

PROJET PEPS 2018

“Schémas entropiques et ordre élevé”

Porteur du projet **Arnaud Duran**, Maître de Conférences
Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard Lyon 1.

Membres associés **Khaled Saleh**, Maître de Conférences
Institut Camille Jordan - Université Claude Bernard Lyon 1.
Christophe Berthon, Professeur des Universités
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes.

Ce projet vise l’analyse et le développement de méthodes numériques pour des lois de conservation hyperboliques. Plus précisément, on s’intéresse ici à la mise en oeuvre d’une nouvelle classe de schémas entropiques, capables de préserver cette propriété à l’ordre élevé. Même au premier ordre en espace, la conception de schémas satisfaisant des inégalités d’entropie discrètes est un problème assez complexe. En dépit de certaines avancées récentes, la question de l’extension de telles propriétés à l’ordre élevé est un sujet toujours à l’étude. Notre but est d’apporter des éléments de réponse à cette problématique.

Positionnement

L’objectif de ce projet est de contribuer au développement de méthodes numériques pour des lois de conservation hyperboliques :

$$\partial_t w + \partial_x f(w) = 0.$$

$w \in \mathbb{R}^d$ étant le vecteur d’état et f le flux physique associé. Il est bien connu que les solutions de ces systèmes peuvent développer des discontinuités, et en conséquence ces équations doivent généralement s’adjoindre d’inégalités d’entropie ([9], [10]) afin de discriminer les solutions non physiques. Considérant un couple entropie/flux (η, G) , ces inégalités s’écrivent sous la forme :

$$\partial_t \eta(w) + \partial_x (G(w)) \leq 0. \quad (1)$$

Sur un plan numérique, la nécessité d’assurer la convergence vers des solutions admissibles motive la mise en place de méthodes capables de fournir un équivalent discret de (1). En notant w_i^n la solution approchée au temps t^n sur la cellule i , ceci se traduit localement par l’existence d’un flux numérique d’entropie satisfaisant l’inégalité suivante :

$$\eta(w_i^{n+1}) \leq \eta(w_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{G}(w_{i+1}^n, w_i^n) - \mathcal{G}(w_i^n, w_{i-1}^n)), \quad (2)$$

Δt et Δx désignant respectivement les pas de temps et d’espace. Depuis plusieurs décennies, de nombreux travaux ont été menés pour développer des méthodes numériques stables au sens de (2). Cependant, au stade actuel, et même à l’ordre 1 en espace, ces résultats ne sont pas évidents, et peu de schémas numériques sont capables de satisfaire de tels critères. A titre d’exemple, on pourra citer le solveur HLL [8], ou des systèmes de relaxation tels que Suliciu [4]. Devant cette difficulté, la stabilité entropique est souvent envisagée selon des critères plus souples, à travers par exemple des bilans d’énergie globaux ou des inégalités semi-discrètes [1], ce qui met en évidence l’importance capitale de la discrétisation temporelle dans ce type

d'analyse. Concernant les méthodes d'ordre élevé en espace, il n'existe à l'heure actuelle pas de méthode garantissant de tels résultats. On pourra toutefois citer les approches MUSCL [5], ou plus récemment [2], dans lesquelles des inégalités d'entropie discrètes sont obtenues, mais pour une définition particulière de l'entropie numérique. Concernant la définition (2) classique, des inégalités sont obtenues au second ordre dans [7], moyennant l'apparition d'un terme de reste non signé. Il est montré que ce résultat est insuffisant, dans la mesure où ce résidu converge vers une mesure positive, que l'on peut mettre en évidence numériquement.

Objectifs

La mise en oeuvre de schémas entropiques (au sens de (2)) à l'ordre élevé est un problème complexe (voir [4]). Le principal objectif est ici de montrer l'existence de tels schémas. L'idée de départ se base sur l'approche proposée dans [6] pour les équations Shallow Water, où un schéma entropique du premier ordre est obtenu par le biais d'un terme de diffusion approprié dans les flux numériques. Il est en réalité possible de donner une portée générale à cette approche en la réinterprétant à travers l'introduction d'un solveur type HLL, qui génère un terme régularisant dans le bilan d'énergie discret. Ce terme fournit alors la latitude nécessaire à l'établissement d'inégalités d'entropies (2) à l'ordre un en espace, mais aussi dans un formalisme MUSCL. Le passage au 2d est quasi-immédiat, en considérant l'approche [3] qui consiste à réécrire le schéma comme combinaison convexe de schémas 1d. Sur cette base, nos objectifs sont les suivants :

