. L'objectif est de démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$. Fixons pour cela un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2.3.3.1. On considère un $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$. On pose $y_k = x_k$ si $k \leq n$ et $y_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} y_k$.

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n+1} y_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right)\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

2.3.3.2. En déduire que si $n+1 \in A$ alors $n \in A$.

Supposons $n+1 \in A$ et considérons un $n-$uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$. En gardant les notations précédentes, on a :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} y_k \geq \left(\prod_{k=1}^{n+1} y_k\right)^{1/(n+1)} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/(n+1)} \times \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/(n+1)} .$$

En utilisant la question précédente, on aboutit à : $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{1-1/(n+1)} \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/(n+1)}$,

ce qui se réécrit :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} .$$

Le résultat étant supposé vrai pour $n+1$, l'égalité a lieu ssi les $(y_1, \cdots, y_{n+1})$ sont égaux, c'est à dire ssi les $(x_1, \cdots, x_n)$ sont égaux.

2.3.4. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.
A est un sous ensemble de $\mathbb{N}^*$ vérifiant les propriétés (i), (ii) et (iii) du 2.2, donc $A = \mathbb{N}^*$. En d'autres termes, l'inégalité de Cauchy (avec cas d'égalité) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B - Construction et étude de la fonction exponentielle

1. Soit x un nombre réel fixé. On pose $n_0(x) = \min\{n \in \mathbb{N}^* : n > -x\}$ et on note, pour tout entier $n \geq n_0(x)$, $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, et pour tout entier $n \geq n_0(-x)$, $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

1.1. Montrer que pour tout $n \geq n_0(x)$, $\frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right] \geq \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}$.

Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy démontrée dans la partie précédente.
Notons que pour tout $n \geq n_0(x)$, on a $1 + \frac{x}{n} > 0$. Il s'agit alors d'utiliser l'inégalité de Cauchy avec le $(n+1)$-uplet $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$, avec $x_k = 1 + \frac{x}{n}$ pour $k = 1 \cdots, n$ et $x_{n+1} = 1$.

1.2. En déduire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0(x)}$ est croissante.

Indication : on pourra utiliser l'égalité $1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right) = (n+1)\left[1 + \frac{x}{n+1}\right]$.

En utilisant l'indication et la question précédente, on a $1 + \frac{x}{n+1} \geq \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}}$.

On remarque alors que $\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n+1}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$, ce qui permet de conclure.

1.3. En déduire que la suite $(v_n(x))_{n \geq n_0(-x)}$ est décroissante.
Soit $n \geq n_0(-x)$. On a $n > x$ donc $1 - \frac{x}{n} > 0$ et par suite $u_n(-x) > 0$. On utilise alors le fait que $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ pour tout $n \geq n_0(-x)$ et la croissance de $(u_n(-x))_{n \geq n_0(-x)}$ pour aboutir au résultat.

1.4. On cherche à présent à démontrer que les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ convergent vers une même limite. On considère un entier $n > |x|$.

1.4.1. Montrer que $v_n(x) \geq u_n(x) > 0$.
Notons que $n > |x| \Rightarrow n \geq max(n_0(x), n_0(-x))$. On a précédemment établi que $u_n(x) > 0$ et $v_n(x) > 0$. On remarque alors que $\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n \leq 1$, d'où le résultat.

1.4.2. Montrer que $\left(1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$.

L'inégalité de Bernoulli avec $a = -\left(\frac{x}{n}\right)^2 > -1$ donne immédiatement le résultat.

1.4.3. En déduire que $v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\frac{x^2}{n}$, puis conclure.
En combinant les deux questions précédentes, on a $\frac{u_n(x)}{v_n(x)} \geq 1 - \frac{x^2}{n}$, ce qui donne

$v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$. Par suite, $(v_n(x))$ étant décroissante et minorée (par 0, d'après 1.4.1), elle converge. En utilisant $0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\dfrac{x^2}{n}$ et le fait que le terme de droite de cette inégalité converge vers 0, on aboutit au résultat avec le théorème des gendarmes.

2. On note ε l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à un réel x associe la limite commune des suites de la question précédente. Nous admettrons dans la suite que ε est **continue** sur $\mathbb{R}$ (*se déduit de la continuité des fonctions u_n et de la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n)*).