- A.** Dans le cadre des lois de conservation hyperboliques, nous visons le développement d'une méthode générique assurant des inégalités d'entropie discrètes pour des schémas MUSCL conservatifs (c'est à dire, où les états reconstruits aux interfaces s'écrivent sous la forme $w_i^\pm = w_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} \sigma_i$).
- B.** Applications aux équations Shallow Water :
 - B.1.** Nous envisageons l'extension du schéma [6] à l'ordre 2 en espace.
 - B.2.** Des travaux sont aussi en cours sur la mise en place d'inégalités d'entropie discrètes pour la reconstruction hydrostatique [1].
- C.** A plus long terme, nous planifions l'extension de la méthode aux reconstructions non conservatives. Ensuite, dans le cadre des équations d'Euler, un objectif serait d'adapter la méthode proposée dans [7] afin obtenir toutes les inégalités d'entropie. Enfin, à l'ordre 2 en espace, les termes de diffusion induits par la méthode peuvent être très importants selon les contextes, et les limitations de pas de temps associées assez restrictives. Nous gardons donc à l'esprit l'intérêt de travaux visant à relaxer ces contraintes.

Au stade actuel, un article est en cours d'écriture (**B.2.**), et deux autres sont en préparation (**B.1.** et **A.**).

Ressources financières

- ▷ Participation à des workshops et conférences. 2500 €

Nous avons notamment l'objectif de présenter ces travaux lors des évènements suivants :

- Workshop SHARK-FV, 21-25 mai 2018, Porto (Portugal), dont l'édition précédente a permis de lancer ces travaux.
- 44e Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM), 28 mai - 1er juin, Cap d'Agde (France).

- ▷ Réunions d'avancement. 1500 €
- ▷ Reconstitution du Workshop NumWave - (nov/déc. 2018). 5000 €
Il s'agit d'un workshop dédié aux méthodes numériques pour les écoulements à surface libre, en lien direct avec le projet. L'édition NumWave 2017 a été organisée par A. Duran et F. Marche (Université de Montpellier), et a vocation à être pérennisée :

http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/duran/NumWave_accueil.html

Montant total estimé : 9000 €

Références

- [1] E. Audusse, F. Bouchut, M.O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25 :2050–2065, 2004.
- [2] C. Berthon. Stability of the muscl schemes for the euler equations. *Comm. Math. Sci.*, 3(2) :133–157, 2005.
- [3] C. Berthon. Robustness of MUSCL schemes for 2D unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 218 :495–509, 2006.
- [4] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhauser, 2004.
- [5] F. Bouchut, C. Bourdarias, and B. Perthame. A muscl method satisfying all the numerical entropy inequalities. *Mathematics of Computation*, 65(216) :1439–1492, 1996.
- [6] F. Couderc, A. Duran, and J.P. Vila. An explicit asymptotic preserving low froude scheme for the multilayer shallow water model with density stratification. *Journal of Computational Physics*, 2017.
- [7] V. Desveaux and C. Berthon. An entropy preserving mood scheme for the euler equations. *International Journal On Finite Volumes*, 11 :1–39, 2014.
- [8] A. Harten, P.D. Lax, and B. Van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25 :35–61, 1983.
- [9] P. Lax. Shock waves and entropy. *Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971)*, pages 603–634, 1971.
- [10] P. Lax. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. *Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics*, (11), 1973.

Avis de la direction

Avis très favorable



Situation actuelle : Maître de Conférences à l'Institut Camille Jordan - UCBL.
43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622, Villeurbanne Cedex.

Mail : arnaud.duran@math.univ-lyon1.fr.

Web : <http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/duran>.

Discipline : Mathématiques appliquées - Analyse et simulation numérique.

Parcours et diplômes

- ▷ **Septembre 2016 :** Maître de Conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1.
- ▷ **2014 - 2016 :** Post Doctorat à l'Université Paul Sabatier, Toulouse.
Analyse et développement de schémas numériques sur grilles décalées et maillages colocalisés dédiés à l'océanographie grande échelle et littorale.
- ▷ **2011 - 2014 :** Doctorat à l'Université Montpellier.
Thèse intitulée "*Numerical simulation of depth-averaged flow models : a class of Finite Volume and discontinuous Galerkin approaches*" Directeur : F. Marche.
- ▷ **2011 :** Agrégation de Mathématiques.
- ▷ **2009 - 2011 :** Master 2 Mathématiques (Université de Montpellier). Mention très bien.
- ▷ **2007 - 2009 :** Professeur certifié de Mathématiques.

Développement

Mise en oeuvre de quatre codes de calcul opérationnels (langage FORTRAN).

- ▷ **SW-FV2D :** Solveur *Volumes Finis* pour les éq. SW 2d sur maillages non structurés.
- ▷ **SW-DG2D :** Code *Galerkin discontinu* (dG) pour les éq. SW 2d sur maillages triangulaires.
- ▷ **GN-DG1D :** Code *dG* pour les éq. Green-Naghdi 1d.
- ▷ **WaveBox :** *Extension 2d* du code précédent sur maillages triangulaires.

Publications

- [1] **A. Duran, J.P. Vila, R. Baraille.** Semi-implicit staggered mesh scheme for the multi-layer shallow water system. *Comptes Rendus Mathématiques*, 355 :1298–1306, 2017.
- [2] **F. Couderc, A. Duran, J.P. Vila.** An explicit asymptotic preserving low Froude scheme for the multilayer shallow water model with density stratification. *J. Comput. Phys.*, 343 :235–270, 2017.
- [3] **A. Duran, F. Marche.** A discontinuous Galerkin method for a new class of Green-Naghdi equations on simplicial unstructured meshes. *App. Math. Mod.*, 45 :840–864, 2017.
- [4] **A. Duran.** A robust and Well Balanced scheme for the 2D Saint-Venant system with friction source term on unstructured meshes. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 78 :89–121, 2015.
- [5] **A. Duran, F. Marche.** Discontinuous Galerkin discretization of a new class of Green-Naghdi equations. *CiCP*, 17 :721–760, 2015.
- [6] **A. Duran, F. Marche, R. Turpault, C. Berthon.** Asymptotic Preserving Scheme for the Shallow Water equations with source terms on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 287 :184–206, 2015.
- [7] **A. Duran, F. Marche.** Recent advances on the discontinuous Galerkin method for shallow water equations with topography source terms. *Comput. & Fluids*, 101 :88–104, 2014.
- [8] **A. Duran, F. Marche, Q. Liang.** On the well-balanced numerical discretization of shallow water equations on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 235 :565–586, 2013.

Situation actuelle

2014– **Maître de conférences**, *Université Claude Bernard Lyon 1*, Institut Camille Jordan.

Expériences professionnelles

2012-2014 **Post-doctorat**, *Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)*, Schémas sur grilles décalées pour les fluides compressibles et incompressibles.

Formation universitaire

2009–2012 **Thèse de mathématiques appliquées**, *Université Pierre et Marie Curie Paris 6 et EDF R&D*, Analyse et simulation numérique par relaxation d'écoulements diphasiques compressibles. Contribution au traitement des phases évanescentes.

2008–2009 **Master Recherche (M2)**, *Université Pierre et Marie Curie Paris 6*, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, Mention très bien.

2005–2009 **Ingénieur civil des Ponts et Chaussées**, *École Nationale des Ponts et Chaussées*, Département Ingénierie mathématique et informatique. Option calcul scientifique.

Liste de Publications parues ou acceptées

- [1] **J-C Latché, K. Saleh**, *A convergent staggered scheme for variable density incompressible Navier-Stokes equations*, A paraître dans *Mathematics of Computation*, 2017.
- [2] **F. Coquel, J-M. Hérard, K. Saleh**, *A Positive and Entropy-Satisfying Finite Volume Scheme for the Baer-Nunziato Model*, *Journal of Computational Physics*, 2016.
- [3] **F. Coquel, K. Saleh, N. Seguin**, *A robust and entropy-satisfying numerical scheme for fluid flows in discontinuous nozzles*, *Math. Mod. and Meth. in App. Sci. (M3AS)*, 2014.
- [4] **F. Coquel, J-M. Hérard, K. Saleh, N. Seguin**, *A robust entropy-satisfying finite volume scheme for the isentropic Baer-Nunziato model*, *Math. Model. and Numer. Analysis (M2AN)*, 2013.
- [5] **F. Coquel, J-M. Hérard, K. Saleh, N. Seguin**, *Two properties of two-velocity two-pressure models for two-phase flows*, *Comm. in Math. Sci. (CMS)*, 2013.
- [6] **F. Coquel, J-M. Hérard, K. Saleh**, *A splitting method for the isentropic Baer-Nunziato two-phase flow model*, *ESAIM: Proc* (**38**), pp 241-256, 2012.
- [7] **A-C. Boulanger, C. Cances, H. Mathis, K. Saleh, N. Seguin**, *OSAMOAL: Optimized Simulations by Adapted MOdels using Asymptotic Limits*, *ESAIM: Proc* (**38**), pp 183-201, 2012.

Pré-publications

- [1] **R. Herbin, J-C Latché, K. Saleh**, *Low Mach number limit of some staggered schemes for compressible barotropic flows*, 2017.