2.1. Montrer que pour tout réel $x > 1$, $1 + x \leq \varepsilon(x)$ et que pour tout réel $x < 1$, $\varepsilon(x) \leq \dfrac{1}{1-x}$.

Indication : On pourra étudier les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ puis passer à la limite dans les inégalités.

On a $x < 1 \Rightarrow n_0(-x) = 1$. La suite $(v_n(x))_{n\geq 1}$ est donc décroissante et converge vers $\varepsilon(x)$. On en déduit que $\varepsilon(x) \leq v_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Un raisonnement analogue impliquant la croissance de $(u_n(x))_{n\geq 1}$ pour $x > -1$ donne $1 + x \leq \varepsilon(x)$.

2.2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout $n > |x|$, $v_n(x).u_n(-x)$. En déduire que $\varepsilon(x)$ est non nul et exprimer son inverse à l'aide de ε.

Soit $n > |x|$. On a $v_n(x).u_n(-x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n} = 1$. En passant à la limite sur n, on obtient $\varepsilon(x).\varepsilon(-x) = 1$. On on déduit que $\varepsilon(x)$ est non nul, d'inverse $\varepsilon(-x)$

2.3. Soit $(z_m)_{m\geq 1}$ une suite de nombres réels convergeant vers 0. On cherche à démontrer que la suite $\left(\left(1 + \dfrac{z_m}{m}\right)^m\right)_{m\geq 1}$ converge vers 1.

2.3.1. Montrer qu'il existe un rang $M_0 \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M_0$ on ait $|z_m| < 1$ et $\left(1 + \dfrac{z_m}{m}\right)^m \geq 1 + z_m$.

Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Bernoulli.

La suite (z_m) converge vers 0, donc il existe $M_0 \geq 1$ tel que pour tout $m \geq M_0$ on ait $|z_m| < 1$. Par suite, pour tout $m \geq M_0$ on a $\dfrac{z_m}{m} \geq -1$ et l'inégalité de Bernoulli donne $\left(1 + \dfrac{z_m}{m}\right)^m \geq 1 + z_m$.

2.3.2. Montrer que pour tout $m \geq M_0$, $\left(1 + \dfrac{z_m}{m}\right)^m \leq \dfrac{1}{1 - z_m}$.

Soit $m \geq M_0$. On a $z_m < 1$ donc $\varepsilon(z_m) < \dfrac{1}{1 - z_m}$ en vertu du 2.1. D'autre part, pour tout $n \geq n_0(|z_m|)$=1, on a $u_n(z_m) \leq \varepsilon(z_m)$. En prenant $n = m$, on obient donc $\left(1 + \dfrac{z_m}{m}\right)^m \leq \dfrac{1}{1 - z_m}$.

2.3.3. Conclure.

Pour tout $m \geq M_0$, on a $1 + z_m \leq \left(1 + \dfrac{z_m}{m}\right)^m \leq \dfrac{1}{1 - z_m}$. On conclut avec le théorème des gendarmes.

2.4. Déduire de ce qui précède que, pour tous x, y réels, on a $\varepsilon(x + y)\varepsilon(-x)\varepsilon(-y) = 1$.

Indication : on pourra montrer que $a_m = \left(1 + \dfrac{x+y}{m}\right)\left(1 - \dfrac{x}{m}\right)\left(1 - \dfrac{y}{m}\right) = 1 + \dfrac{z_m}{m}$, où $\lim\limits_{m\to+\infty} z_m = 0$, et utiliser la question précédente.

Considérons deux réels x et y. Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_m &= \left(1+\frac{x+y}{m}\right)\left(1-\frac{x+y}{m}\right)+\left(1+\frac{x+y}{m}\right)\left(\frac{xy}{m^2}\right) \\ &= 1-\left(\frac{x+y}{m}\right)^2+\left(1+\frac{x+y}{m}\right)\left(\frac{xy}{m^2}\right) \\ &= 1+\frac{z_m}{m} \end{aligned}$$

avec $z_m = -\frac{1}{m}\left((x+y)^2+xy\left(1+\frac{x+y}{m}\right)\right)$ *et* $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$. *Ainsi :* $(a_m)^m = u_m(x+y)u_m(-x)u_m(-y) = \left(1+\frac{z_m}{m}\right)^m$. *D'après la question précédente, on obient* $\varepsilon(x+y)\varepsilon(-x)\varepsilon(-y) = 1$ *en passant à la limite sur* m.

3. Établir les propriétés suivantes :
   (i) $\varepsilon(0) = 1$.
   La question 2.1 utilisée avec $x = 0$ *donne* $\varepsilon(0) = 1$.

   (ii) ε vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon(x+y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On a* $\varepsilon(x+y)\varepsilon(-x)\varepsilon(-y) = 1$. *En multipliant cette équation par* $\varepsilon(x)$ *et* $\varepsilon(y)$ *(les inverses respectifs de* $\varepsilon(-x)$ *et* $\varepsilon(-y)$ *d'après 2.2), on aboutit au résultat.*

   (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon(x) > 0$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a* $x > -1$ *ou* $-x > -1$. *Ainsi, d'après 2.1,* $\varepsilon(x) \geq 1$ *ou* $\varepsilon(-x) \geq 1$. *Or, la relation* $\varepsilon(x)\varepsilon(-x) = 1$ *indique que* $\varepsilon(x)$ *et* $\varepsilon(-x)$ *sont de même signe. On en déduit que* $\varepsilon(x) > 0$.

   (iv) ε est dérivable en 0 et $\varepsilon'(0) = 1$.
   Considérons un réel h *non nul tel que* $|h| < 1$. *La question 2.1 donne* $1+h \leq \varepsilon(h) \leq \frac{1}{1-h}$. *On en tire* $h \leq \varepsilon(h) - 1 \leq \frac{h}{1-h}$, *et par suite* $1 \leq \frac{\varepsilon(h)-\varepsilon(0)}{h} \leq \frac{1}{1-h}$. *On conclut avec le théorème des gendarmes.*

   (v) ε est dérivable à tout ordre k sur $\mathbb{R}$ et $\varepsilon^{(k)} = \varepsilon$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Considérons un réel* h *non nul tel que* $|h| < 1$. *On a* $\frac{\varepsilon(x+h)-\varepsilon(x)}{h} = \frac{\varepsilon(x)\varepsilon(h)-\varepsilon(x)}{h} = \varepsilon(x)\left(\frac{\varepsilon(h)-\varepsilon(0)}{h}\right)$. *On en conclut que* ε *est dérivable en* x *et que* $\varepsilon'(x) = \varepsilon(x)\varepsilon'(0) = \varepsilon(x)$. *Le réel* x *étant arbitraire, on a donc* $\varepsilon' = \varepsilon$ *et on conclut par récurrence sur* k.

   (vi) ε est strictement convexe et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   D'après (iii) ε *est à valeurs strictement positives et d'après (v)* $\varepsilon'' = \varepsilon$. *Ainsi* ε *admet une dérivée seconde strictement positive et est donc strictement convexe. La fonction* ε *est définie sur* $\mathbb{R}$, *strictement croissante (*$\varepsilon > 0$*) et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$. *La question 2.1. permet de conclure que* $\lim_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = +\infty$. *Elle induit donc une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

   (vii) Sa bijection réciproque λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda'(t) = \frac{1}{t}$ pour tout $t > 0$.
   La fonction ε *est continue, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée ne s'y annule pas. On en déduit que sa réciproque* λ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *avec* $\lambda'(t) = \frac{1}{\varepsilon'(\lambda(t))} = \frac{1}{\varepsilon(\lambda(t))} = \frac{1}{t}$ *pour tout* $t > 0$. *On conclut en utilisant le caractère* $\mathcal{C}^\infty$ *de la fonction inverse sur* $\mathbb{R}_+^*$.

   (viii) λ est solution d'une équation fonctionnelle que l'on précisera.
   Soit x, y *deux réels strictement positifs. Il existe deux réels* x', y' *tels que* $x = \varepsilon(x')$ *et* $y = \varepsilon(y')$. *On a :* $\lambda(xy) = \lambda(\varepsilon(x')\varepsilon(y')) = \lambda(\varepsilon(x'+y')) = x'+y' = \lambda(x)+\lambda(y)$. *Ainsi* λ *est solution de l'équation fonctionnelle* $f(xy) = f(x)+f(y)$.